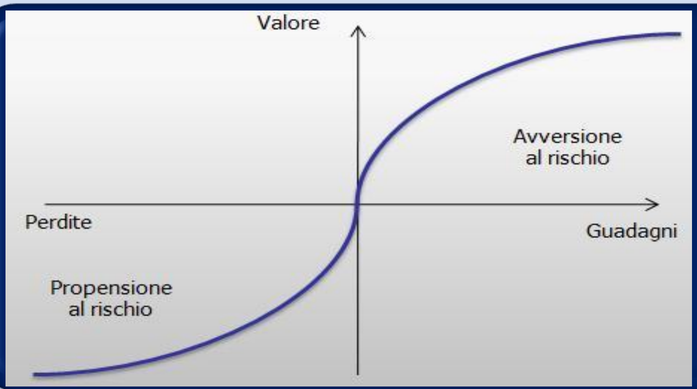
La MATEMATICA alla televisione, sui giornali e sui media

PIL (funzioni di COBB-DOUGLAS)

AD


Volatilità
Mercati finanziari
(Bullish – Bearish)
Derivati finanziari
(titoli rischiosi,opzioni,
forwards,futures, swaps…)

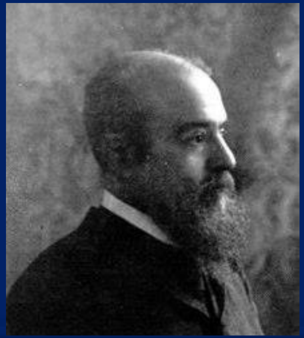
FINANZA CREATIVA



RISCHIO

Avversione/Propensione/

PARETO



UTILITÁ DEL CONSUMATORE

Numero di Nepero o costante di Eulero

Identità di Eulero

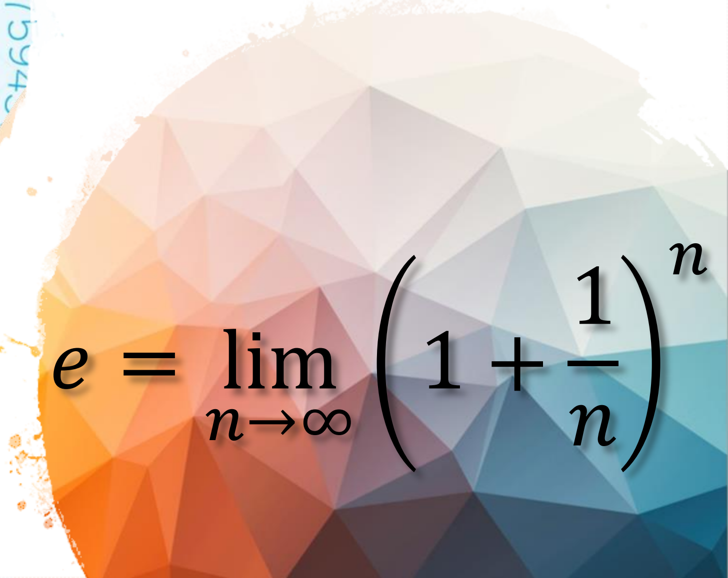
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Significato finanziario

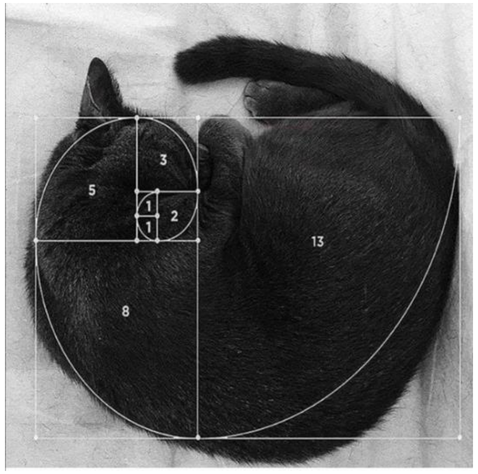
Ai modesti o vanitosi
ai violenti o timorosi
do, cantando gaio ritmo,
logaritmo...

