Numeri PARI

Prova scritta di Matematica per l'Economia - CdL Triennale in EA

Appello del 14 gennaio 2025

Tempo massimo per lo svolgimento della prova: 2 ore

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

(1) Data la funzione $g(x) = \dfrac{\arccos(\log x)}{x \cdot \sqrt{1 - \log x}}$,

a) determinarne il dominio D_g;

b) ricordando che $\arccos x \simeq \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x}$ per $x \to 1^-$, verificare che g è prolungabile per continuità in $x_0 := \sup D_g$; dire inoltre se g è dotata di primitiva, motivando esaurientemente la risposta;

c) dire perchè g è localmente integrabile secondo Riemann in D_g e calcolare quindi l'integrale definito

$$\int_1^{\sqrt{e}} g(x)\, dx$$

effettuando la sostituzione $\log x = t$ e successivamente integrando per parti.
E' possibile affermare che il prolungamento per continuità di g è integrabile secondo Riemann?

(2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} 2^{\,1/x} - 2^{\,1/\operatorname{arctg} x}.$$

(3) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \operatorname{arccotg} x + \operatorname{arctg} |x|$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.

(4) Data la funzione

$$f(x,y) = -xye^{-x^2+y},$$

determinarne il dominio D_f, calcolare le derivate parziali prime e seconde e dire se f è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale.
E' possibile affermare che f è di classe C^∞ in D_f?

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di ~~tre~~ 2 ore.

1°)

Deve essere $\begin{cases} x>0 \\ |\log x| \leq 1 \\ \log x < 1 \end{cases}$ e dunque $D_g = [e^{-1}, e[$ ove $x_0 = \sup D_g = e$; si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = \lim_{x \to e^-} \frac{\arccos(\log x)}{x \cdot \sqrt{1-\log x}} = \frac{\sqrt{2}}{e},$$ poiché $\arccos(\log x) \simeq \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\log x}$ per $x \to e^-$.

In definitiva si ha che:

- g è limitata;
- g è prolungabile per continuità in $x_0 = e$ se si pone $g(e) = \frac{\sqrt{2}}{e}$; il prolungamento $\tilde{g} : [e^{-1}, e] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann perché continua;
- g è dotata di primitiva perché continua nell'intervallo D_g (cfr. teorema di Torricelli-Barrow) ed è localmente integrabile, dunque integrabile in $[1, \sqrt{e}] \subset D_g$.

Posto $\log x = t$, si ha $x = e^t$ e $dx = e^t dt$; inoltre se $x=1$ si ha $t=0$, mentre se $x = \sqrt{e}$ si ha $t = \frac{1}{2}$; risulta quindi

$$\int_1^{\sqrt{e}} g(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos t \cdot D\left(-2\sqrt{1-t}\right) dt =$$

$$-2\sqrt{1-t} \cdot \arccos t - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \cancel{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t} \cdot \cancel{\sqrt{1-t}}}\,dt = \Big[-2\sqrt{1-t} \cdot \arccos t - 4\sqrt{1+t}\Big]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$ (si ricordi che $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$).

2°) Il limite è nella forma di indecisione $[+\infty - \infty]$; si ha

$$\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}} = \lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}}\left(1 - 2^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x}}\right)$$ ove $\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x \cdot x} \simeq \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2} = \frac{1}{3}x \to 0$

per $x \to 0^+$, e pertanto $\left(1 - 2^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x}}\right) \simeq -\frac{1}{3}x \cdot \log 2$ per $x \to 0^+$; in definitiva il limite

è uguale al $$\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{3}x \cdot \log 2 = -\frac{\log 2}{3} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{\downarrow}{=} -\frac{\log 2}{3} \cdot \lim_{y \to +\infty} \frac{2^y}{y} = -\infty,$$

dato che $y = o(2^y)$ per $y \to +\infty$.

