

ESERCITAZIONI

VETTORI

Esercizio 1

Dati i due vettori scritti in forma cartesiana

$$\mathbf{a} = 4.0 \mathbf{i} - 3.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 6.0 \mathbf{i} + 8.0 \mathbf{j}$$

determinare:

- 1) modulo e direzione di \mathbf{a} (rispetto ad \mathbf{i});
- 2) modulo e direzione di \mathbf{b} ;
- 3) modulo e direzione di $\mathbf{a}+\mathbf{b}$;
- 4) modulo e direzione di $\mathbf{b}-\mathbf{a}$;
- 5) modulo e direzione di $\mathbf{a}-\mathbf{b}$;
- 6) l'angolo fra la direzione di $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}-\mathbf{b}$

Esercizio 1: Risposta ad 1) e 2)

$$\mathbf{a} = 4.0 \mathbf{i} - 3.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 6.0 \mathbf{i} + 8.0 \mathbf{j}$$

Modulo e direzione
di \mathbf{a} e \mathbf{b} rispetto ad \mathbf{i} ?



Vuol dire direzione rispetto all'asse X

Modulo di \mathbf{a}

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(4.0)^2 + (-3.0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.0$$

Direzione di \mathbf{a}

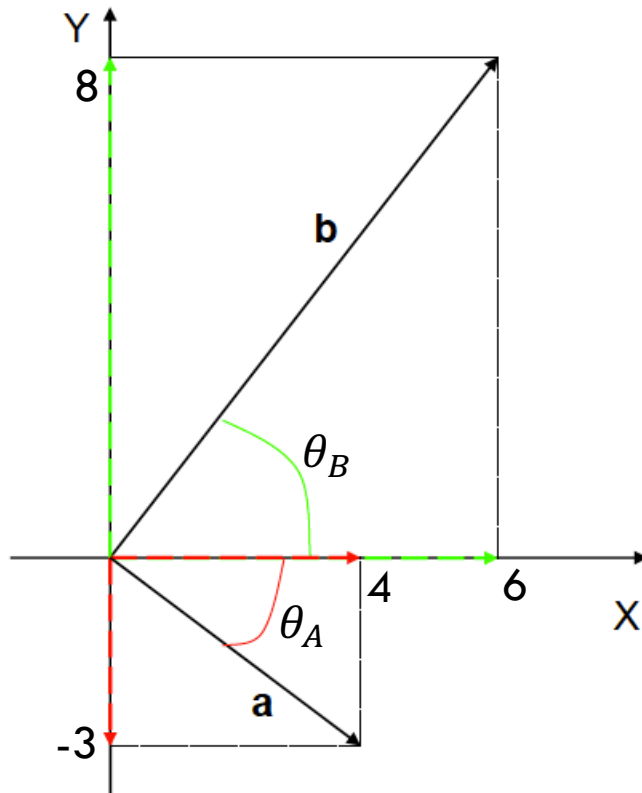
Caso 1° - 4°
quadrante $\theta_A = \arctg(-3/4) = -36.9^\circ$

Modulo di \mathbf{b}

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(6.0)^2 + (8.0)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.0$$

Direzione di \mathbf{b}

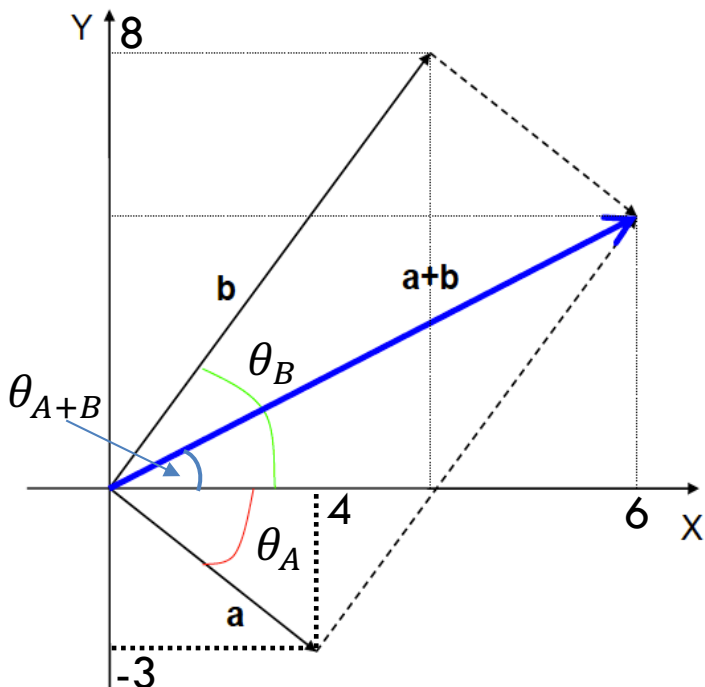
Caso 1° - 4°
quadrante $\theta_B = \arctg(8/6) = 53.1^\circ$



Esercizio 1: Risposta ad 3)

$$\mathbf{a} = 4.0 \mathbf{i} - 3.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 6.0 \mathbf{i} + 8.0 \mathbf{j}$$



Modulo e direzione
di $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ rispetto ad \mathbf{i} ?



