EQUAZIONI

Lezione 1
15/03/23

Indentità: è un'uguaglianza dove compaiono espressioni letterali verificata per qualunque valore venga attribuito alle lettere nell'espressione

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

è vera qualunque siano $a, b \in \mathbb{R}$

Equazione: è un'uguaglianza tra 2 espressioni letterali per le quali si cercano i valori da attribuire ad una o più lettere che rendano vera l'uguaglianza

Esempio: $3x + 5 = x - 3 \quad (1)$

$x = -4$ rende sempre vera (1)

SOLUZIONE

INCOGNITA

FORMA NORMALE o FORMA CANONICA

$$P(x) = 0$$

- INTERE

$$\frac{x}{2} = 1 + 7x$$

- FRATTE

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$$

IRRAZIONALI:

$$\sqrt[3]{x^2-4} = x+5$$

ESPONENZIALI $e^x + 3 = e^{2x}$

LOGARITMICHE $\log(x) = 3$

$$\underbrace{x > 0}$$
CONDIZIONE
DI ESISTENZA

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

$4x - 2 = 10$ e $4x = 12$

proprietà del trasporto

$$A(x) + a = B(x)$$

$$A(x) = B(x) - a$$

proprietà di cancellazione

$$A(x) + \cancel{a} = B(x) + \cancel{a}$$

II principio di equivalenza

$$\frac{2}{3}x = 4$$

$$x = \frac{\cancel{4}\,3}{\cancel{2}} = 6 \Rightarrow x = 6$$

$3x + 6 = 33$

$MCD(3, 6, 33) = 3$

$x + 2 = 11$

$x = 9$

$$\frac{5}{2}x = \frac{x}{1} + \frac{8}{3}$$

$mcm(2, 1, 3) = 6$

$$\frac{15x}{\cancel{6}} = \frac{6x + 16}{\cancel{6}}$$

$15x = 6x + 16$

CAMBIAMENTO DEL SEGNO

$A(x) = B(x) \iff -A(x) = -B(x)$

Equazioni numeriche intere

FORMA CANONICA: $ax + b = 0$

$b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$a \neq 0 \quad \frac{ax}{a} \neq \frac{-b}{a} \rightarrow x = -\frac{b}{a}$

$$a = 0 \begin{cases} b = 0 & \text{INDETERMINATA} \\ b \neq 0 & \text{IMPOSSIBILE} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$b, c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta < 0$ non ci sono soluzioni reali

Equazioni fratte : $\frac{N(x)}{D(x)} = 0$

CONDIZIONE DI ESISTENZA : $D(x) \neq 0$

esempio : $\frac{x}{x+5} = \frac{x+1}{x}$

C.E : $\begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{\cancel{x(x+5)}} = \frac{(x+1)(x+5)}{\cancel{x(x+5)}}$$

$$x^2 = (x+1)(x+5)$$

$$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 5x + x + 5$$

$$\frac{-6x}{-6} = \frac{5}{-6} \Rightarrow x = -\frac{5}{6}$$

Equazioni IRRAZIONALI

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad (2)$$

$n \in \mathbb{N}$

n dispari (2) è equivalente

a risolvere $A(x) = [B(x)]^n$

n è pari

$$\left\{\begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{array}\right.$$

esempio:

- $\sqrt[3]{x^3 - 3x} = x - 1$

$$x^3 - 3x = (x-1)^3$$

$$\cancel{x^3} - 3x = \cancel{x^3} - 3x^2 + 3x - 1$$

$$-3x+3x^2-3x+1=0$$

$$3x^2-6x+1=0$$

$$\Delta=(-6)^2-4(3)(1)=$$

$$=36-12=24$$

$$x_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{24}}{6}=$$

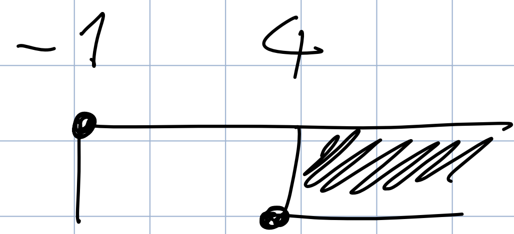
$$\frac{6\pm2\sqrt{6}}{6}=\frac{2(3\pm\sqrt{6})}{6}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{6}}{}$$