(posto $\frac{1}{x} = y \to +\infty$ per $x \to 0^+$)

3°) Studiare la seguente funzione:

$$x \to f(x) = \operatorname{arccotg} x + \operatorname{arctg}|x| = \begin{cases} \operatorname{arccotg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, & \text{se } x \geq 0 \\ \operatorname{arccotg} x - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(ricordare che $\operatorname{arccotg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ e che $\operatorname{arctg}(-x) = -$

Insieme di definizione $D_f = \mathbb{R}$

f(x)>0 $\forall x \in D_f$

f(x)=0 $\iff x \in \emptyset$

f(x)<0 $\iff x \in \emptyset$

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x $\mathbb{R}$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati $(0, \frac{\pi}{2})$

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x // // // //

Limiti significativi per f:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{3}{2}\pi$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$;

Equazioni degli asintoti del grafico di f:

$r: y = \frac{3}{2}\pi$ asintoto orizzontale a sx; $s: y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a dx (in realtà $f \equiv \frac{\pi}{2}$ in $[0, +\infty[$);

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ \frac{-2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \overset{\text{(ovvero)}}{=} \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{|x|}{x} - 1\right) \ \forall x \neq 0; \quad f'_-(0) = -2, \quad f'_+(0) = 0;$$

f'(x)>0 $\iff x \in \emptyset$

f'(x)=0 $\iff x \in [0, +\infty[$

f'(x)<0 $\iff x \in]-\infty, 0[$

Punti angolosi ~~o cuspidali~~ del grafico di f $x_0 = 0$ con $f(0) = \frac{\pi}{2}$

Intervalli in cui f è strettamente crescente // // // // //

Intervalli in cui f è costante $[0, +\infty[$

Intervalli un cui f è strettamente decrescente $]-\infty, 0]$

Punti di minimo ~~o di massimo~~ relativo per f $x_0 = 0$ pto di min relativo (non proprio) per f

Punti di minimo ~~o di massimo~~ assoluto per f ogni $x \in [0, +\infty[$ è pto di minimo globale per f ed il valore minimo è uguale a $\frac{\pi}{2}$.

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases} ; \quad \nexists f''(0);$$

f''(x)>0 $\iff x \in \emptyset$

f''(x)=0 $\iff x \in \emptyset$

f''(x)<0 $\iff x \in]-\infty, 0[$

Intervalli in cui f è strett. convessa // // // // //

Intervalli in cui f è strett. concava $]-\infty, 0]$

Punti di flesso per f // // // // //

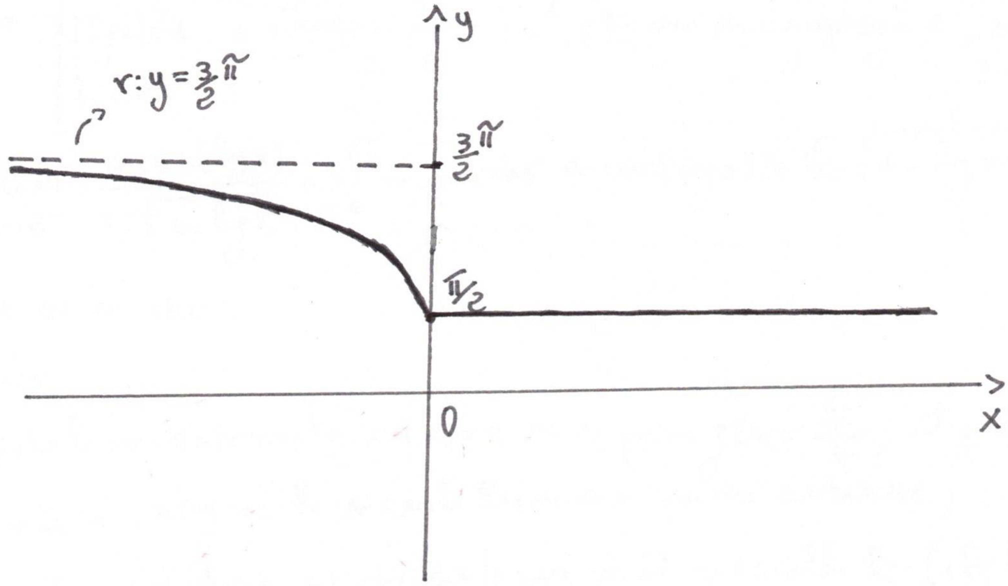
f è biunivoca (iniettiva)? NO

Indicare l'insieme dei valori di f: $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