Vuol dire direzione rispetto all'asse X

Il vettore somma avrà forma data dalla
somma delle componenti

$$\begin{aligned} \mathbf{a+b} &= (4.0+6.0) \mathbf{i} + (-3.0 + 8.0) \mathbf{j} \\ &= 10.0 \mathbf{i} + 5.0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

Modulo di $\mathbf{a+b}$

$$|\mathbf{a+b}| = \sqrt{(10.0)^2 + (5.0)^2} = \sqrt{125} = 11.2$$

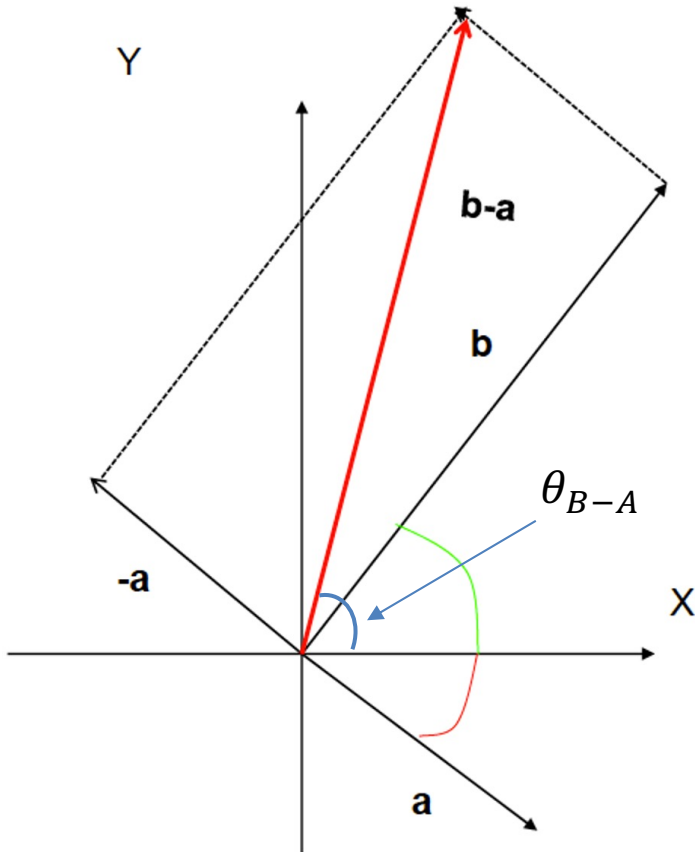
Direzione di $\mathbf{a+b}$

Caso 1° - 4°
quadrante $\theta_{A+B} = \text{arctg}(5.0/10.0) = 26.6^\circ$

Esercizio 1: Risposta ad 4)

$$\mathbf{a} = 4.0 \mathbf{i} - 3.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 6.0 \mathbf{i} + 8.0 \mathbf{j}$$



Modulo e direzione
di $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ rispetto ad \mathbf{i} ?



Vuol dire direzione rispetto all'asse X

Il vettore differenza avrà forma data dalla
differenza delle componenti

$$\begin{aligned}\mathbf{b}-\mathbf{a} &= (6.0-4.0) \mathbf{i} + (8.0 - (-3.0)) \mathbf{j} \\ &= 2.0 \mathbf{i} + 11.0 \mathbf{j}\end{aligned}$$

Modulo di $\mathbf{b}-\mathbf{a}$

$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}| = \sqrt{(2.0)^2 + (11.0)^2} = \sqrt{125} = 11.2$$

Direzione di $\mathbf{b}-\mathbf{a}$

Caso 1° - 4°
quadrante $\theta_{A+B} = \text{arctg}(11.0/2.0) = 79.7^\circ$

Esercizio 1: Risposta a 5)

$$\mathbf{a} = 4.0 \mathbf{i} - 3.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 6.0 \mathbf{i} + 8.0 \mathbf{j}$$