- $\sqrt{x+1}=x-4$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x+1 = (x-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 4 \\ x+1 = (x-4)^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x+1 = (x-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x+1 = x^2 - 8x + 16 \end{cases}$$

$$x+1 = x^2 - 8x + 16$$

$$x+1 - x^2 + 8x - 16 = 0$$

$$-x^2 + 9x - 15 = 0$$

$$x^2 - 9x + 15 = 0$$

$$\delta = 9^2 - 4(1)(15) =$$

$$= 81 - 60 = 21$$

$$x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{21}}{2}$$ non è accettabile

$$x_2 = \frac{-9 + \sqrt{21}}{2}$$ non è accettabile

IMPOSSIBILE

Equazioni logaritmiche

$$\log_a (A(x)) = B(x)$$

$0 < a < 1 \ \vee \ a > 1$

$A(x) > 0$ Condizione di esistenza

- $\log_a (A(x)) = k \qquad k \in \mathbb{R}$

C. E. : $A(x) > 0$

$$A(x) = a^k$$

- $\log_a (A(x)) = \log_a (B(x))$

$$\text{C.E.} \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

$$A(x) = B(x)$$

esempio: • $\log_2 (x+5) = 2$

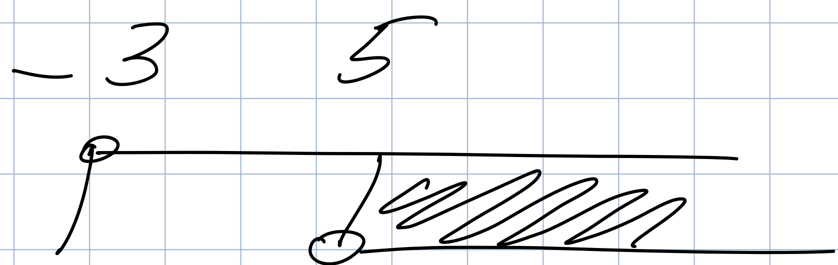
C.E: $x+5>0 \rightarrow x>-5$

$$x+5 = 2^2$$

$$x+5 = 4 \rightarrow x = -1$$

• $\log_2 (x+3) = \log_2 (x-5) + \underline{4}$

C.E: $\begin{cases} x+3>0 \\ x-5>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3 \\ x>5 \end{cases}$



$x>5$

$$\log_2(x+3) = \log_2(x-5) + 4$$

$$4 = 4 \cdot 1 = 4\log_2 2 = \log_2 2^4$$

$$\log_2(x+3) = \log_2(x-5) + \log_2 2^4$$

$$\log_2(x+3) = \log_2(x-5) + \log_2 16$$

$$\log_2(x+3) = \log_2 16(x-5)$$

$$x+3 = 16(x-5)$$

$$x+3 = 16x - 80$$

$$x - 16x = -3 - 80$$

$$-15x = -83$$

$$\frac{\cancel{15}x}{\cancel{15}} = \frac{83}{15}$$

$$x = \frac{83}{15} \quad \text{accettabile}$$

Lezione 2
16/03/23

DISEQUAZIONI

$\downarrow$

Sono disuguaglianze in cui compaiono espressioni letterali per le quali cerchiamo i valori di una o più lettere che la rendono vera

$a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$\underbrace{[a, b]}_{\text{chiuso}} \quad , \quad \underbrace{]a, b[}_{\text{aperto}} \quad \Bigg\} \text{ intervallo limitato}$$

$a \leq x \leq b$ $\qquad$ $a < x < b$

ILLIMITATO : $]-\infty, a[\quad]-\infty, a]$

$]b, +\infty[\ , [b, +\infty[$

$x \leq a \qquad x < a$

$x \geq b \qquad x > b$

$\mathbb{R} :=]-\infty, +\infty[$

FORMA CANONICA O FORMA NORMALE

$$A(x) \gtreqless 0$$

DISEQUAZIONI NUMERICHE INTERE

$$ax + b \gtreqless 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Se $a \neq 0$ $\qquad x \gtrless -\dfrac{b}{a}$ SOLUZIONE