TRACCIARE IL GRAFICO DI f.

x) NUMERI PARI



4°) Risulta $D_f = \mathbb{R}^2$ ed f è ivi di classe C^∞, quindi differenziabile.

In ogni $(x,y) \in D_f$ si calcola

$$f_x(x,y) = -y\,e^{-x^2+y} + 2x^2y\cdot e^{-x^2+y}, \quad f_y(x,y) = -x\,e^{-x^2+y} - xy\,e^{-x^2+y} = -x\,e^{-x^2+y}\cdot(1+y),$$

$$f_{xx}(x,y) = 2xy\,e^{-x^2+y}\cdot(3-2x^2), \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{-x^2+y}\cdot(2x^2y+2x^2-y-1),$$

$$f_{yy}(x,y) = -x\,e^{-x^2+y}\cdot(y+2).$$

Si ha $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$ nei punti $A=(0,0)$, $B=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)$, $C=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},-1\right)$; poiché

$$\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0,$$

$$\det H_f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\mp 4e^{-3/2}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mp e^{-3/2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2e^{-3} > 0, \quad f_{xx}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right) = \mp\frac{4e^{-3/2}}{\sqrt{2}} \lessgtr 0,$$

si conclude che A è un pto di sella, B e C sono rispettivamente pti di massimo/minimo locali per f.

Numeri DISPARI

Prova scritta di Matematica per l'Economia - CdL Triennale in EA

Appello del 14 gennaio 2025

Tempo massimo per lo svolgimento della prova: 2 ore

****

(1) Data la funzione $g(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(\log x)}{x \cdot \sqrt{1+\log x}}$,

a) determinarne il dominio D_g e calcolare il $\lim_{x\to x_0^+} g(x)$, ove $x_0 := \inf D_g$;

b) dire se g è limitata e se è dotata di primitiva, motivando esaurientemente la risposta;

c) stabilire se g è integrabile o solo localmente integrabile secondo Riemann in D_g, motivando esaurientemente la risposta; calcolare quindi l'integrale definito

$$\int_1^{\sqrt{e}} g(x)\,dx$$

effettuando la sostituzione $\log x = t$ e successivamente integrando per parti.

(2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} 3^{\,1/\operatorname{sen} x} - 3^{\,1/x}.$$

(3) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = -\operatorname{arccotg}|x| - \operatorname{arctg} x$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.

(4) Data la funzione

$$f(x,y) = xye^{x-y^2},$$

determinarne il dominio D_f, calcolare le derivate parziali prime e seconde e dire se f è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale. E' possibile affermare che f è di classe C^∞ in D_f?

Prova scritta di Met. per l'Ec. del 14/01/2025 - CdL in EA - NUMERI DISPARI

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di ~~tre~~ 2 ore.

1°)

Deve essere $\begin{cases} x>0 \\ |\log x| \leq 1 \\ \log x > -1 \end{cases}$ e dunque $D_g =]e^{-1}, e]$ ove $x_0 = \inf D_g = e^{-1}$; si ha

$$\lim_{x\to x_0^+} g(x) = \lim_{x\to (e^{-1})^+} \frac{\operatorname{arcsen}(\log x)}{x\cdot\sqrt{1+\log x}} = -\infty,$$ poiché $\operatorname{arcsen}(\log e^{-1}) = \operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2} < 0$.