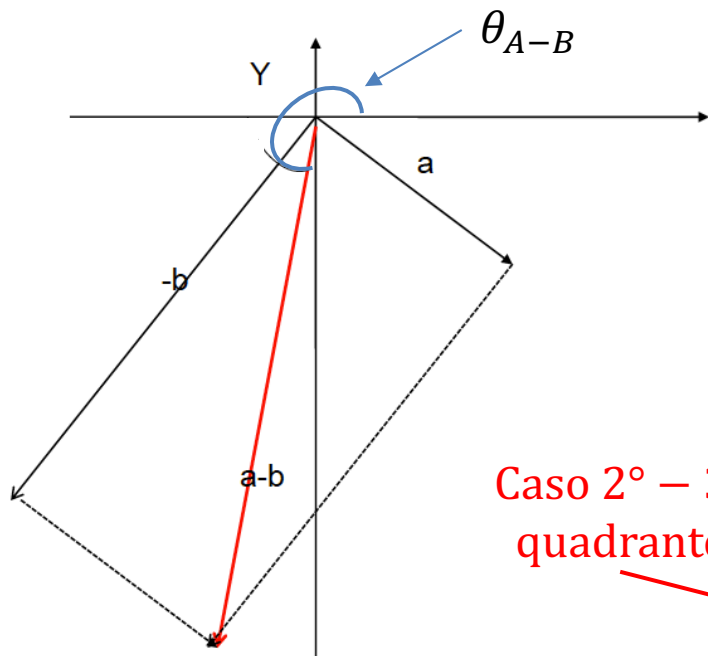
Modulo e direzione
di $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ rispetto ad \mathbf{i} ?



Vuol dire direzione rispetto all'asse X

Il vettore differenza avrà forma data dalla
differenza delle componenti

$$\begin{aligned}\mathbf{a} - \mathbf{b} &= (4.0 - 6.0) \mathbf{i} + (-3.0 - 8.0) \mathbf{j} \\ &= -2.0 \mathbf{i} - 11.0 \mathbf{j}\end{aligned}$$



**Caso 2° - 3°
quadrante**

Modulo di $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(-2.0)^2 + (-11.0)^2} = \sqrt{125} = 11.2$$

Direzione di $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

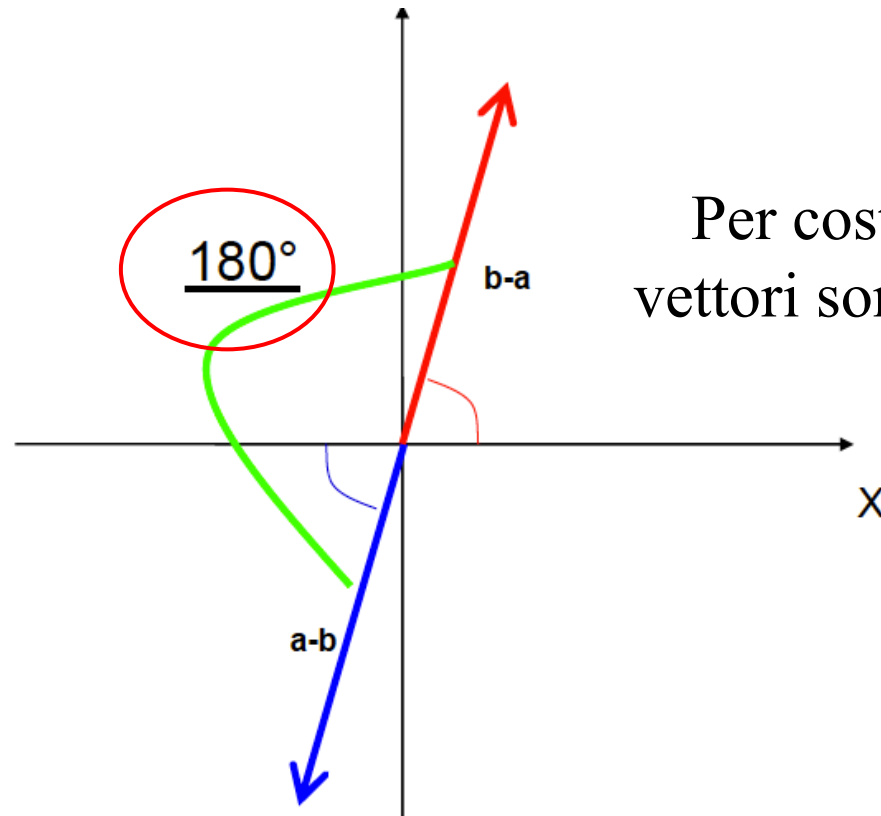
$$\theta_{A-B} = 180^\circ + \arctg(-11.0 / -2.0) = 259.7^\circ$$

Esercizio 1: Risposta a 6)

$$\mathbf{b-a} = 2.0 \mathbf{i} + 11.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a-b} = -2.0 \mathbf{i} - 11.0 \mathbf{j}$$

Angolo tra $\mathbf{b-a}$ e $\mathbf{a-b}$?