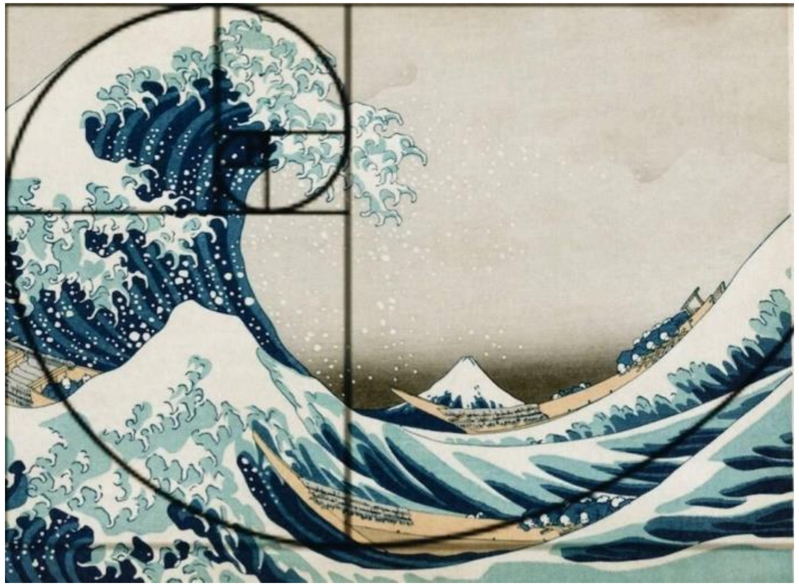
2,718281828459...

Giorgio Rabbeno - 1935



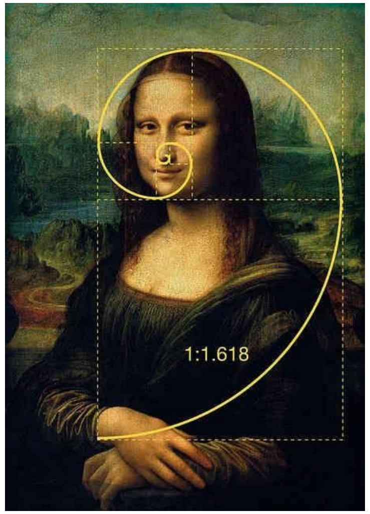
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

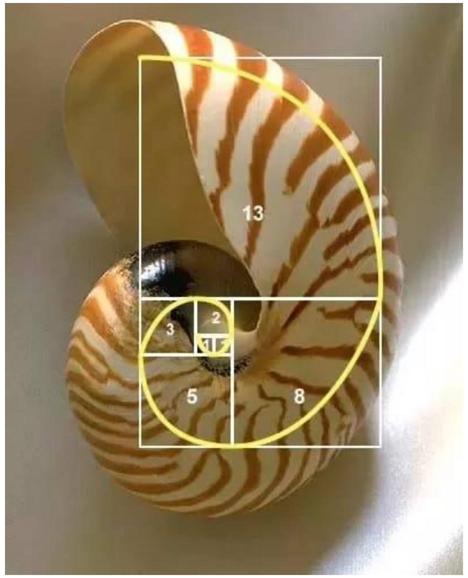




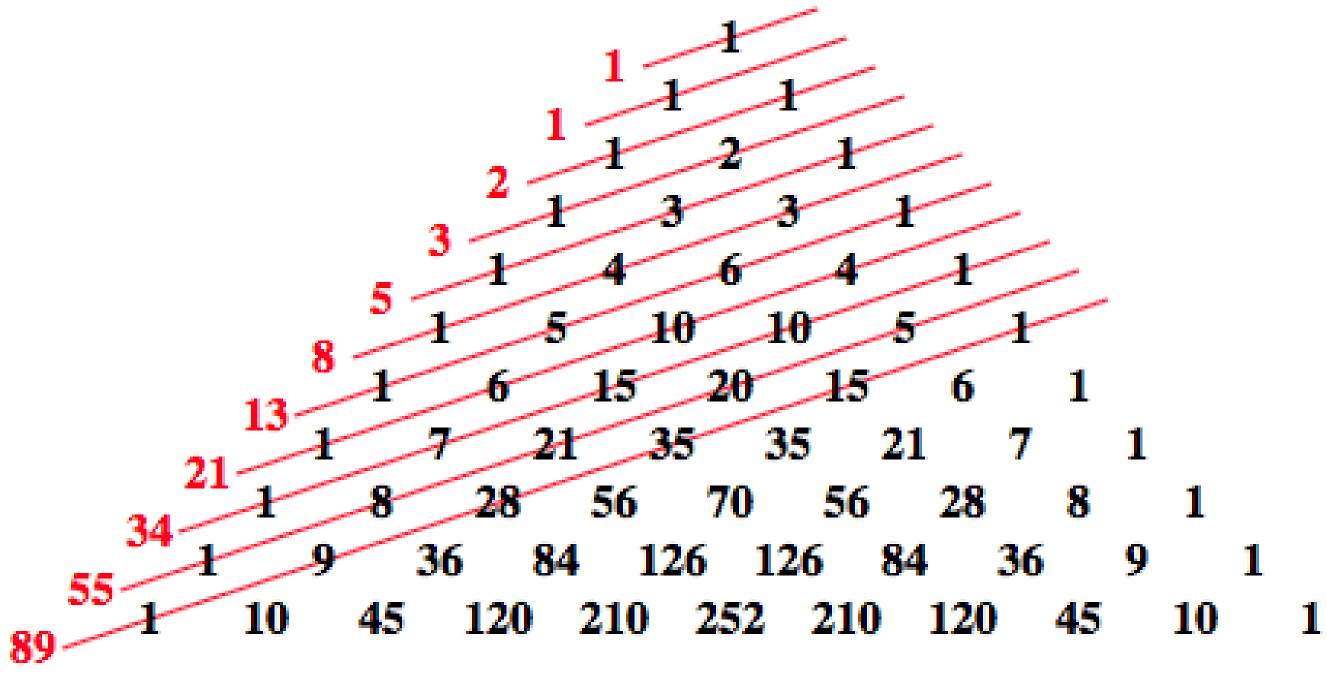
Rapporto aureo o costante di Fidia:

