

# Algoritmi Numerici e Coding

## Orientamento 2022

Francesca Mazzia

Dipartimento di Informatica  
Università degli studi di Bari Aldo Moro

15 Marzo 2022

- Come fa un software a capire che un volto corrisponde a quello che ho memorizzato sul mio telefonino?
- Siamo curiosi di sapere come funziona l'algoritmo alla base di un motore di ricerca?
- Quali competenze matematiche servono per progettare un algoritmo di intelligenza artificiale?
- Che rischi possiamo correre se usiamo ingenuamente le nostre risorse di calcolo?

C'è un legame profondo tra matematica e informatica che ha le sue origini storiche. Il primo algoritmo scritto per poter essere risolto da una macchina automatica risolveva un problema matematico. Uno dei primi linguaggi di alto livello è stato creato per "tradurre formule".

Nel corso del seminario si analizzeranno tali temi e si illustreranno alcuni esempi semplici di algoritmi numerici.

# Preambolo

*L'immaginazione è principalmente la facoltà della scoperta. È ciò che penetra nei mondi invisibili attorno a noi, i mondi della scienza. È quello che sente e scopre ciò che è, il vero che non vediamo, che non esiste per i nostri sensi. Coloro che hanno imparato a camminare sulla soglia dei mondi sconosciuti [...] possono allora con le ali dritte bianche dell'immaginazione sperare di salire ulteriormente nell'inesplorato in cui viviamo. La scienza matematica mostra ciò che è. È il linguaggio delle relazioni invisibili fra le cose.*

da una nota di Ada Byron in vista di un incontro con Charles Babbage.



Carla Petrocelli "Il computer è donna, Eroine geniali e visionarie che hanno fatto la storia dell'informatica", edizioni Dedalo 2019

## Un po' di storia: 1833-1843

- 1833 Charles Babbage (matematico e filosofo Britannico) lavora sulla sua celebre Difference Engine o Macchina Analitica.
- 1840 Luigi Federico Menabrea (ingegnere) coglie le potenzialità di calcolo della macchina (Torino, secondo congresso degli scienziati Italiani).
- 1841 Ada Byron contessa di Lovelace scrive: *"Voglio mettere qualcosa sui numeri di Bernoulli in una delle mie note come esempio di come una funzione esplicita possa essere elaborata dalla macchina, senza essere prima elaborata dalla testa e dalle mani umane"* (frammenti letterari della corrispondenza con Augustus De Morgan).
- 1842 Luigi Federico Menabrea pubblica l'articolo "Notions sur la machine analytique de Charles Babbage".
- 1843 Ada traduce in inglese e pubblica l'articolo di Luigi Federico Menabrea con le sue note a margine:

**Nota G: primo programma della storia.**



Carla Petrocelli "Il computer è donna, Eroine geniali e visionarie che hanno fatto la storia dell'informatica", edizioni Dedalo 2019

## Un po' di storia: 1947

John von Neumann e Herman Goldstine pubblicano l'articolo:  
"Numerical Inverting of Matrices of High Order"  
(Bulletin of the AMS, Nov. 1947).

È uno dei primi lavori che studia gli errori di arrotondamento che vengono generati risolvendo problemi matematici al calcolatore e include una discussione su quello che oggi si chiama Calcolo Scientifico.

*No computing procedure or device can perform the operations which are its "elementary" operations (or, at least, all of them) rigorously and faultlessly. This point is most important, and is best discussed separately for digital and for "analogy" procedures or devices.*

## Un po' di storia: 1954

- John Backus inventò un linguaggio che permettesse di semplificare la traduzione di formule matematiche e fisiche.
- Chiamò il linguaggio FORTRAN (Formula Translation System) sistema di traduzione delle formule.
- Il progetto originale prevedeva lo sviluppo di un linguaggio di programmazione che andasse al di là del linguaggio macchina e fosse più vicino alla sintassi e alla semantica del linguaggio naturale.

In questo modo, sosteneva Backus, la programmazione sarebbe stata più semplice e intuitiva e il tempo di realizzazione dei programmi sarebbe drasticamente calato.



