UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

DIPARTIMENTO DI SCIENZE POLITICHE

Matematica di base

Insegnamento di Economia Politica e Politica Economica
A.A. 2019/2020

Docenti:
Capriati Michele
Dileo Ivano

Tutor: Simeone Enza

LE QUATTRO OPERAZIONI

ADDIZIONE

I termini dell'addizione si dicono «addendi», mentre il risultato che si ottiene sommando gli addendi si chiama «somma o totale».

10+5+2= 17

Le proprietà dell'addizione:

1. <u>Proprietà commutativa</u>: cambiando l'ordine degli addendi il risultato non cambia.
   5+10+2=17
1. <u>Proprietà associativa</u>: se alcuni addendi si sostituiscono con la loro somma, il risultato non cambia.
   7+10= 17
1. <u>Proprietà dissociativa</u>: se a uno o più addendi se ne sostituiscono altri la cui somma è uguale all'addendo sostituito, il risultato non cambia.
   5+2+4+6=17

Elemento neutro dell'addizione è lo zero.

MOLTIPLICAZIONE

I termini della moltiplicazione si chiamano «fattori», mentre il risultato che si ottiene moltiplicando i fattori prende il nome di «prodotto».

$$4 \times 3 = 12$$

Le proprietà della moltiplicazione:

1. <u>Proprietà commutativa</u>: scambiando l'ordine dei fattori il risultato non cambia.

   $$3 \times 4 = 12$$

2. <u>Proprietà associativa</u>: se al posto di alcuni fattori si sostituisce il loro prodotto, il risultato non cambia.

   $$4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72 \qquad 12 \times 6 = 72$$

3. <u>Proprietà dissociativa</u>: se a uno o più fattori se ne sostituiscono altri il cui prodotto è uguale al fattore sostituito il risultato non cambia.

   $$12 \times 6 = 72 \qquad 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$$

4. <u>Proprietà distributiva</u>: scomponendo un fattore, si può moltiplicare l'altro fattore per ciascun termine dell'addizione (o sottrazione) ed addizionare poi i prodotti parziali ottenuti.

   $$6 \times 14 = 84 \qquad 6 \times (10+4) = 6 \times 10 + 6 \times 4 = 84$$

Un numero moltiplicato per zero è sempre zero.
La moltiplicazione, nella maggior parte dei casi, si indica non con il simbolo «x», ma con «·».

SOTTRAZIONE

I termini della sottrazione prendono il nome di «minuendo e sottraendo, mentre il risultato ottenuto dalla sottrazione si chiama «resto o differenza».

10 (minuendo) – 5 (sottraendo) = 5 (resto)

Le proprietà della sottrazione:

1. Proprietà invariantiva: la differenza tra due numeri non cambia se ad entrambi si addiziona o si sottrae lo stesso numero.

   10-5= 5   (10+2)-(5+2)=5   (10-2)-(5-2)=5

Elemento neutro della sottrazione è lo zero.

DIVISIONE

I termini della divisione:

140 (dividendo) : 15 (divisore) = 9 r 5 (quoziente o quoto quando il quoziente è esatto, ossia privo di resto)

La divisione in colonna:

140	15
135	9
5	

1. Incolonniamo il dividendo e il divisore.
2. Partendo dalla prima cifra di sinistra del dividendo, abbassiamo il numero minimo di cifre sufficienti a creare un nuovo numero maggiore o uguale del divisore.
3. Nel nostro caso 140 poiché maggiore di 15.
4. Adesso occorre trovare il più grande numero che moltiplicato per il divisore dia come risultato un numero minore o uguale al numero che abbiamo abbassato. Nel nostro caso 9, infatti 9x15= 135.
5. Fatto ciò si esegue una sottrazione 140-135 e otteniamo il resto parziale =5.
6. Per verificare se la divisione è corretta, occorre moltiplicare divisore e quoziente (15x9)= 135 e aggiungere il resto di 5 per avere il dividendo.

Proprietà della divisione:

1. Proprietà invariativa: il quoziente fra due numeri non cambia se entrambi si dividono o si moltiplicano per un stesso numero diverso da zero.

   15:5=3 (15:5): (5:5)= 3 (15x2): (5x2)=3

2. Proprietà distributiva: scomponendo il dividendo si può dividere ciascun termine della somma (o della differenza) per il divisore e poi sommare (o sottrarre) i quozienti ottenuti.