Se $a = 0$
con $>(\geq)$ $\begin{cases} b > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ b < 0 & \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Se $a = 0$
$<(\leq)$: $\begin{cases} b > 0 & \nexists x \in \mathbb{R} \\ b < 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

DISEQUAZIONI FRATTE

$$\frac{N(x)}{D(x)} \gtrless 0$$

C.E. : $D(x) \neq 0$

Si impone $N(x) \geq (>) \, 0$
$D(x) > 0$

Esempio $$\frac{3x-3}{2x+5} \geq \frac{4-x}{x+5}$$

C.E: $2x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5/2$

$x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$

$$\frac{3x-3}{2x+5} - \frac{4-x}{x+5} \geq 0$$

$$\frac{(3x-3)(x+5)-(4-x)(2x+5)}{(2x+5)(x+5)} \geq 0$$

$$\frac{3x^2+15x-3x-15-(8x+20-2x^2-5x)}{(2x+5)(x+5)} \geq 0$$

$$\frac{3x^2+15x-3x-15-8x-20+2x^2+5x}{(2x+5)(x+5)} \geq 0$$

$$\frac{5x^2+9x-35}{(2x+5)(x+5)} \geq 0$$

$N(x) \geq 0 \;:\; 5x^2+9x-35 \geq 0$

$$\Delta = 9^2 - 4(5)(-35) =$$

$$= 81 + 700 = 781 > 0$$

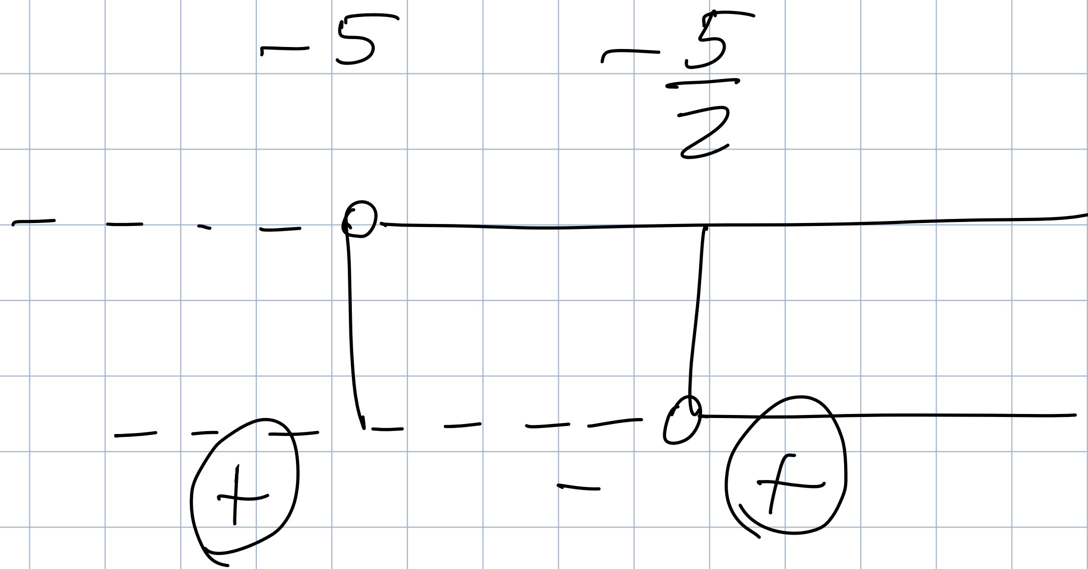
$$x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{781}}{10}$$

$$x \leq \frac{-9-\sqrt{781}}{10} \approx -3{,}694 \;\vee\; x \geq \frac{-9+\sqrt{781}}{10} \approx 1{,}894$$

