# Sì, no, anzi: probabilmente

Giovanni Taglialatela

http://www.uniba.it/docenti/taglialatela-giovanni

Università degli studi di Bari Aldo Moro
Dipartimento di Economia e Finanza

19 marzo 2024





## Definizione classica di probabilità (probabilità a priori)

La probabilità che si verifichi un dato evento $E$ è il rapporto

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli all'evento}}{\text{numero di casi } \textbf{possibili}}$$

purché tutti i casi considerati siano **equiprobabili**.

**Domanda: cosa vuol dire equiprobabili?**

**Domanda: i casi sono sempre equiprobabili?**

**Domanda: e se i casi sono infiniti?**

## Definizione frequentistica (o statistica) di probabilitá

Ripetiamo il medesimo esperimento, nelle medesime condizioni.

La probabilità del verificarsi di un evento $E$ è data dalla frequenza con cui esso si verifica:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{numero di prove in cui si verifica l'evento}}{\text{numero di ripetizioni dell'esperimento}}$$

**Problema**

Come ripetere l'esperimento, nelle medesime condizioni?

**Legge empirica del caso**

Al crescere del numero di esperimenti la frequenza di un evento si avvicina alla sua probabilità.



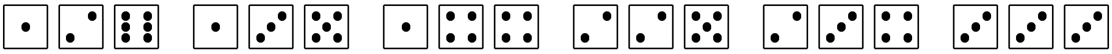
## Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 1/5

Lanciamo tre dadi e sommiamo i risultati ottenuti.

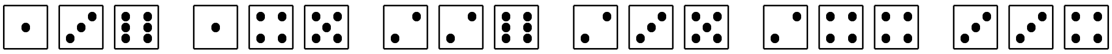
> *... ancor che il 9 e il 12 in altrettante maniere si componghino in quante il 10 e l'11, per lo che di eguale uso devriano esser reputati, si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.*

## Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 2/5

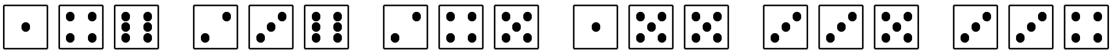
La somma 9 si ottiene con:



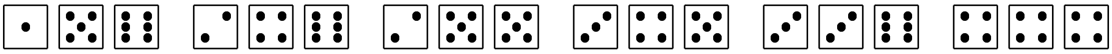
La somma 10 si ottiene con:



La somma 11 si ottiene con:



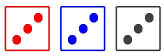
La somma 12 si ottiene con:



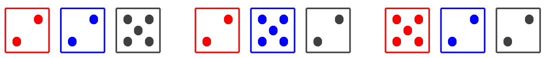


## Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 3/5

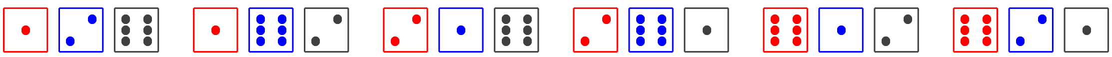
- Una combinazione di tre numeri uguali può presentarsi in un solo modo:



- Una combinazione con due numeri uguali può presentarsi in tre modi diversi:



- Una combinazione con tre numeri diversi in sei modi diversi.



## Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 4/5

La somma 9 si ottiene in 25 modi diversi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⚀⚁⚅ | ⚀⚂⚄ | ⚀⚃⚃ | ⚁⚁⚄ | ⚁⚂⚃ | ⚂⚂⚂ |
| 6 | 6 | 3 | 3 | 6 | 1 |

La somma 10 si ottiene in 27 modi diversi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⚀⚂⚅ | ⚀⚃⚄ | ⚁⚁⚅ | ⚁⚂⚄ | ⚁⚃⚃ | ⚂⚂⚃ |
| 6 | 6 | 3 | 6 | 3 | 3 |

La somma 11 si ottiene in 27 modi diversi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⚀⚃⚅ | ⚁⚂⚅ | ⚁⚃⚄ | ⚀⚄⚄ | ⚂⚂⚄ | ⚂⚂⚃ |
| 6 | 6 | 6 | 3 | 3 | 3 |