In definitiva si ha che:

- g non è limitata;
- g è dotata di primitive perché continua nell'intervallo D_g (cfr. teorema di Torricelli-Barrow);
- g non è integrabile secondo Riemann (perché, come visto, non limitata), ma solo localmente integrabile (perché continua), dunque integrabile in $[1, \sqrt{e}] \subset D_g$.

Posto $\log x = t$, si ha $x = e^t$ e $dx = e^t dt$; inoltre se $x=1$ si ha $t=0$, mentre se $x=\sqrt{e}$ si ha $t=\frac{1}{2}$; risulta quindi

$$\int_1^{\sqrt{e}} g(x)\,dx = \int_0^{\frac12} \frac{\operatorname{arcsen} t}{\sqrt{1+t}}\,dt = \int_0^{\frac12} \operatorname{arcsen} t \cdot D\left(2\sqrt{1+t}\right)dt =$$

$$\left[2\sqrt{1+t}\cdot\operatorname{arcsen} t\right]_0^{\frac12} - 2\int_0^{\frac12} \cancel{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+t}}\cdot\sqrt{1-t}}\,dt = \left[2\sqrt{1+t}\cdot\operatorname{arcsen} t + 4\sqrt{1-t}\right]_0^{\frac12} =$$

$\frac{\pi}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{2} - 4$ (si ricordi che $\operatorname{arcsen}\left(\frac12\right) = \frac{\pi}{6}$).

2°) Il limite è nella forma di indecisione $[+\infty - \infty]$; si ha

$$\lim_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} - 3^{\frac1x} = \lim_{x\to 0^+} 3^{\frac1x}\cdot\left(3^{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac1x} - 1\right)$$ ove $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x\cdot x} \simeq \frac{\frac16 x^3}{x^2} = \frac16 x \to 0$

per $x\to 0^+$, e pertanto $\left(3^{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac1x} - 1\right) \simeq \frac16 x\cdot\log 3$ per $x\to 0^+$; in definitiva il limite è uguale al $\lim_{x\to 0^+} 3^{\frac1x}\cdot\frac16 x\cdot\log 3 = \frac{\log 3}{6}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac1x}}{\frac1x} = \frac{\log 3}{6}\cdot\lim_{y\to+\infty}\frac{3^y}{y} = +\infty$, dato che $y = o(3^y)$ per $y\to+\infty$.

(posto $\frac1x = y \to +\infty$ per $x\to 0^+$)

3°) Studiare la seguente funzione:

$$x \to f(x) = -\operatorname{arccotg}|x| - \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\operatorname{arccotg} x - \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\operatorname{arccotg}(-x) - \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(ricordare che $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$ e che $\operatorname{arccotg} x + \operatorname{arctg} x =$

Insieme di definizione $D_f = \mathbb{R}$

$f(x)>0$ $\iff x \in]-\infty, -1[$

$f(x)=0$ $\iff x = -1$

$f(x)<0$ $\iff x \in]-1, +\infty[$

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x $]-\infty, -1[$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati $(-1, 0)$, $(0, -\frac{\pi}{2})$

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x $]-1, +\infty[$

Limiti significativi per f:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$;

Equazioni degli asintoti del grafico di f:

$r: y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a sx; $s: y = -\frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a dx (in realtà $f \equiv -\frac{\pi}{2}$ in $[0, +\infty[$);

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ \frac{-2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \overset{\text{(ovvero)}}{=} \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{|x|}{x} - 1\right) \ \forall x \neq 0; \quad f'_-(0) = -2, \ f'_+(0) = 0;$$

$f'(x)>0$ $\iff x \in \emptyset$

$f'(x)=0$ $\iff x \in [0, +\infty[$

$f'(x)<0$ $\iff x \in]-\infty, 0[$

Punti angolosi ~~o cuspidali~~ del grafico di f $x_0 = 0$ con $f(0) = -\pi/2$

Intervalli in cui f è strettamente crescente // // // // //

Intervalli in cui f è costante $[0, +\infty[$

Intervalli un cui f è strettamente decrescente $]-\infty, 0]$

Punti di minimo ~~o di massimo~~ relativo per f $x_0 = 0$ pto di minimo relativo (non proprio) per f

Punti di minimo ~~o di massimo~~ assoluto per f ogni $x \in [0, +\infty[$ è pto di minimo globale per f ed il valore minimo è uguale a $-\frac{\pi}{2}$.