Per costruzione i
vettori sono opposti !

Esercizio 2

Un uomo parte dalla posizione A, cammina per 2.0 Km verso Nord, 9.0 Km verso Est fino a C ed infine percorre un tratto di lunghezza e direzione sconosciute fino a pervenire in un punto D, posto a 10 Km a Sud del punto di partenza A. Determinare

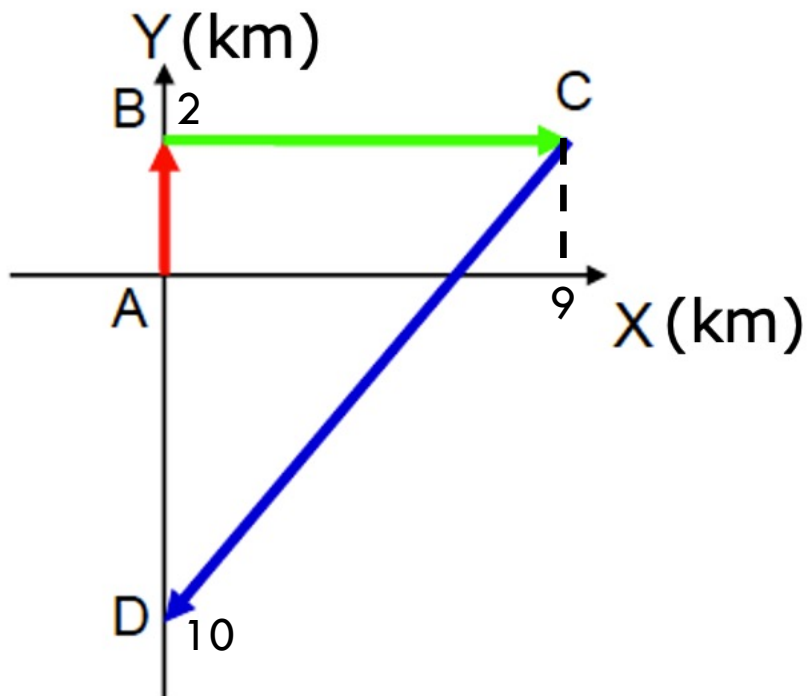
lo spostamento da C a D

lo spostamento totale

lo spazio complessivamente percorso.

Esercizio 2: Parte 0

- 2 km verso Nord
- 9 km verso Est
- D è 10 km a Sud di A



Rappresentazione grafica

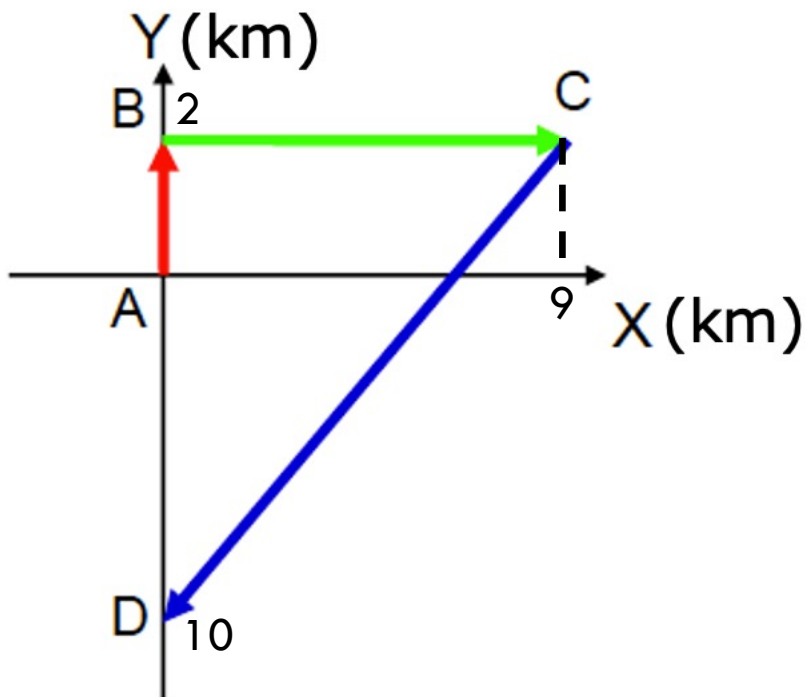
Per visualizzare il problema, conviene **sempre** ricorrere a una rappresentazione grafica (quando possibile)