   175:25 =7 (150+25):25= (150:25)+(25:25) = 6+1= 7

L’elemento neutro della divisione è l’uno.

LE FRAZIONI

Qualsiasi numero intero può essere scritto sotto forma di frazione.

ESEMPIO il numero 8 è 8/1.
Una frazione non è altro che una divisione, dove il numeratore è il dividendo, mentre il denominatore è il divisore: 8/1= 8:1=8

Altro caso è quello in cui numeratore e denominatore hanno lo stesso numero= 8/8=8:8=1
Quando al numeratore abbiamo lo zero e al denominatore un numero diverso da zero, il risultato è uguale a zero. 0/3=0:3=0

ATTENZIONE: quando lo zero è al denominatore non è possibile trovare quel numero che moltiplicato per zero mi dia il numeratore, dunque è una frazione priva di significato in quanto qualsiasi numero moltiplicato per zero, dà zero. Si tratta di una frazione impossibile.

Ultimo caso si ha quando abbiamo 0/0=0:0. in questo caso cerchiamo un numero che moltiplicato per zero, dà zero, dunque qualsiasi numero. Si parla di forma indeterminata.

LE POTENZE

Elevare un numero ***a*** (base) alla potenza ***b*** (esponente) significa moltiplicare il numero a per se stesso b volte:

$3^5 = 3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3$

Casi particolari:

$a^1 = a$: per ogni numero naturale a, 1 è l’elemento neuro

$a^0=1$ se a diverso da zero

0^0 non ha significato.

Le proprietà delle potenze:

Potenze con la stessa base, ma esponente diverso:

1. Prodotto: stessa base, esponente la somma degli esponenti. Esempio $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. Quoziente: stessa base, sponente differenza degli esponenti. Esempio $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Potenza con stesso esponente, ma diversa base:

1. Prodotto: base è il prodotto delle basi, stesso esponete. Esempio $a^m \times b^m = (a \times b)^m$
2. Quoziente: base è il quoziente delle basi, stesso esponente. Eesmpio $a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = (a:b)^m$

Potenza di potenza:

1. stessa base, esponente uguale al prodotto degli esponenti. Esempio $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

MONOMI

L'espressione algebrica si ottiene legando una lettera ad un numero. Le lettere, a seconda del contesto, possono essere variabili, incognite o costanti.

I monomi sono espressioni algebriche formate da numeri e lettere legate dalla sola operazione di moltiplicazione e gli esponenti delle lettere devono essere positivi, dunque si parla di coefficiente numerico e parte letterale.
Operare con i monomi significare scriverlo in modo da avere un solo numero moltiplicato a lettere, ognuna delle quali deve comparire una volta sola.

<u>ESEMPIO</u>: 5ab è un monomio, mentre +3x+3y non è un monomio in quanto vi sono i segni dell'addizione e/o sottrazione. Dunque +3/4x è monomio anch'esso.
Un monomio in cui il coefficiente è 0, si dice nullo; quando il coefficiente è 1 si può tralasciare.
<u>ESEMPIO</u>: 0x=0 oppure 1x=x oppure -1x=-x

E un polinomio cosa è? Non è altro che la somma e/o sottrazione di più monomi.
<u>ESEMPIO</u>: 2ab-1ab

LE IDENTITA’

Le identità consentono di introdurre le equazioni. Sono formate da: due espressioni (numeri, monomi, polinomi) e il simbolo «=« in mezzo alle due espressioni.
Cosa si intende per identità? Un’uguaglianza sempre vera per ogni valore che si attribuisce alle variabili (le lettere) presente nelle espressioni.

ESEMPIO:
$2a=5a-3a$ è una identità in quanto l’espressione a destra $5a-3a$ è uguale a $2a$, ossia l’espressione di sinistra.
$5a+(2a/b)= 5a+(2a/b)$ è un’identità solo se ci sono espressioni che hanno significato, infatti se b vale zero non abbiamo una identità in quanto avremo una frazione impossibile.
ESEMPIO:
$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ questa uguaglianza è sempre verificata in quanto qualsiasi valore noi attribuiamo a x ed y avremo:
$(1+2)^2 = 1^2 + 2^2 +2 (1)(2)$
$9=9$ questo perché $x^2 + y^2 + 2xy$ non è altro che un modo alternativo di scrivere $(x+y)^2$.
DUNQUE:
Quando una uguaglianza è sempre verificata, qualunque siano i valori attribuiti alle sue lettere, sarà un’identità.