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases}; \quad \nexists f''(0);$$

$f''(x)>0$ $\iff x \in \emptyset$

$f''(x)=0$ $\iff x \in \emptyset$

$f''(x)<0$ $\iff x \in]-\infty, 0[$

Intervalli in cui f è strett. convessa // // // // //

Intervalli in cui f è strett. concava $]-\infty, 0]$

Punti di flesso per f // // // // //

f è biunivoca (iniettiva)? NO

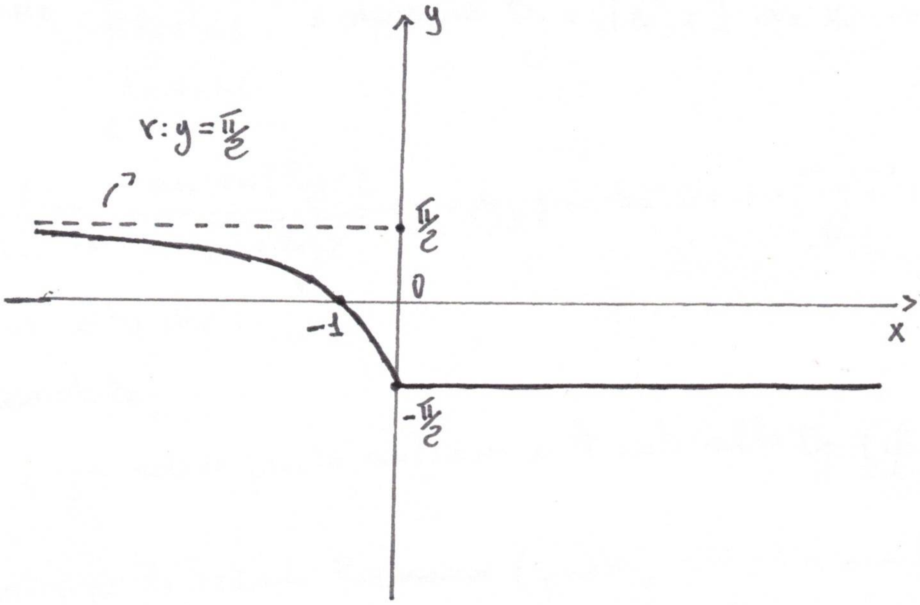
Indicare l'insieme dei valori di f: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

TRACCIARE IL GRAFICO DI f.

)

NUMERI DISPARI



4°)

Risulta $D_f = \mathbb{R}^2$ ed f è ivi di classe C^∞, quindi è differenziabile.

In ogni $(x,y) \in D_f$ si calcola

$f_x(x,y) = y e^{x-y^2} \cdot (1+x)$, $f_y(x,y) = x e^{x-y^2} - 2xy^2 \cdot e^{x-y^2}$,

$f_{xx}(x,y) = y e^{x-y^2} \cdot (x+2)$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{x-y^2} \cdot (x+1-2y^2-2xy^2)$,

$f_{yy}(x,y) = 2xy\, e^{x-y^2} (2y^2-3)$.

Si ha $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$ nei punti $A = (0,0)$, $B = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C = \left(-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$; poiché

$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0,$$

$$\det H_f\left(-1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\pm e^{-3/2}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\pm 4 e^{-3/2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2e^{-3} > 0,$$

$$f_{xx}\left(-1, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pm e^{-3/2}}{\sqrt{2}} \gtrless 0,$$

si conclude che A è un pto di sella, B e C sono rispettivamente pti di minimo/massimo locali per f.