$$\phi = 1,6180339887\ldots$$

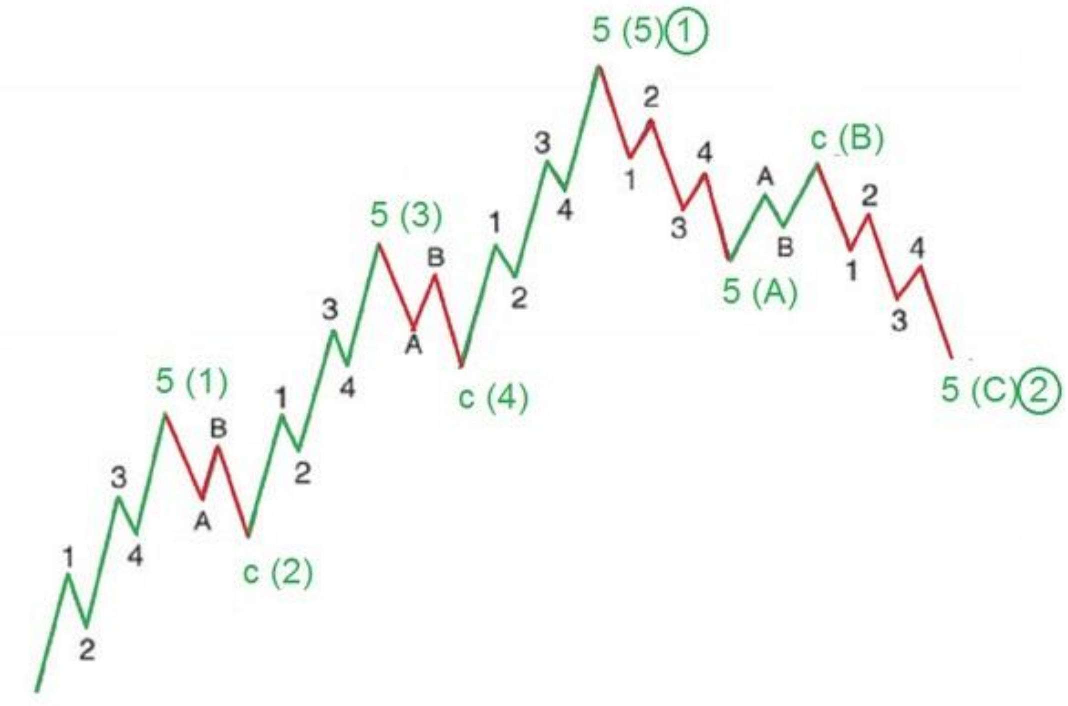


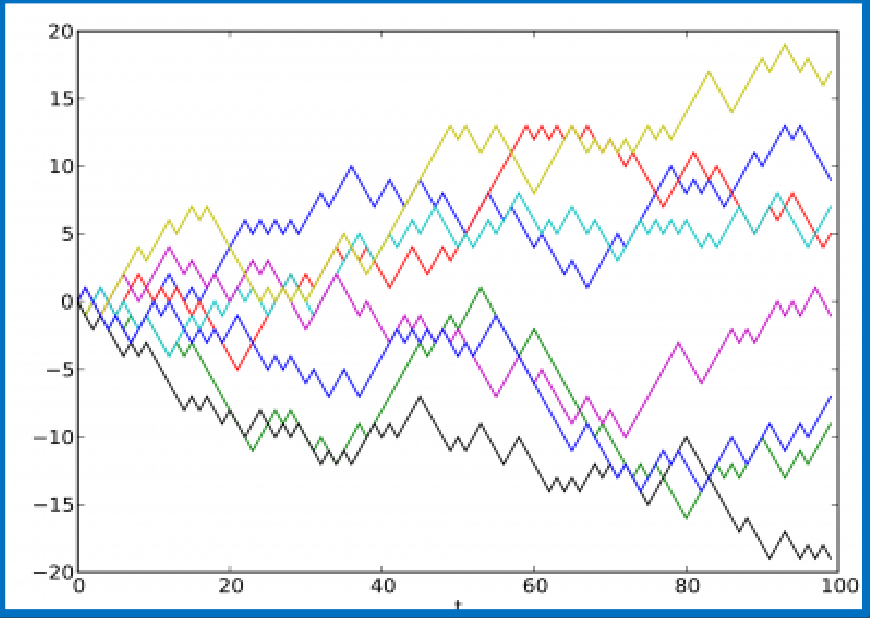


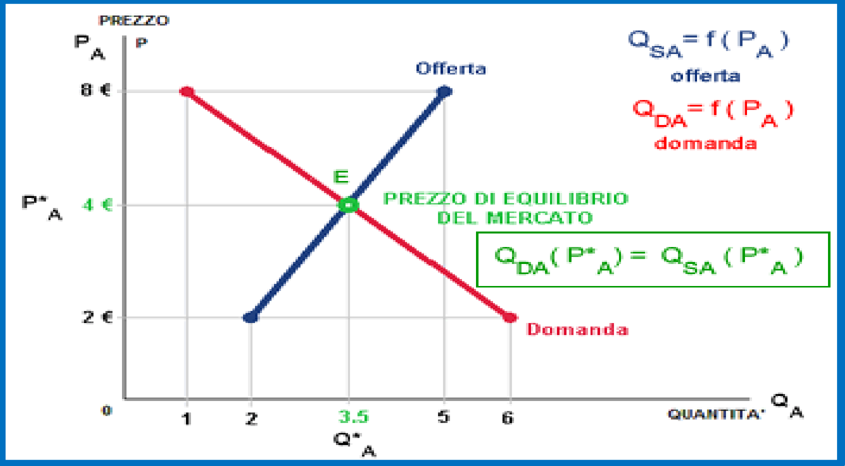
La successione di Fibonacci nel triangolo di Pascal



I numeri di Fibonacci nella teoria delle onde di Elliot







VALUTAZIONE NEUTRALE AL RISCHIO

PROCESSI STOCASTICI E MARTINGALE

EQUILIBRIO DI MERCATO

Metodi di Indagine

Analisi Matematica classica
(caso deterministico)+
Analisi Stocastica
(caso non deterministico)

$$C(S,t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Formula di Black-Scholes-Merton (1973)

Modello SIR (di Kermack e McKendrick, ≃ 1927) in Biomatematica

In questa tipologia di modelli la popolazione viene suddivisa in 3 compartimenti che definiscono una partizione della popolazione presa in esame.
I 3 compartimenti rappresentano le tre possibili situazioni in cui si puó trovare un individuo durante lo studio dell'epidemia. Le situazioni sono:

- *suscettibili*, sono coloro che sono suscettibili all'infezione, cioé che si possono infettare;
- *infetti*, sono coloro che hanno contratto l'infezione
- *rimossi*, sono coloro che hanno giá contratto l'infezione e sono guariti, ottenendo cosí l'immunitá o sono deceduti.

acronimo S.I.R.

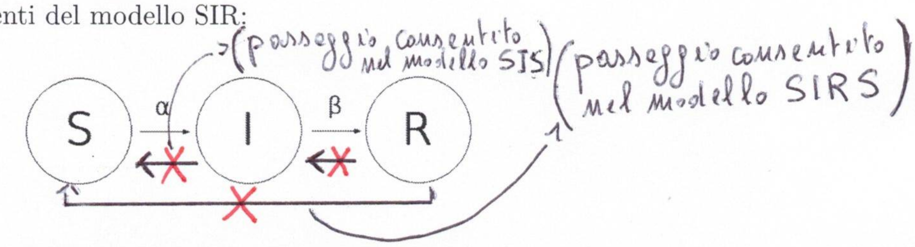
Con immunitá intendiamo che il paziente non potrá piú essere infettato.
Nel modello SIR, l'individuo che entra a far parte del compartimento dei rimossi otterrá una immunitá permanente (in altre tipologie di modelli, come ad esempio il modello SIRS, l'immunitá é temporanea, cioé l'individuo dopo un certo arco di tempo torna ad essere suscettibile all'infezione).
Per una piú semplice comprensione del modello SIR consideriamo le seguenti assunzioni:
(a) il tempo di incubazione dell'infezione sia nullo;
(b) la probabilitá di incontro tra due individui qualsiasi della popolazione