La somma 12 si ottiene in 25 modi diversi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⚀⚄⚅ | ⚁⚃⚅ | ⚁⚄⚄ | ⚂⚃⚄ | ⚂⚂⚅ | ⚃⚃⚃ |
| 6 | 6 | 3 | 6 | 3 | 1 |



## Galileo Galilei, *Sopra le scoperte de i dadi*, (1612) – 5/5

Quindi:

$$\mathbb{P}(\text{somma dei tre dadi} = 9) = \mathbb{P}(\text{somma dei tre dadi} = 12) = \frac{25}{216}$$

$$\mathbb{P}(\text{somma dei tre dadi} = 10) = \mathbb{P}(\text{somma dei tre dadi} = 11) = \frac{27}{216}$$

## Definizione soggettiva di probabilità

La probabilità di un evento è data dal **prezzo** che un individuo coerente è disposto a pagare per

- ricevere 1 se l'evento si verifica,
- 0 se l'evento non si verifica.

Non deve essere possibile né una vincita certa, né una perdita certa.



## Estrazione di un campione da un insieme finito

Sia $S$ un insieme finito di $n$ elementi, e sia $k = 1, 2, \ldots$.
Possiamo estrarre da $S$ un **campione** di $k$ oggetti, in quattro modi diversi:

### 1) Disposizioni semplici: campione ordinato senza ripetizione

Estraiamo uno ad uno i $k$ oggetti senza reinserire gli oggetti estratti (in tal caso $k \leq n$).

### 2) Disposizioni con ripetizione: campione ordinato con ripetizione

Estraiamo un oggetto da $S$, ne prendiamo nota, e lo inseriamo nuovamente in $S$.
Estraiamo un secondo oggetto da $S$, ne prendiamo nota, e lo inseriamo nuovamente in $S$, e così via...
In tal modo ciascun oggetto può essere estratto più volte.

## Estrazione di un campione da un insieme finito

Sia $S$ un insieme finito di $n$ elementi, e sia $k = 1, 2, \ldots$.

### 3) Combinazioni semplici: campione non ordinato senza ripetizione

Estraiamo uno ad uno i $k$ oggetti senza reinserire gli oggetti estratti;
una volta terminate le estrazioni non teniamo conto dell'ordine degli oggetti estratti.

### 4) Combinazioni con ripetizione: campione non ordinato con ripetizione

Estraiamo uno ad uno i $k$ oggetti reinserendo gli oggetti estratti, in modo che un oggetto possa essere estratto più volte. Una volta ultimata l'estrazione non teniamo conto dell'ordine degli oggetti estratti.



## Estrazione di un campione da un insieme finito

### Esempio:

Campioni ordinati senza ripetizione

- Estrazioni del gioco del Lotto.

Campioni ordinati con ripetizione

- Pin del cellulare.

Campioni non ordinati senza ripetizione

- Mano di carte da gioco.

Campioni non ordinati con ripetizione

- Disposizione di palline indistinguibili in cassetti.

## Vari modi di estrarre un campione

**Esempio: $S = \{a, b, c\}$**

Campioni ordinati senza ripetizione di due elementi

$(a, b)$, $(b, a)$, $(b, c)$, $(c, b)$, $(c, a)$, $(a, c)$.

Campioni ordinati con ripetizione di due elementi

$(a, a)$, $(a, b)$, $(b, a)$, $(b, b)$, $(b, c)$, $(c, b)$, $(c, c)$, $(c, a)$, $(a, c)$.

Campioni non ordinati senza ripetizione di due elementi

$\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$.

Campioni non ordinati con ripetizione di due elementi

$[a, a]$, $[a, b]$, $[b, b]$, $[b, c]$, $[c, c]$, $[c, a]$.