Carla Petrocelli, *Non solo un traduttore di formule: Il FORTRAN e i suoi 60 anni*. MONDO DIGITALE, vol. 52, p. 1-18, ISSN: 1720-898X, 2014

Ultima release: Fortran 2018

# Calcolo Scientifico

Disciplina che permette di riprodurre su un calcolatore un fenomeno o processo descritto da un opportuno modello matematico.

Caratterizzata dalla sinergia fra:

- computer programmabili,
- matematica,
- opportunità di risolvere problemi grandi e complessi nelle applicazioni.

La necessità di risolvere applicazioni sempre più complesse come quelle della fluidodinamica computazionale e della meteorologia, hanno guidato per molto tempo lo sviluppo dei computer e dei linguaggi di programmazione e dipendono fortemente dallo sviluppo della modellizzazione matematica.

# Il processo di risoluzione numerica

Quali passi si eseguono per risolvere un problema del mondo reale al calcolatore?

- **Problema reale → Modello Matematico:**  
questo passo spesso richiede una semplificazione del modello, per esempio si suppongono trascurabili alcune grandezze fisiche;
- **Modello Matematico → Metodo Numerico:**  
questo passo spesso genera delle approssimazione nel metodo risolutivo (es. un procedimento infinito approssimato mediante un procedimento finito: errore di troncamento);
- **Metodo Numerico → programma:**  
in questo passo si introducono gli errori di arrotondamento: i dati numerici elaborati e i risultati delle operazioni eseguite vengono arrotondati (si opera con aritmetica finita, errore di round-off).



## Rappresentazione dei numeri.

- L'utilizzo in modo corretto del calcolatore per fare calcoli di tipo scientifico, richiede la conoscenza di come sono rappresentati i numeri e degli errori che derivano da questa rappresentazione.
- L'uso dei numeri reali richiede una attenzione particolare, essendo questi infiniti in ogni intervallo  $[a, b]$  con  $a$  e  $b$  numeri reali, mentre il calcolatore ci consente di rappresentarne solo un numero finito. Ogni operazione aritmetica genera quindi un errore.
- La nostra notazione per rappresentare i numeri è una notazione posizionale a base 10, il calcolatore invece, usa la rappresentazione in base 2.

## ESEMPIO 1

[https://colab.research.google.com/drive/1yAfDlcRnuLx7zt1SfcUJhRt\\_BJeG1Ui7?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1yAfDlcRnuLx7zt1SfcUJhRt_BJeG1Ui7?usp=sharing)

## Errori di arrotondamento

Facciamo il grafico delle seguenti tre funzioni equivalenti

$$r_1(x) = x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$r_2(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - x^2$$

$$\begin{aligned} r_3(x) &= r_1(x) \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \\ &= \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \\ &= \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} \end{aligned}$$

con diversi valori di  $x$ .

# Grafico utilizzando python

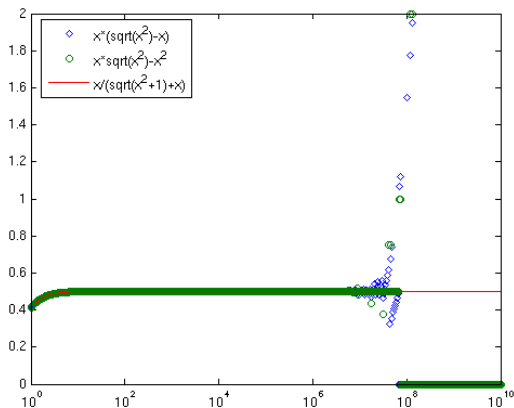
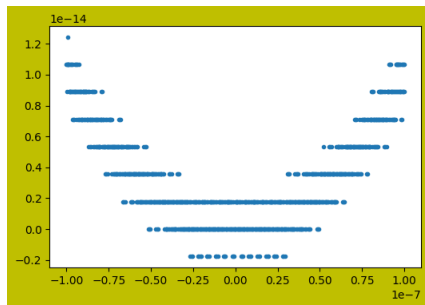
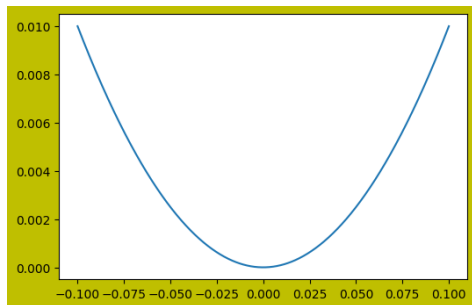