sia uguale;
(c) il contagio avvenga per contatto diretto;
(d) la probabilitá di guarigione sia costante per unitá di tempo.
Indichiamo con N il numero di individui totali della popolazione che supponiamo costante, allora per la definizione di partizione sappiamo che al tempo t avremo:

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad \forall t \tag{3.1}$$

e dunque $\frac{dN(t)}{dt} = 0$.

Riassumendo:
abbiamo assunto che il contagio avvenga per contatto diretto dato che gli incontri tra due qualsiasi individui sono equiprobabili. Il numero dei nuovi contagiati, ed anche di nuovi infettivi, per unitá di tempo sará proporzionale al numero di contatti tra individui nella classe S (suscettibili) ed individui nella classe I (infetti), ossia proporzionale al prodotto SI. D'altra parte, nella stessa unitá di tempo vi saranno degli individui malati e quindi infettivi che guariscono, e per l'ultima assunzione fatta, ció avverrá in proporzione al numero di malati.
Ora siamo in grado di rappresentare graficamente le relazioni che legano i vari compartimenti del modello SIR:



dove α rappresenta la probabilitá che un individuo suscettibile possa infettarsi, β rappresenta la probabilitá che un infetto guarisca e ottenga l'immunitá.
Quindi le equazioni differenziali che caratterizzanto il modello SIR sono:

(derivate temporali)
$$\begin{cases} dS/dt = -\alpha SI < 0 \Rightarrow S(t) \text{ è strettamente decrescente;} \\ dI/dt = \alpha SI - \beta I \gtrless 0 \Leftrightarrow S(t) \gtrless \beta/\alpha \text{ ;} \\ dR/dt = \beta I > 0 \Rightarrow R(t) \text{ è strettamente crescente.} \end{cases} \tag{3.2}$$

con α e β positivi, e con condizioni iniziali $I(0) = I_0$ (esiste nella popolazione un piccolo gruppo di infetti), $R(0) = R_0$ non necessariamente nullo (possibile presenza di individui geneticamente immuni all'infezione), per $S(0)$ sfruttiamo la relazione 3.1 ottenendo $S(0) = S_0 = N - I_0 - R_0$. Come notiamo dalle equazioni 3.2, il numero di suscettibili, infetti e rimossi varia nel tempo e secondo alcuni coefficienti. Nel nostro caso questi coefficienti, nello specifico α e β, sono dei valori costanti, ma questo non sta a significare che non possano assumere valori variabili nel tempo. Questi due coefficienti svolgono un ruolo fondamentale nello studio delle infezioni, ed ora cercheremo di capirne il motivo.

Modello SIR stocastico

Parametri fondamentali per il controllo di un'epidemia

Parliamo di epidemia quando il numero di infetti diventa maggiore di una certa quantitá $I_0 > 0$, cioé l'infezione si propaga.
Ritornando alle equazioni SIR, notiamo che la quantitá dS/dt é sempre minore di zero. Vediamo allora che se $S < \gamma := \beta/\alpha$ allora anche dI/dt sará negativa. Da questo possiamo dedurre che se il numero dei suscettibile iniziale é inferiore al valore β/α, allora l'epidemia non si propagherá. Nel caso in cui S_0 sia maggiore del valore soglia, allora il numero di infetti crescerá fino a quando S sará $> \gamma$. Quindi il valore massimo di infetti I^* sará raggiunto quando $S = \gamma$. Definiamo cosí il parametro I^* che rappresenta il picco massimo di infetti raggiunto durante l'epidemia.
Definiamo anche il parametro *tasso relativo di rimozione* γ che misura la velocitá di rimozione/guarigione di un individuo rispetto all'infezione. L'inverso é chiamato *tasso di contatto*.
Nello studio di un'epidemia teniamo anche conto del *tasso riproduttivo dell'infezione*, definito come $r = (\alpha/\beta)S_0$ e misura quante infezioni secondarie sono prodotte da ogni infezione primaria da quando l'infezione é stata introdotta nella popolazione.