## Disposizioni semplici: campione ordinato senza ripetizione

**Domanda**

Quante sono le possibili <u>estrazioni ordinate</u> di 5 numeri,
da un'urna contenente 90 palline numerate da 1 a 90?

| | | |
|---|---|---|
| Per la prima | estrazione abbiamo | 90 scelte. |
| seconda | | 89 scelte. |
| terza | | 88 scelte. |
| quarta | | 87 scelte. |
| quinta | | 86 scelte. |

**In definitiva:**

$$90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$$

## Disposizioni semplici: campione ordinato senza ripetizione

### Domanda

Quante sono le possibili <u>estrazioni ordinate</u> di $k$ numeri,
da un'urna contenente $n$ palline numerate da 1 a $n$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| Per la prima | estrazione abbiamo | $n$ | scelte. |
| seconda | | $n-1$ | scelte. |
| terza | | $n-2$ | scelte. |
| ... | | | |
| $k$-esima | | $n-k+1$ | scelte. |

**In definitiva:**

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$



## Disposizioni semplici: campione ordinato senza ripetizione

### Proposizione

Il numero di **disposizioni semplici** di lunghezza $k$ da un insieme di $n$ elementi è

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fattori}}$$

Lo si indica con $D_{n,k}$ oppure $(n)_k$

### Esempio:

$(90)_5 = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86.$

### Esempio:

$(54)_3 = 54 \cdot 53 \cdot 52.$

## Permutazioni semplici: ordinamenti di un insieme

**Domanda**

Quanti sono i possibili modi di mescolare un mazzo di carte francesi?

$$54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

**In generale:**

**Proposizione**

Il numero di **permutazioni semplici** degli elementi di un insieme con $n$ elementi è dato da

$$(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Lo si indica con $P_n$ oppure $n!$.
$n!$ è detto **fattoriale** di $n$.
Per convenzione: $0! = 1$.



## Permutazioni semplici: ordinamenti di un insieme

**Osservazione:**

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Difatti

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\ &= (n)_k\end{aligned}$$

## Campione ordinato con ripetizione: disposizioni con ripetizione

**Domanda**

Quanti sono i possibili PIN di 4 numeri?

| | | |
|---|---|---|
| Per la prima | cifra abbiamo | 10 scelte. |
| | seconda | 10 |
| | terza | 10 |
| | quarta | 10 |

**In definitiva:**

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10.000$$



## Campione ordinato con ripetizione: disposizioni con ripetizione

**Domanda**

Quante sono le possibili estrazioni ordinate con ripetizione di $k$ elementi da un insieme di $n$ elementi?

**Proposizione**

Il numero di **disposizioni con ripetizione** di lunghezza $k$ da un insieme di $n$ elementi è

$$n^k$$

Lo si indica con $D'_{n,k}$.

## Campione non ordinato senza ripetizione: combinazioni semplici.

### Domanda

Quante sono le possibili mani di tre carte, con un mazzo di carte francesi?

I campioni <u>ordinati</u> di 3 elementi da un insieme di 54 elementi sono

$$54 \cdot 53 \cdot 52$$

In una mano di carte, **non ha importanza l'ordine**:

A♡ 2♠ 7♣     A♡ 7♣ 2♠     2♠ A♡ 7♣

2♠ 7♣ A♡     7♣ A♡ 2♠     7♣ 2♠ A♡

rappresentano la stessa mano di gioco.



## Campione non ordinato senza ripetizione: combinazioni semplici.

### Domanda

Quante sono le possibili mani di tre carte, con un mazzo di carte francesi?

I campioni <u>ordinati</u> di 3 elementi da un insieme di 54 elementi sono

$$54 \cdot 53 \cdot 52$$

Le mani di tre carte sono

$$\frac{54 \cdot 53 \cdot 52}{3!}$$

Si noti che

$$\frac{54 \cdot 53 \cdot 52}{3!} = \frac{54 \cdot 53 \cdot 52}{3!} \cdot \frac{51!}{51!} = \frac{54!}{3! \cdot 51!}$$

## Coefficienti binomiali

**In generale:**

### Proposizione

Il numero di **combinazioni semplici** di lunghezza $k$ da un insieme di $n$ elementi è

$$\frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{\text{numero di disposizioni semplici}}{\text{numero di permutazioni semplici}}$$

Lo si indica con $\binom{n}{k}$ oppure con $C_{n,k}$.

### Osservazione

$\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi di $k$ elementi, di un insieme di $n$ elementi.



## Coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

### Esempio:

Numero di mani di tre carte, da un mazzo di carte francesi.

permutazioni del mazzo di carte

$$\binom{54}{3} = \frac{54!}{3!\,(54-3)!}$$

permutazioni delle carte servite

permutazioni delle restanti carte

## Coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

**Esempio:**

Una mano di poker è formata da 5 carte estratte senza reinserimento e senza interesse per l'ordine da un mazzo di 32 carte (A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, per i 4 colori $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$). Il numero di mani di poker è

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 201376\,.$$



## Coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

**Esempio:**

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3;$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{720}{24 \cdot 2} = 15.$$

**Nota**

Per comodità si pone $\binom{n}{k} = 0$ se $k < 0$, oppure $k > n$.

## Proprietà dei coefficienti binomiali

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
4. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$.
   (Formula di Stifel)



## Dimostrazione della Formula di Stifel

Sia

$$S = \{1, 2, \ldots, n-1, n, n+1\}$$

Il numero di sottoinsiemi con $k$ elementi di $S$ è $\binom{n+1}{k}$

Il numero di sottoinsiemi di $S$ **che non contengono** $n+1$ è $\binom{n}{k}$.

Il numero di sottoinsiemi di $S$ **che contengono** $n+1$ è $\binom{n}{k-1}$.

Sommando

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

## Triangolo di Tartaglia

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\vdots$$

$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$\vdots$$

Ogni numero è somma dei due numeri sovrastanti (Formula di Stifel).



## Binomio di Newton

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{1} x y^{n-1} + y^n.$$

### Esempi

$$n = 2 \qquad (x+y)^2 = 1\,x^2 + 2\,xy + 1\,y^2$$
$$n = 3 \qquad (x+y)^3 = 1\,x^3 + 3\,x^2 y + 3\,xy^2 + 1\,y^3$$
$$n = 4 \qquad (x+y)^4 = 1\,x^4 + 4\,x^3 y + 6\,x^2 y^2 + 4\,xy^3 + 1\,y^4$$

## Logica degli eventi VS Teoria degli insiemi

| Logica degli eventi | Teoria degli insiemi |
|---|---|
| **evento impossibile** | $\varnothing$ |
| **evento certo** | $S$ |
| si verifica l'evento $A$ | $A$ |
| **evento contrario**<br>non si verifica l'evento $A$ | $\complement A = S \setminus A$ |
| si verificano sia $A$ che $B$ | $A \cap B$ |
| si verifica almeno uno tra $A$ e $B$ | $A \cup B$ |
| si verifica $A$ ma non $B$ | $A \setminus B$ |
| $B$ è **sufficiente** per $A$<br>$A$ è **necessario** per $B$<br>(se si verifica B, si verifica anche $A$) | $B \subseteq A$<br>$A \supseteq B$ |
| $A$ e $B$ sono **incompatibili**<br>($A$ e $B$ non possono verificarsi contemporaneamente) | $A \cap B = \varnothing$ |



## Definizione assiomatica di probabilitá

La probabilitá é una funzione che associa ad (alcuni) sottoinsiemi di $S$ un numero tra 0 e 1. Tale funzione verifica le seguenti proprietá:

1. $\mathbb{P}(S) = 1$;
2. Se $A$ e $B$ sono incompatibili, allora:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