ESEMPIO: $Y= C+I+G+NX$ quale identità contabile del PIL (Prodotto Interno Lordo).

DISEQUAZIONI ED EQUAZIONI

Una disequazione non è altro che una disuguaglianza tra due espressioni letterali che si verifica per i valori (soluzioni) attribuiti alle lettere.
<u>ESEMPIO</u>: $2x+2>4$
Nelle disequazioni, così come nelle equazioni, abbiamo il primo membro e il secondo membro dopo 4 simboli diversi, ossia $>$ (maggiore); $<$ (minore) $\geq$ (maggiore o uguale); $\leq$ (minore o uguale). Nelle equazioni troviamo sempre il simbolo =.

Il grado della disequazione ci dice se è di primo grado ($3x+3<0$); secondo grado ($3x^2 + 2>0$) e terzo grado ($3x^3 +2>0$).

Ora consideriamo: $2x=6$
Se mettiamo 1 a x diventa $2=6$ dunque l'uguaglianza non si verifica. L'unico valore che verifica l'uguaglianza è 3. Infatti $2(3)=6$
DUNQUE:
L'uguaglianza tra due espressioni letterali verificata solo per alcuni valori attribuiti alle lettere, si dicono equazioni.

Come risolvere un'equazione?

Prendiamo l'esempio precedente: $2x=6$
La nostra «incognita» è la x, mentre la soluzione dell'equazione che verifica l'equazione data è 3. Come si ottiene? Isolando l'incognita e dividendo il «coefficiente» della x, quale «primo membro» dell'equazione, per il «termine noto», quale «secondo membro» dell'equazione.

ESEMPIO:

$ay-4=by$ dove la a è una «costante», -4 è il «termine noto», b è una «costante» e y è la nostra «incognita».

In un equazione, ciò che è a sinistra del segno si chiama «primo membro», ciò che è a destra del segno prende il nome di «secondo membro».

LE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE

DETERMINATA= quando l'equazione ammette un numero limitato di soluzioni

ES: $x+1=2$ diventa $x=2-1$ dunque $x=1$

$x^2=9$ diventa $\sqrt{x}=\pm\sqrt{3}$

IMPOSSIBILE= quando l'equazione non ammette nessuna soluzione.

ES: $x^2=-4$ perché nessuna potenza di indice pari può essere un numero negativo.

INDETERMINATA= quando l'equazione ammette un numero infinito di soluzioni.

ES: $3x-4=3x-4$ in quanto l'equazione è verificata qualunque valore è attribuito alla x.

ALCUNE TIPOLOGIE DI EQUAZIONI

EQUAZIONI FRATTE, ossia quelle che contengono l'incognita al denominatore.

ESEMPIO: $\frac{(x+1)}{x}$=3

si moltiplica primo membro e secondo membro per il denominatore: x $\frac{(x+1)}{x}$=3x

le x al primo membro si eliminano e diventa : x+1=3x

adesso si porta l'incognita nel primo membro cambiando di segno: x-3x=1

2x=1 dunque la soluzione dell'equazione è x=1/2

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO, SECONDO, TERZO GRADO a seconda del grado massimo dell'incognita.

2x + 4 = x - 1 Equazione lineare o di Primo Grado

x2 + x + 3 = 0 Equazione di Secondo Grado

x3 + 2x2 + x = 5 Equazione di Terzo Grado.

EQUAZIONI A UNA, DUE, TRE INCOGNITE

x + 2 = 0 Equazione ad UNA incognita

x + y = 25 Equazione a DUE incognite

x + y + z + 3 = 0 Equazione a TRE incognite.

PRINCIPI DI EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI

Tali principi ci permettono di trasformare un'equazione in un'altra **EQUIVALENTE** alla data, ma scritta in maniera più semplice della quale sappiamo trovare la **soluzione**. Trattandosi di equazioni equivalenti la soluzione trovata sarà anche soluzione della equazione di partenza.

I **PRINCIPI DI EQUIVALENZA** sono due:

1. Il PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA afferma che AGGIUNGENDO ad entrambi i membri di una equazione, uno STESSO NUMERO o una STESSA ESPRESSIONE CONTENENTE L'INCOGNITA, otteniamo una equazione EQUIVALENTE a quella data.