Grafico di  $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$  in un intorno di 3



## ESEMPIO 2

[https://colab.research.google.com/drive/1yAfDlcRnuLx7zt1SfcUJhRt\\_BJeG1Ui7?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1yAfDlcRnuLx7zt1SfcUJhRt_BJeG1Ui7?usp=sharing)

# Il missile Patriot

- Durante la guerra del golfo, il 25 Febbraio 1991, uno Scud Iracheno superò il sistema antimissile Patriot e colpì una caserma uccidendo 28 persone.
- Per seguire il movimento dello Scud il sistema doveva determinare l'intervallo fra due valori di misurazione sottraendo due valori di un timer.
- Il tempo in decimi di secondi era contenuto in registri di interi.
- Per calcolare l'intervallo, i valori nei registri dovevano essere convertiti in reali moltiplicandoli per 0.1. I registri utilizzati erano a virgola fissa a 24 bit.
- Un decimo non ha una rappresentazione binaria finita. Di conseguenza l'intervallo fu calcolato con errore.



Thomas Huckle, Tobias Neckel, *Bits and Bugs, A Scientific and Historical Review of Software Failures in Computational Science*, SIAM 2019

## Il Missile Patriot

- Il sistema era in funzione da cento ore, l'intervallo fu calcolato con una inaccuratezza di circa 0.34 sec, che corrisponde a un errore di posizione di 600 metri.
- Il numero  $1/10$  corrisponde a

$$(1/10)_2 = 0.00011001100110011001100110011001100....$$

- Il registro a 24 bit nel Patriot memorizzava

$$0.00011001100110011001100$$

introducendo un errore di

$$0.00000000000000000000000011001100...$$

$$\text{in decimale : } 0.000000095 = 9.5 \cdot 10^{-8}.$$

- dopo 100 ore abbiamo

$$0.000000095 \times 100 \times 60 \times 60 \times 10 = 0.34$$



# La storia di ARIANNE 5

- Ariane 5: un razzo senza equipaggio;
- Fu lanciato dall'ente spaziale europeo il 4 Giugno 1996;
- Tutto andò bene per 36 secondi;
- Al secondo 37 il razzo cambiò rotta e si autodistrusse.
- Il problema fu causato dalla necessità di convertire un numero a 64 bit a virgola mobile in un numero a 16 bit a virgola fissa
- Il numero era troppo grande e causò un errore di overflow, inviando un messaggio diagnostico al computer di bordo, il computer di bordo interpretò il messaggio diagnostico come un dato di volo.



Thomas Huckle, Tobias Neckel, *Bits and Bugs, A Scientific and Historical Review of Software Failures in Computational Science*, SIAM 2019

# Il processo di risoluzione numerica

Il processo di risoluzione numerica si occupa dello sviluppo di metodi numerici che tengano conto:

- della natura del problema,
- delle risorse hardware e software,
- dello sviluppo di un algoritmo o un set di istruzioni che descrivono come risolvere un problema con un calcolatore.

Questo richiede l'esame dei diversi aspetti che riguardano:

- la scrittura, la comprensione, la valutazione di algoritmi e la loro implementazione in un determinato ambiente di calcolo;
- la formulazione di problemi test;
- lo sviluppo della fase di testing e della misura dell'efficienza.

# Esempio: Calcolo traiettoria ottima di un drone

Progetto PON Ricerca e Innovazione 2014-2020", project RPASInAir: Integrazione dei Sistemi Aeromobili a Pilotaggio Remoto nello spazio aereo non segregato per servizi", n. ARS01 00820.