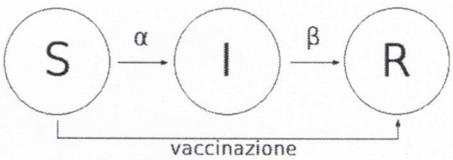
$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ valore soglia

$\simeq \frac{\text{prob. di guarigione}}{\text{prob. di contagio}}$.

Occorre "alzare la soglia" ovvero aumentare β (ospedali, strutture, farmaci) a parità di α, o, a parità di β, diminuire α (evitare assembramenti, incontri, ecc).

Vaccinazione

Per un'infezione data, l'unica classe sulla quale possiamo agire per evitare l'epidemia é la classe dei suscettibili. Questo puó avvenire tramite una campagna di vaccinazioni che conferisce l'immunitá.
Ora rappresentiamo graficamente il nuovo modello compartimentale, contenente anche la possibilitá di una eventuale vaccinazione.



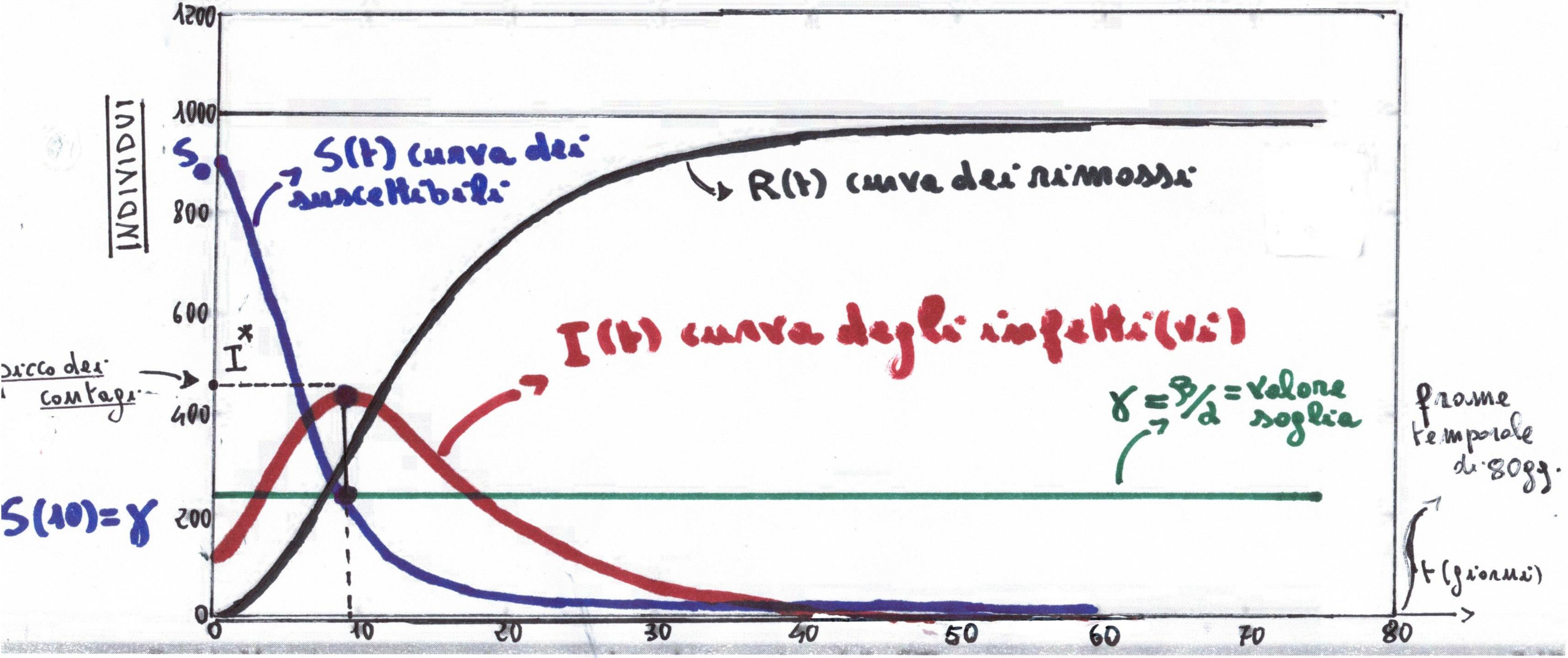
In assenza di vaccinazioni, i suscettibili iniziali sono $\hat{S}_0 \simeq N$, invece vaccinando una percentuale ν della popolazione, il numero di suscettibili diviene