ESEMPIO: $4x=4$ diventa $x=4/4$ ossia $x=1$
aggiungendo -4 ad entrambi i membri avremo $4x-4=4-4$ cioè $4x-4=0$ e dunque $x=1$

La prima conseguenza, che possiamo trarre dal PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA è che possiamo TRASPORTARE un TERMINE di un'equazione DA UN MEMBRO ALL'ALTRO CAMBIANDOGLI DI SEGNO.

ESEMPIO: $x+5-5=5-5$ possiamo eliminare i termini con segno opposto e dunque rimane $x=0$

La seconda conseguenza, che possiamo trarre dal **PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** è che se uno **STESSO TERMINE COMPARE** in **ENTRAMBI i MEMBRI** di un'equazione, esso **PUO' ESSERE SOPPRESSO**.

2. Il SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA afferma che MOLTIPLICANDO o DIVIDENDO entrambi i membri di una equazione per uno STESSO NUMERO *diverso da zero* o per una STESSA ESPRESSIONE che *non possa annullarsi*, si ottiene una equazione EQUIVALENTE a quella data.

ESEMPIO: -2x=-2 x=1
moltiplichiamo per- 1 entrambi i membri -2(-1)x = -2(-1) diventa 2x=2 x=1

La prima conseguenza, che dunque, possiamo trarre dal **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** è che possiamo **CAMBIARE I SEGNI A TUTTI I TERMINI DI UN'EQUAZIONE** e ottenere una equazione equivalente a quella data.

Abbiamo, quindi, trovato un'altra conseguenza che discende dal **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA**. Se **MOLTIPLICHIAMO** entrambi i membri di un'equazione per un **numero** o per una espressione conveniente otteniamo una equazione equivalente a quella data.

ESEMPIO= 2x+4=6 2x=-4+6 2x=2 x=1
ora dividiamo entrambi i membri per 2 (2x+4)/2= 6/2 (2x+4)/2 = 3 2*(2x+4)/2 = 2*3 x=1

Un'altra conseguenza che, possiamo trarre dal **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** è che, se tutti i termini di un'equazione hanno un **FATTORE COMUNE** diverso da zero, **DIVIDENDO** per tale numero si ottiene una equazione equivalente a quella data.

RISOLVIAMO UN'EQUAZIONE INTERA DI PRIMO GRADO CON UN'INCOGNITA

$$\frac{1}{6}(x+8)=\frac{3-2x}{4}+2x-\frac{73}{12}$$

1. Innanzitutto bisogna liberare l'equazione dai denominatori. Come? Moltiplicando entrambi i membri per il minimo comune multipli dei denominatori. Nel nostro caso m.c.m. (6;4;12) = 12

$$12\cdot\left[\frac{1}{6}(x+8)\right]=\left[\frac{3-2x}{4}+2x-\frac{73}{12}\right]\cdot 12$$

Ovvero:

$$12\cdot\left[\frac{1}{6}(x+8)\right]=\frac{3-2x}{4}\cdot 12+2x\cdot 12-\frac{73}{12}\cdot 12$$

Semplificando avremo:

$$\overset{2}{\cancel{12}}\cdot\left[\frac{1}{\cancel{6}}(x+8)\right]=\frac{3-2x}{\cancel{4}}\cdot\overset{3}{\cancel{12}}+2x\cdot 12-\frac{73}{\cancel{12}}\cdot\cancel{12}$$

Quindi:

$$2\cdot(x+8)=(3-2x)\cdot 3+24x-73$$

2. Adesso si eseguono eventuali potenze e i prodotti.

$$2x+16=9-6x+24x-73$$

3.Si portano a primo membro tutti i termini che contengono l'incognita e si portano a secondo membro tutti i termini noti.
ricordiamo, dal primo principio di equivalenza, che quanto portiamo un termine da un membro all'altro dobbiamo cambiare di segno.

$$2x+6x-24x=9-16-73$$

4.Si RIDUCONO i TERMINI SIMILI, cioè si sommano tra loro i termini che contengono le incognite (2x+6x-24x) e si sommano tra loro i termini noti (9-16-73).

$$-16x=-80$$

A questo punto la nostra equazione è RIDOTTA A FORMA NORMALE e non ci resta che trovare l'incognita. Per fare ciò si DIVIDE il TERMINE NOTO per il COEFFICIENTE dell'incognita.