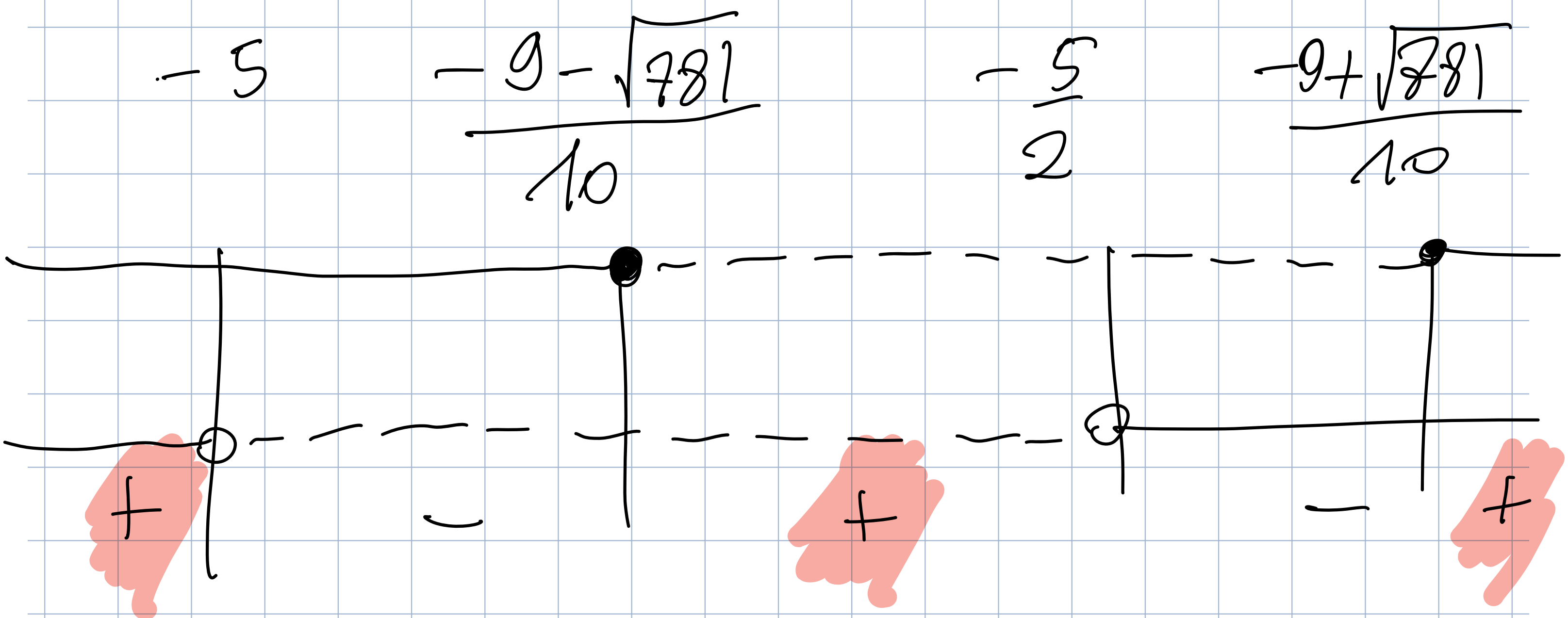
$D(x) > 0 \;:\; (2x+5)(x+5) > 0$

$$2x+5 > 0 \Longrightarrow x > -5/2$$

$$x+5 > 0 \Longrightarrow x > -5$$



$$x < -5 \quad \vee \quad x > -\frac{5}{2}$$



$$\boxed{x < -5 \quad \vee \quad \frac{-9-\sqrt{781}}{10} \leq x < -\frac{5}{2} \quad \vee \quad x \geq \frac{-9+\sqrt{781}}{10}}$$

DISEQUAZIONI DI II GRADO

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0 \qquad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$
$$b, c \in \mathbb{R}$$

$$ax^2 + bx + c > (\geq 0)$$

$a > 0$ VALORI ESTERNI

$\Delta > 0$

$x < x_1 \vee x > x_2$

$\Downarrow$

x_1, x_2 soluzioni reali e distinte

$a < 0$ VALORI INTERNI

$x_1 < x < x_2$

$\Delta = 0$ $\qquad a(x - x_1)^2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
$x \neq x_1$

$a > 0$

$a < 0$ $\qquad \nexists x \in \mathbb{R}$

$$a(x - x_1)^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Delta = 0 \qquad a(x-x_1)^2 < 0$

$a > 0 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$

$a < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ x \neq x_1$

$a(x-x_1)^2 \leq 0$

$a > 0 \qquad x = x_1$

$a < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0 \qquad ax^2 + bx + c \geq (>) 0$

$a > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$a < 0 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$

$ax^2 + bx + c < (\leq) 0$

$a > 0 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$

$a < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL II

$$P(x) \gtreqless 0$$

esempio: $\underbrace{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}_{P(x)} \geq 0$