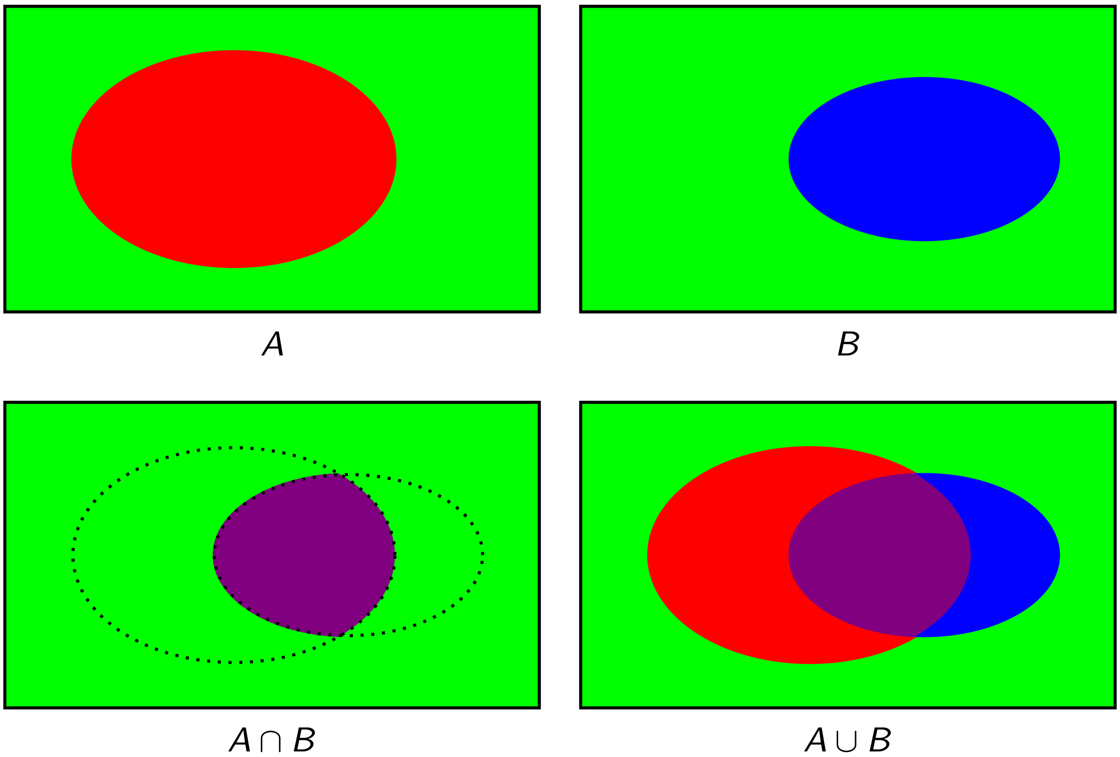
In generale

2. Se $A_1, \ldots, A_n$ sono **a due a due** incompatibili, allora:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

## Formula di addizione e sottrazione

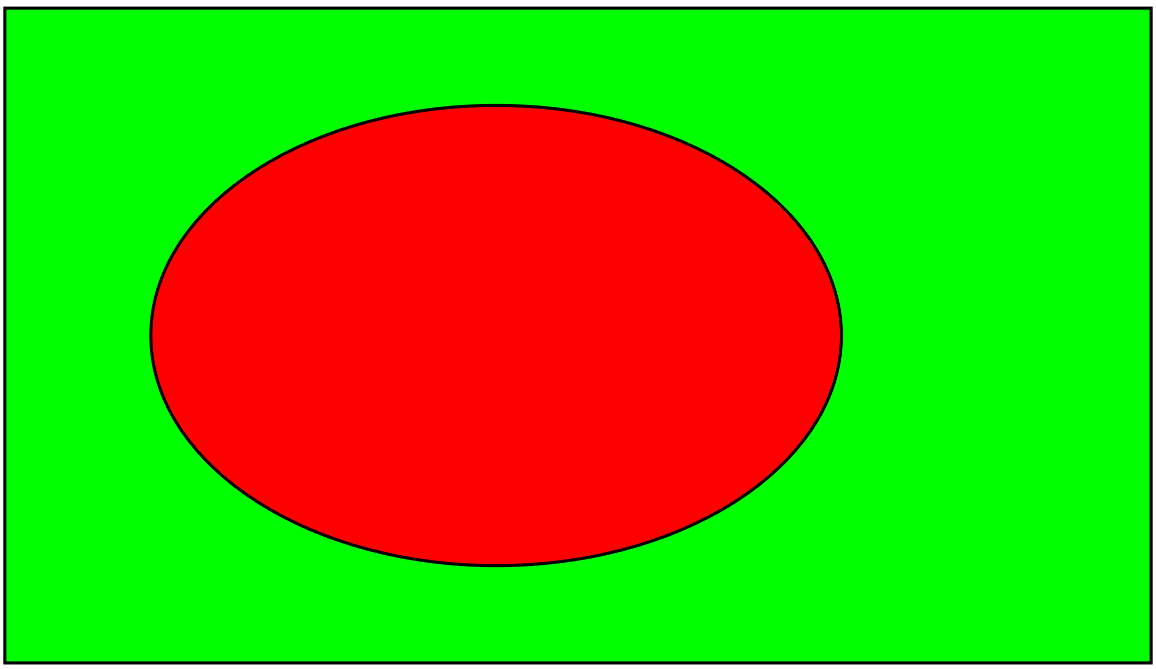
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$