La scelta dell'origine del sistema di assi cartesiani è totalmente arbitraria. Per convenienza, scegliamo il punto iniziale A

Esercizio 2: Parte 1

- 2 km verso Nord
- 9 km verso Est
- D è 10 km a Sud di A



Spostamento da C a D

Osserviamo che CD è ipotenusa di un triangolo rettangolo

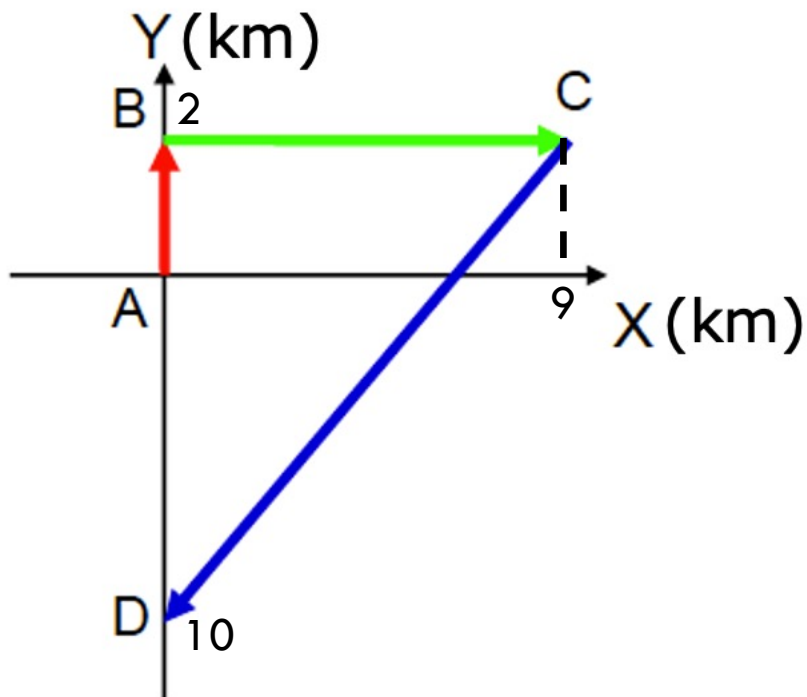


Usiamo teorema di Pitagora

$$CD = \sqrt{(AD + AB)^2 + BC^2} = \sqrt{(2 + 10)^2 + 9^2} = 15 \text{ km}$$

Esercizio 2: Parte 2

- 2 km verso Nord
- 9 km verso Est
- D è 10 km a Sud di A



Spostamento TOTALE

Minima distanza tra punto di partenza e punto di arrivo

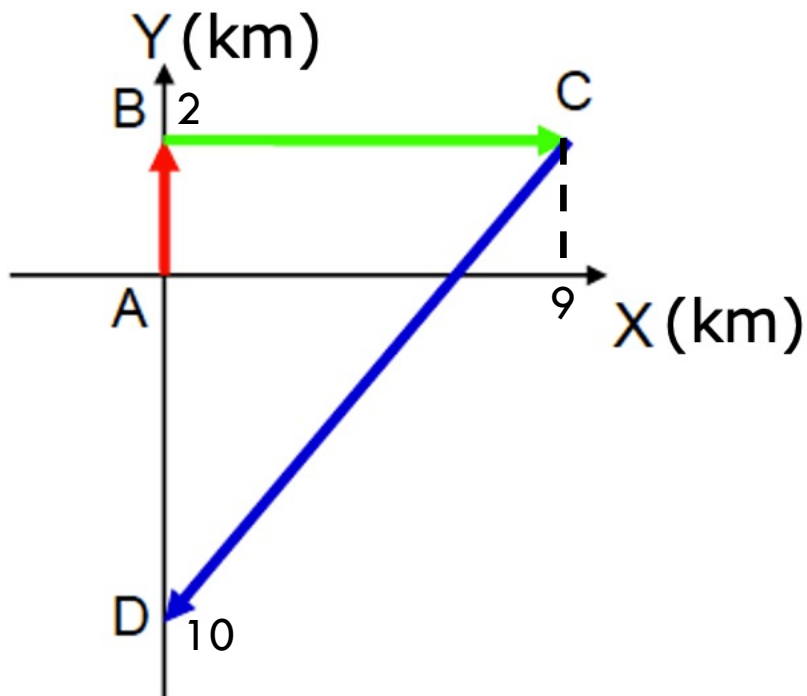


Lunghezza segmento AD

$$AD = 10 \text{ km}$$

Esercizio 2: Parte 3

- 2 km verso Nord
- 9 km verso Est
- D è 10 km a Sud di A



Spazio complessivamente percorso

Somma delle lunghezze (moduli dei singoli vettori spostamento)



$$AB + BC + CD = 2 + 9 + 15 = 26 \text{ km}$$

Nota: Spostamento e spazio totale percorsi sono diversi

Esercizio 3

Dati i due vettori scritti in forma cartesiana

$$\mathbf{a} = 4.0 \mathbf{i} - 3.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 6.0 \mathbf{i} + 8.0 \mathbf{j}$$