Video volo drone

## Google page rank

World Wide Web, una grandissima e disorganizzata collezione di documenti in formati differenti.

Larry Page e Sergey Brin, allora studenti dell'Università di Stanford, svilupparono la teoria secondo cui un motore di ricerca basato sull'analisi matematica delle relazioni tra i siti web avrebbe prodotto risultati migliori rispetto alle tecniche empiriche usate precedentemente.

Fondarono l'azienda Google Inc. il 4 settembre 1998.

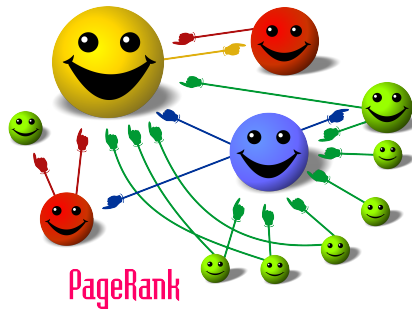
## Google page rank

- Come funziona l'algoritmo del page rank di Google?
- Come sono scelte le pagine web da suggerire in base alla nostra richiesta?
- Ogni volta che un utente chiede di trovare una parola, o una frase, il motore di ricerca cerca fra tutte le pagine classificate quelle che contengono la parola o la frase da ricercare. Ci saranno sicuramente moltissime pagine che conterranno la parola richiesta, come elencarle in modo da mettere in evidenza le pagine più interessanti?

L'importanza di una pagina è giudicata dal numero di pagine che la linkano e dalla loro importanza.

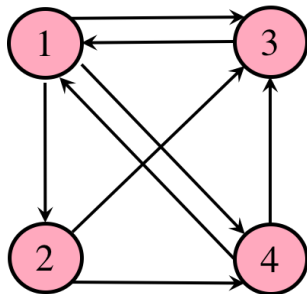
- Per approfondire: <https://www.dam.brown.edu/people/mchb/1a/GooglePageRank.pdf>

# Google page rank-Esempio



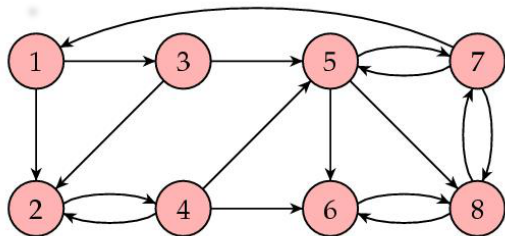
## Google page rank-Esempio

Supponiamo di lavorare con le seguenti pagine web. Le frecce indicano i collegamenti (link) da una pagina all'altra.



quale sarà la pagina più importante?

## Google page rank-Esempio

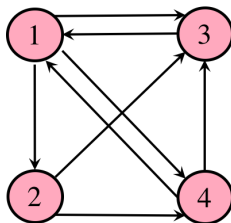


e in questo caso? Il Web ha dimensioni enormi ma non infinite ed è in continua espansione. A gennaio 2021, c'erano oltre 1.83 miliardi di siti Web su Internet. A gennaio 2022 sono diventati 1.9 miliardi.



## Esempio (1/3)

Torniamo al nostro esempio:



abbiamo quattro pagine  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , e  $P_4$ .

Denotiamo con  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  il loro PageRank.

- Alla pagina  $P_1$  giungono due link: uno dalla pagina  $P_3$  (che contiene un solo link) e l'altro dalla pagina  $P_4$  (che contiene due link).

Pertanto:  $x_1 = x_3 + \frac{1}{2}x_4$ .

- Ragionando analogamente, per la pagina  $P_2$  risulta:  $x_2 = \frac{1}{3}x_1$ .

- Per la pagina  $P_3$  risulta:  $x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4$ .

- Infine, per la pagina  $P_4$  risulta:  $x_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ .

## Esempio (2/3)

Abbiamo ottenuto il sistema lineare

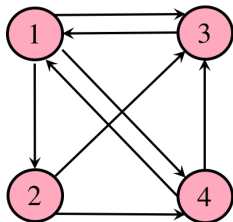
$$\begin{cases} x_3 + \frac{1}{2}x_4 = x_1 \\ \frac{1}{3}x_1 = x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_4 \end{cases}$$

- Si vede facilmente che, se  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  è una sua soluzione, lo sono anche  $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$  al variare di  $\alpha$  parametro reale (non sorprende: la classifica è invariante rispetto alla moltiplicazione di tutti i punteggi per uno stesso fattore)
- Per convenzione si sceglie la quadrupla che soddisfa

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

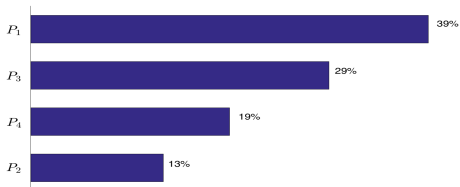
(si chiama normalizzazione). In questa maniera, il punteggio di ogni pagina può essere interpretato come la sua importanza in termini percentuali rispetto alle altre pagine.

## Esempio (3/3)



- Qual è la pagina web più importante?
- La soluzione (normalizzata) del sistema è:

$$x_1 = \frac{12}{31} \approx 0.39, \quad x_2 = \frac{4}{31} \approx 0.13, \quad x_3 = \frac{9}{31} \approx 0.29, \quad x_4 = \frac{6}{31} \approx 0.19.$$



## Matrice di Google

Se il numero di pagine è elevato conviene scrivere il sistema utilizzando il formalismo delle matrici.

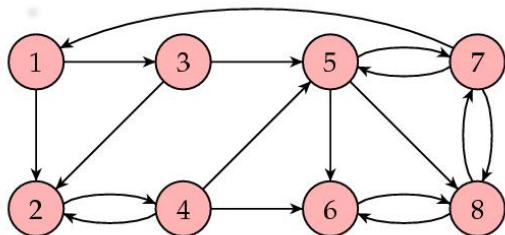
Riprendiamo il sistema dell'esempio precedente:

$$\begin{cases} x_3 + \frac{1}{2}x_4 = x_1 \\ \frac{1}{3}x_1 = x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_4 \end{cases}$$

I coefficienti che compaiono ai membri sinistri delle 4 equazioni possono essere rappresentati mediante la matrice di 4 righe e 4 colonne:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Google page rank-Esempio



$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

# Google Page Rank

- Il vettore soddisfa l'equazione lineare scritta in notazione matriciale:

$$Hx = x$$

- Il vettore  $x$  viene detto autovettore della matrice  $H$  con autovalore 1.
- $x$  si chiama anche vettore stazionario.
- La matrice  $H$  ha tutti gli elementi non negativi, la somma degli elementi su una colonna è uno a meno che la pagina non ha nessun link in uscita.

# Google Page Rank

- Il modello individuato ci permette di ottenere sempre la risposta desiderata?
- Conosciamo un algoritmo che ci consente di lavorare con matrici molto grandi, sparse?
- Quali problemi creano pagine che non hanno link ad altre pagine (sono chiamate "**dangling nodes**", e ne esistono molte nel web)? Il modello gestisce queste pagine?
- Una proprietà importante che richiediamo al nostro modello è che ogni pagina deve avere una importanza strettamente positiva. Questa proprietà è garantita?
- .....

# Google page rank

L'algoritmo va modificato, non soddisfa le proprietà richieste. Per esempio possiamo fare in modo che l'utente navighi:

- o seguendo un link nella pagina,
- oppure, se la pagina non ha link, scegliendo casualmente una qualsiasi altra pagina,
- oppure scegliendo in maniera completamente casuale un'altra pagina.
- .....



## ESEMPIO 3

[https://colab.research.google.com/drive/1yAfDlcRnuLx7zt1SfcUJhRt\\_BJeG1Ui7?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1yAfDlcRnuLx7zt1SfcUJhRt_BJeG1Ui7?usp=sharing)

# La meccanica del Machine Learning

A scuola abbiamo imparato a:

- moltiplicare numeri,
- risolvere equazioni,
- calcolare le derivate,

ci sono state date istruzioni per farlo.