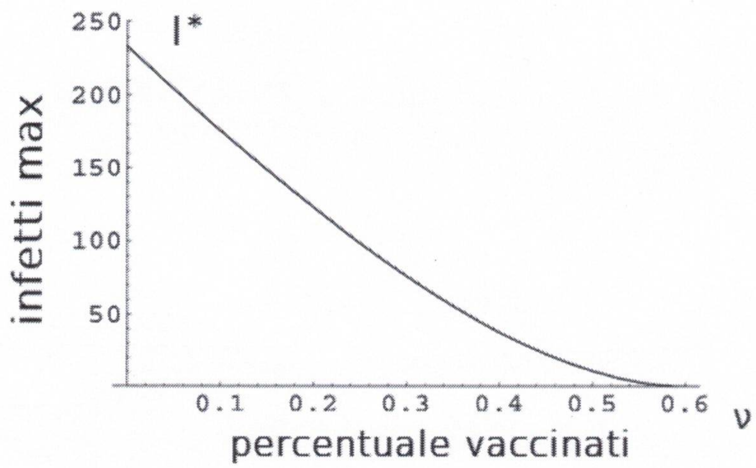
$$S_0 = S_0(\nu) := (1-\nu)\hat{S}_0 \simeq (1-\nu)N$$

quindi diminuendo S_0 opportunamente, possiamo evitare il diffondersi dell'epidemia o almeno limitare I^*. Infatti diminuendo la popolazione di suscettibili, siamo in grado di contenere l'infezione e in alcuni casi, possiamo anche non farla iniziare (se, ad esempio, $S_0 < \gamma$).

- La variabile S è strettamente decrescente;
- La variabile R è strettamente crescente;
- $I'(t) = I(t)(\alpha S(t) - \beta)$ quindi $I(t)$ cresce fino a quando $S(t) \geq \beta/\alpha$, poi decresce a 0 asintoticamente $(\gamma := \beta/\alpha)$.

"Simulazione in MATLAB"





Dalla figura notiamo che per una certa percentuale di popolazione vaccinata siamo in grado di ridurre a zero il picco massimo di infetti I^*. Per trovare questa percentuale dobbiamo prima ricavare il valore di I^*.

Gravitá dell'epidemia

Nello studio di un'epidemia é fondamentale conoscere il picco massimo di infetti, definito precedentemente come I^*, e per calcolare questo valore abbiamo prima bisogno di conoscere il numero R di rimossi, ma attraverso la relazione 3.1 possiamo ricavarcelo. A questo punto esprimiamo I in funzione di S. Quindi dal sistema 3.2 ricaviamo:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = -1 + \frac{\beta}{\alpha S}$$

Integrando l'equazione trovata arriviamo alla soluzione cercata:

$$I(S) = c_0 - S + (\beta/\alpha)\log(S). \tag{3.3}$$

con c_0 dipendente dalle condizioni iniziali e piú precisamente:

$$c_0 = I_0 + S_0 + (\beta/\alpha)\log(S_0). \tag{3.4}$$

Tralasciamo per il momento il numero massimo di infetti raggiunti nell'epidemia e ci concentriamo sulla porzione di popolazione che durante l'epidemia sará infettata. Questa stima é fondamentale nello studio di un'epidemia poiché ci consente di attuare una campagna vacciazioni tale da arginare sostanzialmente l'infezione.
Definiamo ora il parametro S_∞ che indica il numero di individui suscettibili che al termine dell'epidemia non saranno diventati infetti. Ovviamente l'epidemia si considererá terminata quando il numero di infettivi presenti nella classi I sará diventato zero.
Con l'utilizzo della 3.3 e della 3.4 possiamo trovare il numero di suscettibili

S_∞ per un t molto grande, tendente all'infinito.
Ritornando alle relazioni precedenti esplicitiamo la differenza tra S_0 e S_∞ che rappresenta la porzione di popolazione che verrá colpita effettivamente durante l'epidemia, quindi dalla 3.3 ricaviamo:

$$-(\beta/\alpha)\log(S_\infty) + S_\infty = c_0 = I_0 + S_0 - (\beta/\alpha)\log(S_0);$$