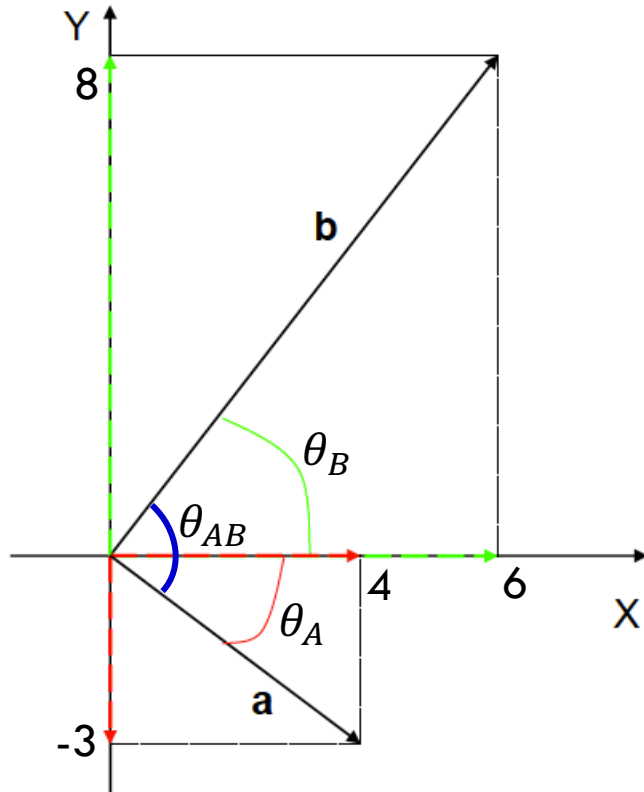
determinare:

- 1) Il prodotto scalare di \mathbf{a} e \mathbf{b} ;
- 2) Il prodotto vettoriale di \mathbf{a} e \mathbf{b}

Esercizio 3: Parte 1

$$\mathbf{a} = 4.0 \mathbf{i} - 3.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 6.0 \mathbf{i} + 8.0 \mathbf{j}$$



Prodotto scalare di \mathbf{a} e \mathbf{b}

Metodo 1: definizione

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \cos(\theta_{AB}) = 5 * 10 * \cos(90^\circ) = 0$$

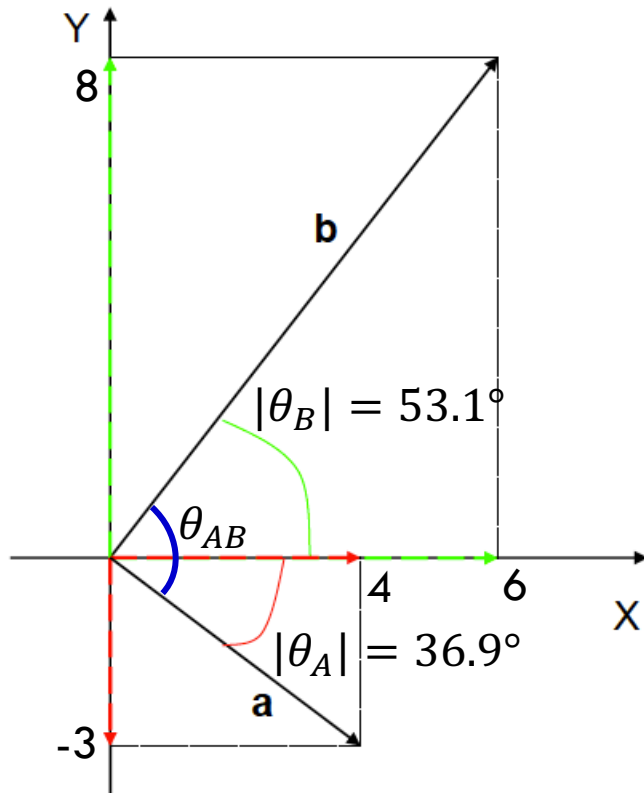
Metodo 2: usando le componenti

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 * 6 + (-3) * 8 = 24 - 24 = 0$$