$r \in \{\text{i divisori di } 6\} =$

$= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 =$

$= 1 - 2 - 5 + 6 =$

$= -7 + 7 = 0$

Per il teorema del resto $P(x)$ è divisibile per $x - 1$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
1 & & 1 & -1 & -6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & //
\end{array}
$$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 =$$

$$= (x-1)(x^2 - x - 6) \geq 0$$

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

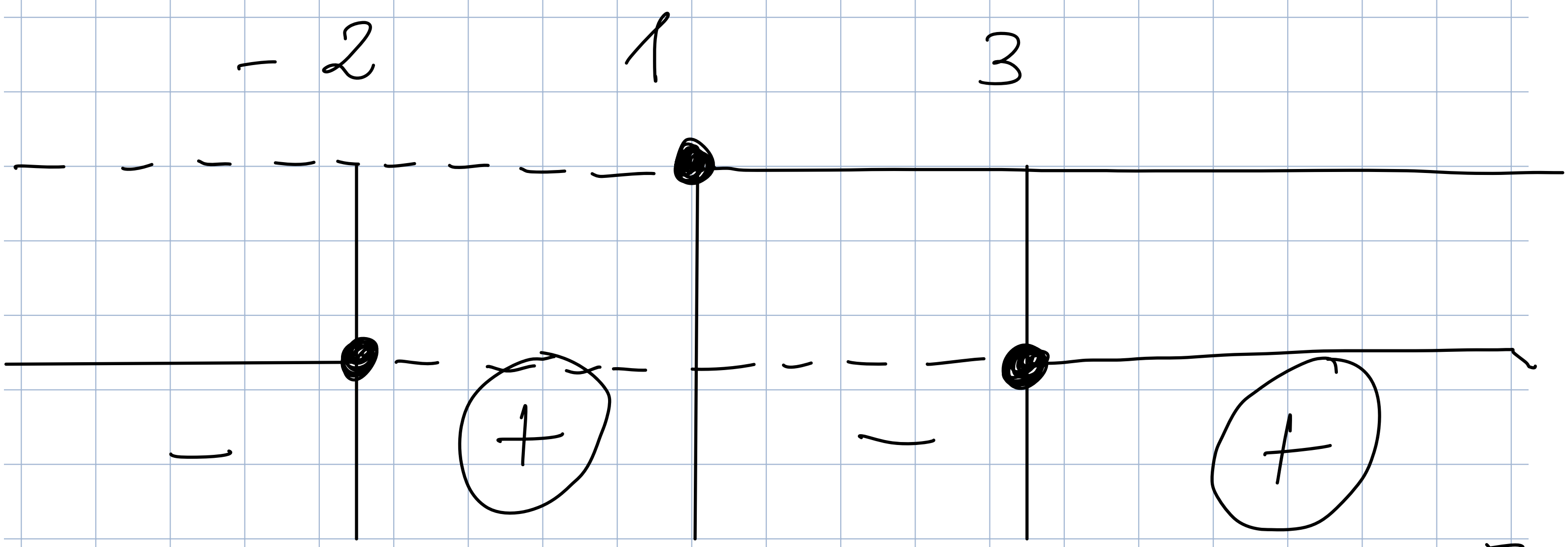
$$x^2 - x - 6 \geq 0 \qquad \text{V.E}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 \geq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \dfrac{1-5}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x \leq -2 \lor x \geq 3$$



$$\boxed{-2 \le x \le 1 \quad \vee \quad x \ge 3}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

forma canonica: $\sqrt[n]{A(x)} \gtrless B(x)$

$n \in N$, $n \geq 2$

n dispari $\sqrt[n]{A(x)} \gtrless B(x)$

è equivalente a risolvere

$$A(x) \gtrless [B(x)]^n$$

n pari ! $\sqrt[n]{A(x)} \underset{(\geq)}{>} B(x)$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \underset{(\geq)}{>} [B(x)]^n \end{cases}$$

n pari $\sqrt[n]{A(x)} \underset{(\leq)}{<} B(x)$ (1)

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \underset{(\leq)}{<} [B(x)]^n \end{cases}$$

$\emptyset$

(1) è equivalente a risolvere

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \underset{(\leq)}{<} [B(x)]^n \end{cases}$$

Esempio

$$\sqrt{x^2+x-2} \geq 2-x$$

$$\text{I} \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ 2-x < 0 \end{cases} \cup \text{II} \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x^2+x-2 \geq (2-x)^2 \end{cases}$$

$$\text{I} \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ 2-x < 0 \end{cases}$$

$x^2 + x - 2 \geq 0$ V.E.