## Probabilità dell'evento contrario

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\complement A)$$



## Probabilità dell'evento contrario: $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\complement A)$

$$\{\ \text{casi favorevoli}\ \} \bigcup \{\ \text{casi sfavorevoli}\ \} = \{\ \text{casi possibili}\ \}$$

$$\#\ \text{casi favorevoli} + \#\ \text{casi sfavorevoli} = \#\ \text{casi possibili}$$

$$\frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi possibili}} + \frac{\#\ \text{casi sfavorevoli}}{\#\ \text{casi possibili}} = 1$$

$$\mathbb{P}(\text{si verifica } A) + \mathbb{P}(\text{NON si verifica } A) = 1$$



## Problema del compleanno

### Problema del compleanno

Dato un gruppo di $N$ persone, qual è la probabilità che ci siano **almeno due persone** nate lo stesso giorno?
(Supponiamo, per semplicità, che gli anni siano tutti di 365 giorni e che i compleanni siano equiprobabili).

Calcoliamo i "casi sfavorevoli", ovvero i casi in cui scegliendo a caso $N$ date, esse risultino tutte diverse tra loro:

$$\begin{aligned} &\text{numero di casi } \textbf{sfavorevoli} &&= (365)_N = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - N + 1) \\ &\text{numero di casi } \textbf{possibili} &&= 365^N \end{aligned}$$

La probabilità che $N$ persone siano tutte nate in giorni differenti è

$$\frac{(365)_N}{365^N}$$

La probabilità cercata è dunque:

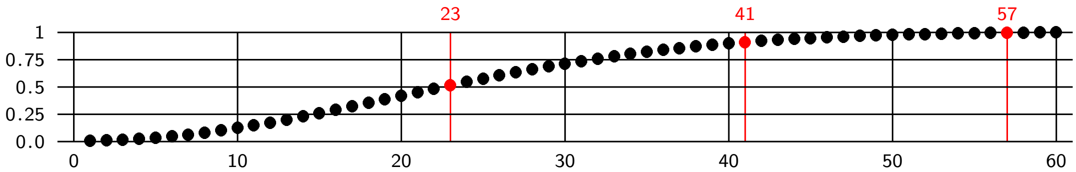
$$1 - \frac{(365)_N}{365^N}$$

## Problema del compleanno

| | |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,0027... |
| 3 | 0,0082... |
| 4 | 0,0163... |
| 5 | 0,0271... |
| 6 | 0,0404... |
| 7 | 0,0562... |
| 8 | 0,0743... |
| 9 | 0,0946... |
| 10 | 0,1169... |

| | |
|---|---|
| 11 | 0,1411... |
| 12 | 0,1670... |
| 13 | 0,1944... |
| 14 | 0,2231... |
| 15 | 0,2529... |
| 16 | 0,2836... |
| 17 | 0,3150... |
| 18 | 0,3469... |
| 19 | 0,3791... |
| 20 | 0,4114... |

| | |
|---|---|
| 21 | 0,4436... |
| 22 | 0,4756... |
| 23 | 0,5072 ... |
| 24 | 0,5383... |
| 25 | 0,5686... |
| ⋮ | |
| 41 | 0,9032 |
| ⋮ | |
| 57 | 0,9901 |






## Il problema dell'ago di Buffon.

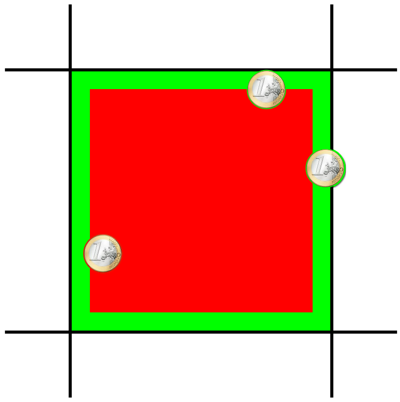
Nel 1777, Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon, pose il seguente problema.
Supponiamo di avere un pavimento in parquet fatto da listelli della stessa larghezza, e facciamo cadere un ago sul pavimento.
**Qual è la probabilità che l'ago cada su una linea fra due listelli?**
La soluzione del problema richiede alcune tecniche di trigonometria e calcolo integrale, ma è possibile mostrare che se l'ago è lungo la metà della larghezza dei listelli, allora la probabilità è $\dfrac{1}{\pi}$.