Esercizio 3: Parte 2

$$\mathbf{a} = 4.0 \mathbf{i} - 3.0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 6.0 \mathbf{i} + 8.0 \mathbf{j}$$



Prodotto scalare di \mathbf{a} e \mathbf{b}

Metodo 1: definizione

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \cos(\theta_{AB}) = 5 * 10 * \cos(90^\circ) = 0$$

Metodo 2: usando le componenti

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 * 6 + (-3) * 8 = 24 - 24 = 0$$

Prodotto vettoriale di \mathbf{a} e \mathbf{b}

Modulo

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \sin(\theta_{AB}) = 5 * 10 * \sin(90^\circ) = 50$$

Direzione

Perpendicolare al piano dello schermo (asse Z)

Verso

Regola mano destra: Uscente

Quindi: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 50 \mathbf{k}$ (lungo asse Z)

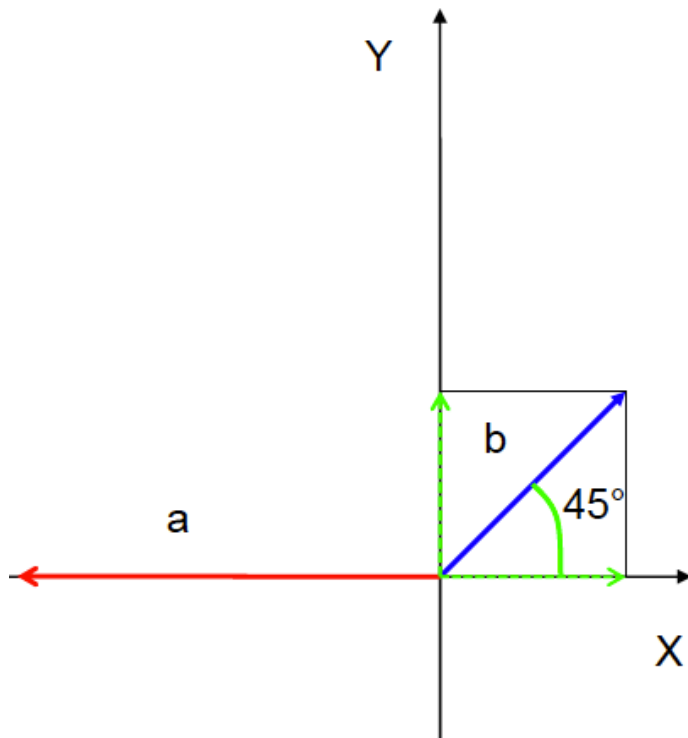
Esercizio 4

- Il vettore **a** ha modulo 8.08 e punta verso l'asse x negativo. Il vettore **b** ha modulo 4.51 e punta a $+45^\circ$ rispetto all'asse x positivo.
 - Determinare le componenti x ed y di ciascun vettore.
 - La somma dei 2 vettori in modulo, direzione e verso;
 - Il prodotto scalare ed il prodotto vettoriale.

Esercizio 4: Parte 1

$$|\mathbf{a}| = 8.08, \theta_a = 180^\circ$$

$$|\mathbf{b}| = 4.51, \theta_b = 45^\circ$$



Componenti X e Y di \mathbf{a} e \mathbf{b}

a

Componente X di \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}_x = |\mathbf{a}| * \cos(180^\circ) = 8.08 * (-1) = -8.08$$

Componente Y di \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}_y = |\mathbf{a}| * \sin(180^\circ) = 8.08 * (0) = 0$$

Allora: $\mathbf{a} = -8.08 \mathbf{i}$

b

Componente X di \mathbf{b} :

$$\mathbf{b}_x = |\mathbf{b}| * \cos(45^\circ) = 4.51 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.19$$

Componente Y di \mathbf{b} :

$$\mathbf{b}_y = |\mathbf{b}| * \sin(45^\circ) = 4.51 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.19$$