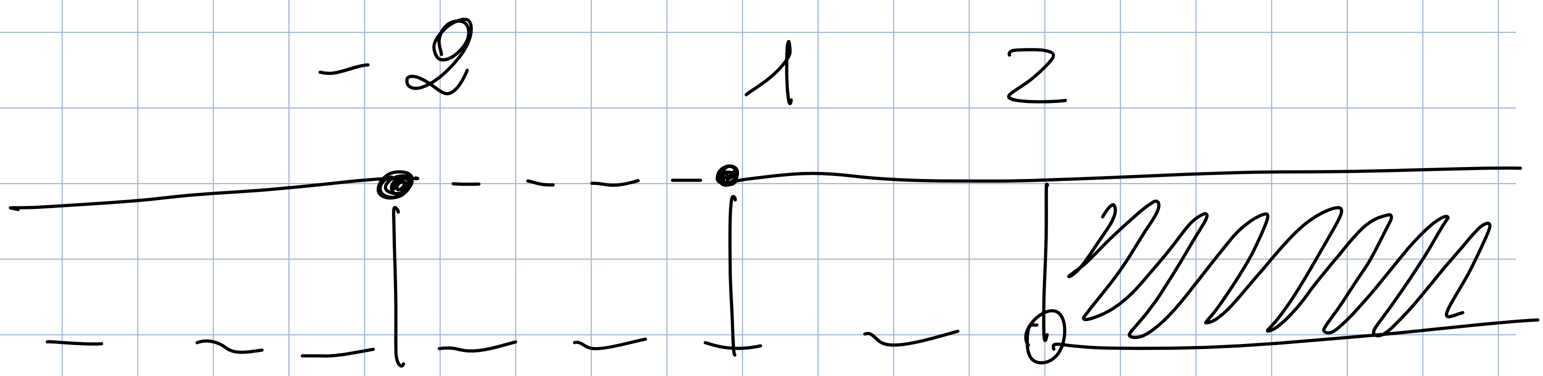
$\Delta = 1 + 8 = 9$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-1-3}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x \leq -2 \vee x \geq 1$

$2 - x < 0 \Rightarrow -x < -2 \Rightarrow x > 2$



$x > 2$

$$\text{II}\quad \begin{cases} x^2+x-2\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \\ x^2+x-2\geq (2-x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq -2 \lor x\geq 1 \\ x\leq 2 \\ x\geq 6/5 \end{cases}$$