Da piccolissimi abbiamo appreso a riconoscere gli animali attraverso gli esempi. Abbiamo anche imparato dai nostri errori.

In machine learning si costruisce un modello che può valutare un esempio, e alcune semplici istruzioni che consentono di modificarlo se sbaglia.

Ci aspettiamo che con il tempo il modello ci fornisca risposte molto accurate.



Nikhil Buduma and Nicholas Lacascio, *Fundamentals of Deep Learning, Designing Next-Generation Machine Intelligence Algorithms* O'Reilly, 2017

# La meccanica del Machine Learning

Esempio vogliamo determinare come predire il voto di esame basato sul numero di ore di sonno ( $x_1$ ) e il numero di ore di studio ( $x_2$ ).

- Abbiamo a disposizione alcune informazioni, dati  $x_1, x_2$  sappiamo anche se il voto è stato superiore alla media o inferiore.
- Obiettivo, costruire un modello che dato  $x_1$  e  $x_2$  ci dice se prenderemo una valutazione superiore alla media (1) o inferiore (-1). Il modello dipenderà da tre parametri

$w_0, w_1, w_2$

e costruisce una funzione che

se  $x_1 w_1 + x_2 w_2 + w_0 < 0 \rightarrow -1$

se  $x_1 w_1 + x_2 w_2 + w_0 \geq 0 \rightarrow 1$

questo modello è un classificatore lineare che divide il piano in due parti.

# La meccanica del Machine Learning

Gli esempi noti ci aiutano a determinare i parametri  $w_0, w_1, w_2$  in modo che il nostro modello faccia la giusta predizione.

Questo modello si chiama **Percettrone (Perceptron)** ed è nato nel 1958:

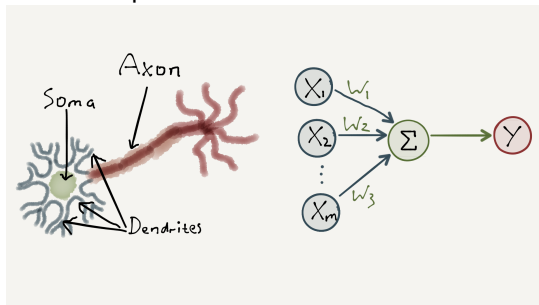


Rosenblatt, Frank. "The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain." *Psychological Review* 65.6 (1958): 386.

cerca di imitare il comportamento di un neurone.

# La meccanica del Machine Learning

I neuroni sono le unità fondamentali del cervello. Ricevono informazioni da altri neuroni, processano queste informazioni e inviano i risultati.



Gli input sono ricevuti dai dendriti. Queste connessioni sono dinamicamente rinforzate o indebolite a seconda di quanto spesso le usiamo. **E' la forza di ogni connessione che determina il contributo dell'input nell'output del neurone.** Dopo essere pesato, l'input è sommato nel corpo della cellula e trasformato in un nuovo segnale e inviato fuori.

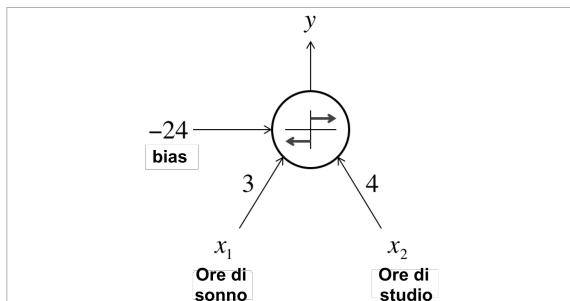
<https://jontysinai.github.io/jekyll/update/2017/11/11/>

# La meccanica del Machine Learning

- Un singolo neurone può esprimere modelli che non possono essere espressi da un perceptrone lineare, ma il nostro perceptrone lineare può essere rappresentato da un neurone.
- Questo modello è limitato perchè possiamo apprendere solo relazioni semplici, lineari.
- Se i dati sono più complessi i modelli devono cercare di imitare meglio le strutture del nostro cervello.