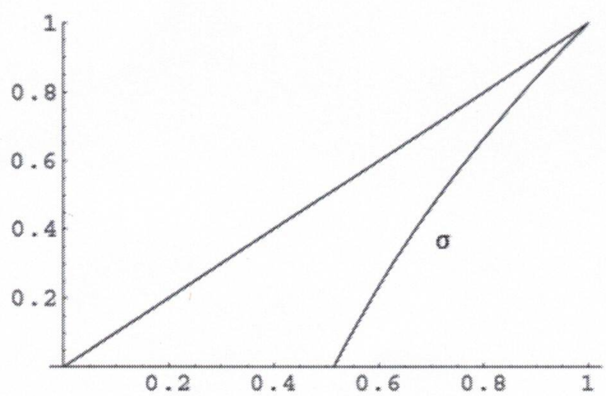
supponendo che $I_0 \ll S_0$ cosí da poterlo ignorare e esplicitare la differenza cercata, otteniamo:

$$\log[(S_0/S_\infty)^\gamma] = S_0 - S_\infty. \tag{3.5}$$

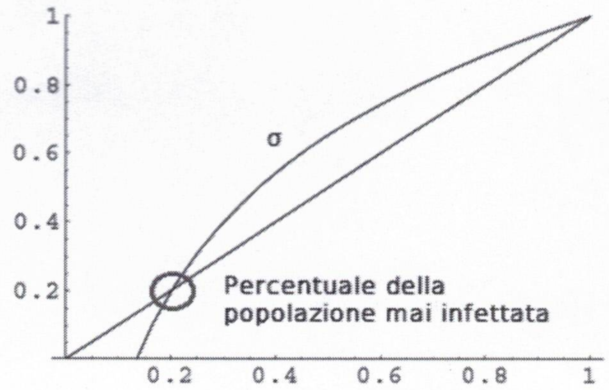
Se indichiamo con σ il rapporto S_∞/S_0, la 3.5 si riscrive come

$$\sigma = 1 + \log[\sigma^{\gamma/S_0}] = 1 + (\gamma/S_0)\log(\sigma) \tag{3.6}$$

Come vediamo, l'equazione qui sopra é trascendente e questo implica che non é possibile risolverla esattamente ma é facile risolverla numericamente con la precisione voluta. Per una migliore comprensione ne studiamo una curva rappresentativa in due casi.



Epidemia NON diffusa



Epidemia diffusa

Nelle due figure sono rappresentate le soluzioni numeriche dell'equazione 3.6 in due diversi casi.
Nella prima figura é rappresentata la situazione in cui il valore S_0 non supera il valore soglia γ e di conseguenza l'epidemia non si diffonde. Notiamo che la curva di σ rimane sotto al valore soglia.
Nella seconda immagine invece, l'infezione si diffonde infatti la curva σ supera il valore soglia. Al termine dell'epidemia, la percentuale di suscettibili che non avrá contratto l'infezione sará data dal punto di intersezione tra la curva σ e la retta che rappresenta il valore soglia γ.

Ritorniamo ora sul parametro I^*. Ricordando quanto detto in precedenza, sappiamo che il picco massimo di infetti verrá raggiunto quando $S = \gamma = \beta/\alpha$ e, con l'utilizzo della 3.3, possiamo anche valutare quanto sará diffusa l'epidemia al momento di massima intensitá: abbiamo infatti

$$I^* = I(\gamma) = c_0 - \gamma + \gamma \log(\gamma)$$

e ricordando la definizione della costante c_0 espresssa nella relazione 3.4 e supponendo nuovamente che $I_0 \ll S_0$, possiamo arrivare a definire che

$$I^* \simeq (S_0 - \gamma) + \gamma[\log(\gamma) - \log(S_0)] = (S_0 - \gamma) - \gamma \log(S_0/\gamma). \qquad (3.7)$$

Grazie allla relazione 3.7 siamo ora in grado di trovare la percentuale di popolazione suscettibile che dovremmo vaccinare per non far diffondere l'infezione e ridurre a zero il parametro I^*. Quindi, per la 3.7 ed ricordando che $S_0 = (1-\nu)N$ scriviamo

$$I^*(\nu) \simeq [(1-\nu)N - \gamma] - \gamma \log[(1-\nu)N/\gamma]$$

dove abbiamo espresso I^* in funzione del parametro ν che rappresenta la percentuale di popolazione vaccinata.

Ricordiamo che un'epidemia si diffonde se $S_0 > \gamma$ quindi a noi interessa il caso massimo in cui l'epidemia non si diffonde, cioé $S_0 = \gamma$. Allora per come avevamo definito S_0 nella sezione della vaccinazione abbiamo che l'epidemia non inizierá mai se vacciniamo

$$\nu_0 := 1 - \gamma/N$$

dove con ν_0 intendiamo la percentuale di popolazione che *inizialmente* dovremo vaccinare per evitare che, all'arrivo di un individuo ammalato nella popolazione, l'infezione si diffonda.