$$2-x\geq 0 \to -x\geq -2 \to x\leq 2$$

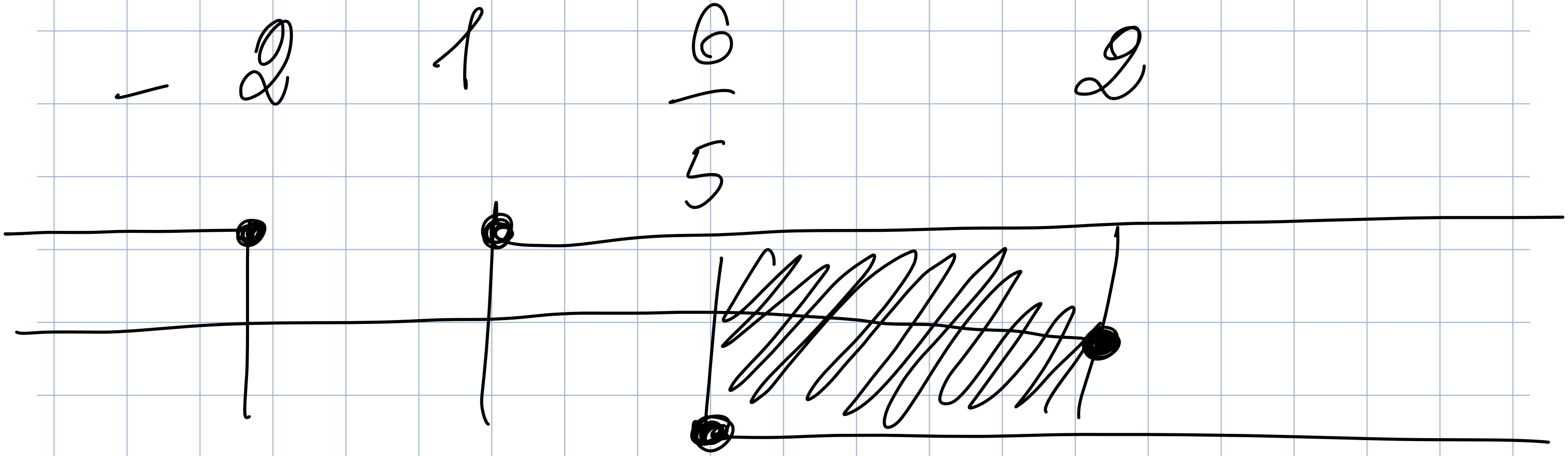
$$x^2+x-2\geq (2-x)^2$$

$$x^2+x-2\geq 4-4x+x^2$$

$$\cancel{x^2}+x+4x-\cancel{x^2}\geq 4+2$$

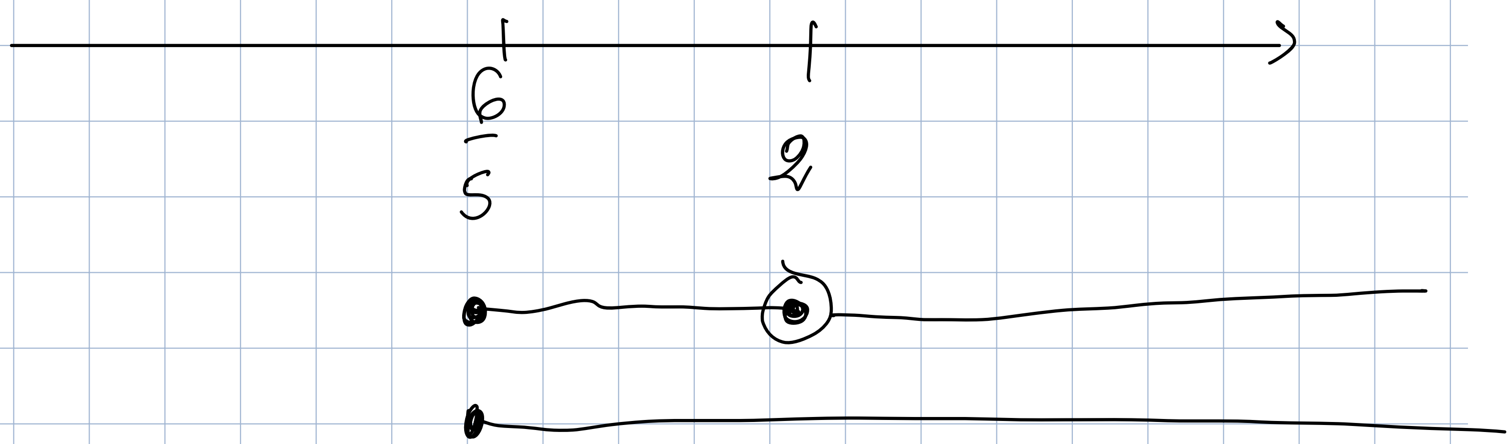
$$5x\geq 6$$

$$x\geq \frac{6}{5}$$



$$\frac{6}{5} \le x \le 2$$

$$x > 2 \quad \cup \quad \frac{6}{5} \le x \le 2$$



$$x \ge \frac{6}{5} \quad \text{con } x \ne 2$$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

$$\log_a (A(x)) \gtrless K$$

$0 < a < 1, \quad a > 1$

$k \in \mathbb{R}$

$a > 1 \quad A(x) \gtrless a^k \quad (1')$

$0 < a < 1 \quad A(x) \lessgtr a^k \quad (2)$

C.E. : $A(x) > 0$

$$\begin{cases} (1') \\ C.E. \end{cases} \qquad \begin{cases} (2) \\ C.E. \end{cases}$$