# La meccanica del Machine Learning

Se nel nostro modello scegliamo  $w_1 = 3$ ,  $w_2 = 4$ ,  $w_0 = -24$  abbiamo la seguente rappresentazione:



## La meccanica del Machine Learning

Come scegliere valori ottimi per i parametri  $w_0, w_1, w_2$ ?

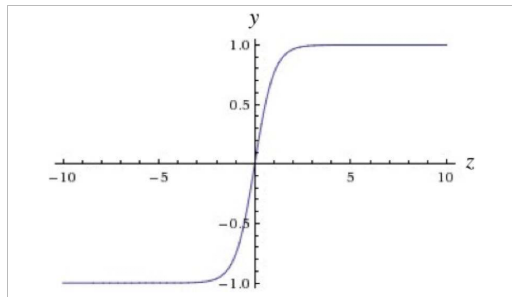
Come scegliere la funzione  $f(x)$  che elabora l'input e produce l'output?

Scegliamo una funzione nonlineare.

Un esempio di funzione  $f$  è data da:

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z/2}}{1 + e^{-z/2}} = \tanh(z)$$

questa funzione ha il seguente andamento:





## Allenare una rete neurale

Ritorniamo al nostro esempio. Abbiamo a disposizione alcuni dati di test, sappiamo che:

- Olimpio ore di studio  $o_1 = 9$  ore di sonno  $o_2 = 5$   
voto sopra la media  $o_v = 1$
- Ermione ore di studio  $e_1 = 3$  ore di sonno  $e_2 = 7$   
voto sopra la media  $e_v = 1$
- Beniamino ore di studio  $b_1 = 3$  ore di sonno  $b_2 = 5$   
voto sotto la media  $b_v = -1$
- Carlotta ore di studio  $m_1 = 2$  ore di sonno  $m_2 = 6.8$   
voto sotto la media  $m_v = -1$

Per trovare i parametri minimizziamo la seguente funzione errore:

$$\min_{w_0, w_1, w_2} \quad (f(o_1, o_2, w) - o_v)^2 + (f(e_1, e_2, w) - e_v)^2 + \\ + (f(b_1, b_2, w) - b_v)^2 + (f(m_1, m_2, w) - m_v)^2$$

# Allenare una rete neurale

- Si deve risolvere un problema di minimo in più variabili.
- Gli algoritmi che si usano sono algoritmi di ottimizzazione.
- È necessario trovare un algoritmo che possa funzionare quando si hanno molti dati a disposizione.
- Molti algoritmi sono già disponibili, sapere come funzionano consente di definire al meglio l'input.
- Per reti profonde, con molti strati, il problema di minimo è più complesso.
- Per problemi complessi è necessario lavorare in gruppi multidisciplinari.

## ESEMPIO 4

[https://colab.research.google.com/drive/1yAfDlcRnuLx7zt1SfcUJhRt\\_BJeG1Ui7?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1yAfDlcRnuLx7zt1SfcUJhRt_BJeG1Ui7?usp=sharing)

In quali corsi si approfondiscono queste tematiche? Quali competenze di base servono? Lauree triennali

- Analisi Matematica
- Matematica Discreta
- Calcolo Numerico
- Programmazione
- Calcolo delle Probabilità e Statistica
- Algoritmi e Strutture Dati
- ....
- Data mining
- Metodi per il Ritrovamento dell'Informazione
- Ingegneria della Conoscenza
- Sistemi Intelligenti per la Comunicazione digitale
- .....

# In quali corsi si approfondiscono queste tematiche?

## Lauree Magistrali

- Numerical Methods for Computer Science
- Machine Learning
- Natural Language Processing
- Intelligent Information Access and Natural Language Processing
- Big Data Analytics
- Computational Intelligence
- Fondamenti di matematica per la Data Science
- Metodi numerici per la Data Science
- Data Mining
- Modellizzazione statistica
- Apprendimento automatico
- Modelli decisionali e ottimizzazione
- Recommender systems
- Analisi dei dati per la sicurezza
- ....

# Conclusione

*L'informatica, la matematica, la scienza sono universali e  
UNISCONO:  
lavoriamo insieme per la PACE.*