$$x=\frac{-80}{-16}=+5$$

RISOLVIAMO UN'EQUAZIONE FRAZIONARIA LETTERALE CON UNA INCOGNITA AL DENOMINATORE

$$\frac{a}{x+1} = a+2$$

Per prima cosa liberiamo la nostra equazione dal denominatore. Per fare ciò moltiplichiamo per il m.c.m. dei denominatori, nel nostro caso x+1:

$$\frac{a}{x+1} = a+2$$

$$a = (a+2)(x+1)$$

$$a = ax + a + 2x + 2$$

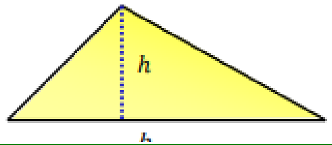
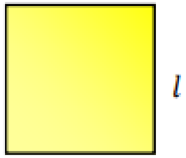
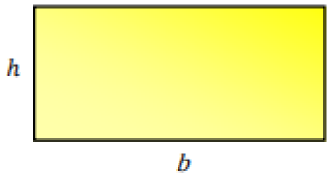
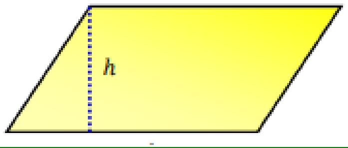
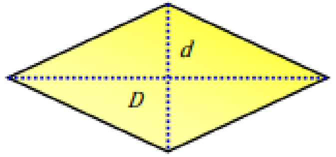
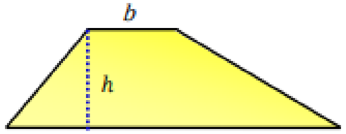
$$-ax - 2x = 2$$

$$-x(a+2) = 2$$

$$x(a+2) = -2$$

$$x = \frac{-2}{a+2}$$

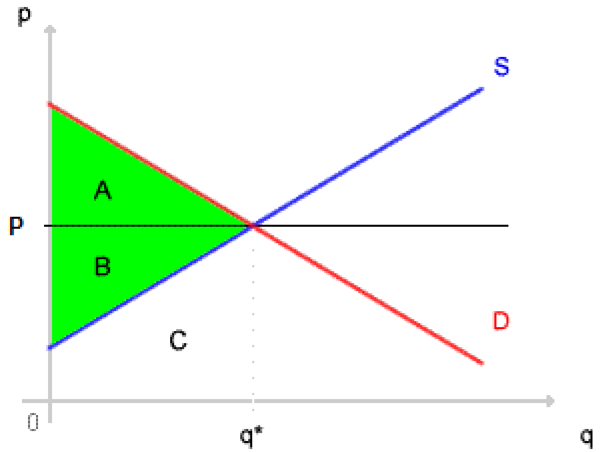
AREA DELLE PRINCIPALI FIGURE PIANE

triangolo	quadrato	rettangolo
		
$\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot h}{2}$	$\mathcal{A} = l^2$	$\mathcal{A} = b \cdot h$
parallelogramma	rombo	trapezio
		
$\mathcal{A} = b \cdot h$	$\mathcal{A} = \dfrac{D \cdot d}{2}$	$\mathcal{A} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$

A cosa serve richiamare l'area? Per esempio, per il calcolo del surplus del consumatore e del produttore.

Surplus consumatore (area A) = (b*h)/2

Lo stesso per il surplus del produttore.



DERIVATE FONDAMENTALI

esempi di derivate di alcune funzioni elementari				
$\boldsymbol{D\,k = 0}$	$D\ 5 = 0$	$D\ \pi = 0$	$D\,0 = 0$	$D\ \log_2 5 = 0$
$\boldsymbol{D\,x^n = n\,x^{n-1}}$	$D\,x = 1$	$D\,x^7 = 7\,x^6$	$D\,x^{-2} = -2\,x^{-3}$	$D\ x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}$

La derivata di una costante è sempre 0 (k=0).
<u>ESEMPIO</u>. Data la funzione Costo totale= 500+0,1q^2
La derivata del costo totale, consente di ottenere il costo marginale, ossia il costo associato alla produzione di un'unità supplementare di output. Dunque: d CT/ d q = 0,2q

<u>ESEMPIO</u>: Data la funzione di Ricavo totale =100Q -2q^2
la derivata consente di ottenere il Ricavo Marginale, quale ricavo derivante dalla produzione di un'unità supplementare da parte dell'impresa.
Dunque: d RT/ dq = 100-4q