## Problema della moneta di Buffon

Lasciamo cadere una moneta di raggio $r$ su un pavimento formato da piastrelle quadrate di lato $\ell$. Qual è la probabilità che la moneta tocchi una linea di giunzione tra due piastrelle?

In ciascuna piastrella la situazione è la seguente:

i "casi favorevoli" sono tutti i punti della zona verde, che distano al più $r$ dai lati della piastrella;
i "casi sfavorevoli" sono tutti i punti del quadrato rosso,
tale quadrato ha lato $\ell - 2\,r$.



La probabilità richiesta è dunque

$$1 - \frac{\text{area "sfavorevole"}}{\text{area "ammissibile"}} = 1 - \frac{(\ell - 2\,r)^2}{\ell^2} = \frac{4\,r\,(\ell - r)}{\ell^2}$$



## Infiniti lanci di monete (1/2)

**Problema**

Lanciamo ripetutamente una moneta equilibrata finché non otteniamo testa.
Qual è la probabilità che tale evento si realizzi dopo un numero pari di lanci?

Sia $T$ il **tempo di attesa del primo successo** (primo lancio in cui otteniamo testa).
È evidente che:

$$\mathbb{P}(T=1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(T=2) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(T=3) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(T=4) = \frac{1}{16} \qquad \dots \qquad \mathbb{P}(T=n) = \frac{1}{2^n}$$

e quindi:

$$\mathbb{P}(T \text{ è pari}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Una somma di infiniti numeri è detta una *serie numerica*.

## Infiniti lanci di monete (2/2)

Per calcolare tale somma infinita osserviamo che:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T=1) &= 2\,\mathbb{P}(T=2) \\ \mathbb{P}(T=3) &= 2\,\mathbb{P}(T=4) \\ \mathbb{P}(T=5) &= 2\,\mathbb{P}(T=6) \\ &\vdots \end{aligned}$$

ovvero: la probabilità che $T$ sia un certo numero dispari è il doppio della probabilità che $T$ sia il numero pari successivo. Quindi

$$\mathbb{P}(T \text{ è dispari}) = 2\,\mathbb{P}(T \text{ è pari})$$

Ora "$T$ è dispari" è l'evento contrario a "$T$ è pari", quindi:

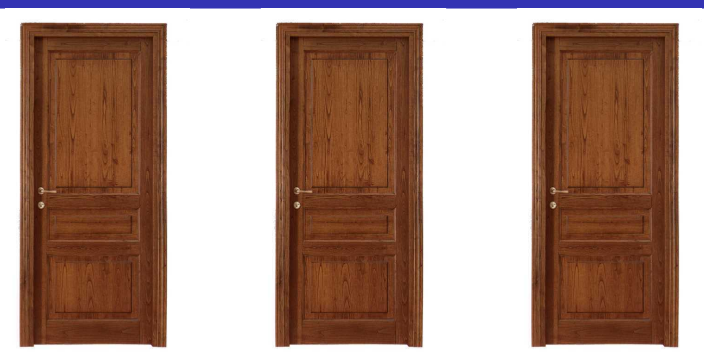
$$\mathbb{P}(T \text{ è dispari}) = 1 - \mathbb{P}(T \text{ è pari})$$

Combinando queste due relazioni otteniamo:

$$\mathbb{P}(T \text{ è pari}) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(T \text{ è dispari}) = \frac{2}{3}$$



## Il problema di Monty Hall.



Nel gioco a premi *Let's Make a Deal* ad un concorrente vengono mostrate tre porte chiuse; dietro ad una porta si trova un'automobile, mentre ciascuna delle altre due nasconde una capra.

*Monty Hall*, il conduttore (che conosce ciò che si trova dietro ogni porta), chiede al concorrente di scegliere una delle porte, dopo di che apre una delle altre due, rivelando una delle due capre, e offre al giocatore la possibilità di cambiare la propria scelta iniziale, passando all'unica porta restante.

**Cambiare porta aumenta la probabilità di vincere l'automobile?**