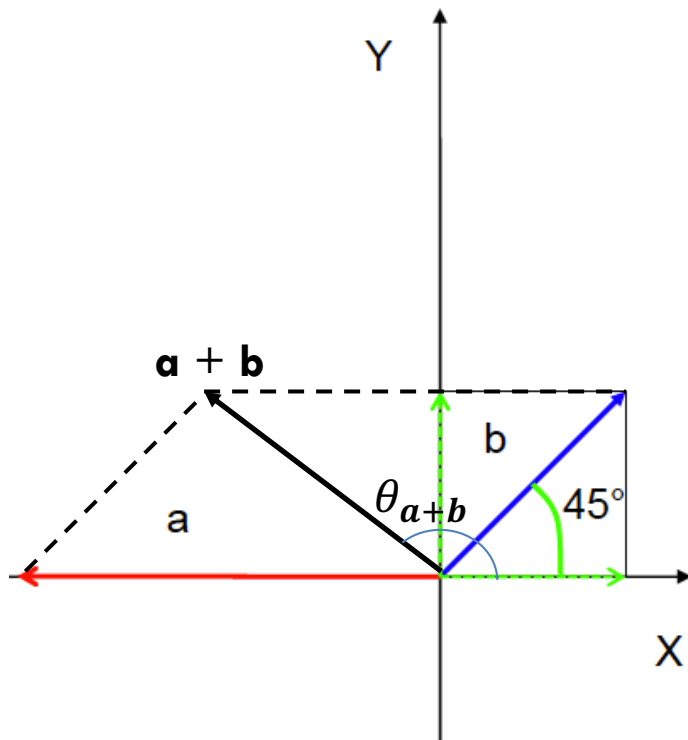
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

Allora: $\mathbf{b} = 3.19 \mathbf{i} + 3.19 \mathbf{j}$

Esercizio 4: Parte 2

$$|\mathbf{a}| = 8.08, \theta_a = 180^\circ$$

$$|\mathbf{b}| = 4.51, \theta_b = 45^\circ$$



Somma di \mathbf{a} e \mathbf{b} in direzione e verso

Abbiamo trovato:

$$\mathbf{a} = -8.08 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{b} = 3.19 \mathbf{i} + 3.19 \mathbf{j}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (-8.08 + 3.19) \mathbf{i} + 3.19 \mathbf{j} = \\ &= -4.89 \mathbf{i} + 3.19 \mathbf{j} \end{aligned}$$

Modulo

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{(-4.89)^2 + 3.19^2} = 5.83$$

Direzione/Verso

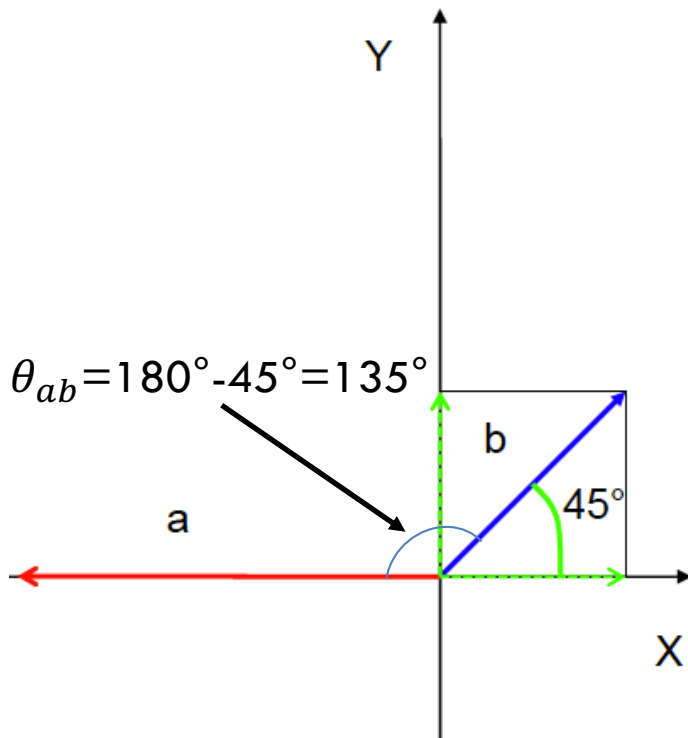
Caso 2° - 3° quadrante

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} &= 180^\circ + \text{atan}\left(\frac{3.19}{-4.89}\right) = 180^\circ - 33.12^\circ = \\ &= 146.88^\circ \end{aligned}$$

Esercizio 4: Parte 3

$$|\mathbf{a}| = 8.08, \theta_a = 180^\circ$$

$$|\mathbf{b}| = 4.51, \theta_b = 45^\circ$$



Prodotto scalare e vettoriale di \mathbf{a} e \mathbf{b}

Abbiamo trovato:

$$\mathbf{a} = -8.08 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{b} = 3.19 \mathbf{i} + 3.19 \mathbf{j}$$

Prodotto scalare

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta_{ab}) =$$
$$8.08 * 4.51 * \cos(135^\circ) = -25.77$$

Prodotto vettoriale

$$\text{Modulo: } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\theta_{ab}) = 25.77$$

Direzione/verso: Regola della mano destra, direzione perpendicolare al foglio, verso entrante