UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI
ALDO MORO

Dipartimento di Biotecnologie, Biotecnologie e Biofarmaceutica
Corso di Laurea Triennale in Biotecnologie Mediche e Farmaceutiche

ESERCIZIARIO DI MATEMATICA ED ELEMENTI DI STATISTICA

Supervisore:
Prof. Arcangelo Labianca

Peer Tutor:
Dott.ssa Raffaella De Santis

Anno Accademico 2018-2019

Indice

Introduzione **2**

1 Studio di funzione **3**
1.1 Linee guida . . . 3
1.2 Richiami di teoria . . . 7
1.3 Traccia 27 maggio 2019 (A) . . . 13
1.4 Traccia 26 febbraio 2018 (B) . . . 17
1.5 Traccia 4 marzo 2019 (A) . . . 22

2 Integrali **27**
2.1 Richiami di teoria . . . 27
2.2 Integrali immediati . . . 29
2.3 Integrazione delle funzioni razionali . . . 33
2.4 Integrazione per parti . . . 47
2.5 Integrazione per sostituzione . . . 50

3 Serie numeriche **54**
3.1 Richiami di teoria . . . 54
3.2 Esercizi vari . . . 59

4 Insieme dei numeri reali **69**
4.1 Richiami di teoria . . . 69
4.2 Esercizi vari . . . 77

Bibliografia **84**

Introduzione

L'unico modo davvero efficace per imparare la matematica è *fare* della matematica. Seguire le lezioni o leggere il libro di testo non basta; bisogna sedersi davanti a un foglio bianco e tentare di risolvere da soli i problemi. Soltanto così si può capire perché vengono scelti certi ragionamenti invece di altri, e magari si può iniziare a intuire come costruirne di nuovi da soli. Ma per fare della matematica, almeno all'inizio, sono necessari degli esercizi [M. Abate, C. de Fabritiis, 1999].
Tale eserciziario, pertanto, non nasce solo con l'intento di analizzare gli esercizi più significativi per la preparazione dell'esame di Matematica ed Elementi di Statistica, ma nasce soprattutto da quella voglia di aiutare gli studenti a studiare la matematica con un approccio meno mnemonico e più coscienzioso, nonché da quella voglia di lasciare un segno della mia attività di *peer tutoring* rivolta agli studenti del C.d.L Triennale in Biotecnologie Mediche e Farmaceutiche dell'Università degli Studi di Bari Aldo Moro.
Per facilitare la reale comprensione dei vari esercizi e per evitare, quindi, l'acquisizione di perniciosi approcci a "macchinetta", ho pensato sia di porre all'inizio di ogni capitolo brevi richiami di teoria, comprendenti definizioni e risultati principali, sia di risolvere ogni esercizio chiarendo tutti i *perché* relativi alle scelte effettuate.
Certamente il tutto è stato supervisionato e corretto dal Prof. Arcangelo Labianca a cui va un doveroso ringraziamento.
Tuttavia, è importante precisare che, anche se tutti gli esercizi raccolti sono stati svolti con lo scopo di aiutare ogni studente a motivare tutti i passaggi necessari per il raggiungimento della soluzione, durante lo svolgimento della traccia d'esame è sufficiente affrontare gli esercizi riportando solo i risultati essenziali. A tal proposito potrebbe essere davvero utile se ogni studente consultasse le soluzioni illustrate solo dopo aver tentato di trovarle in completa autonomia: è partendo dall'analisi degli eventuali errori commessi che può prendere forma uno studio più consapevole della matematica stessa.

Capitolo 1

Studio di funzione

1.1 Linee guida

Data una funzione reale di variabile reale $f(x)$, lo studio che consente di tracciarne il grafico approssimato consiste nello svolgimento di alcuni fra i seguenti compiti:

1) *Determinazione del campo di esistenza.*
   Ovvero del "più grande" insieme degli $x \in \mathbb{R}$ nei quali è possibile calcolare $f(x)$. Il campo di esistenza di $f(x)$ viene denotato con E_f.

   - osservare se E_f è simmetrico rispetto a 0;
   - osservare se E_f è periodico e quale sia la periodicità;
   - osservare se E_f è illimitato.

2) *Ricerca delle simmetrie.*
   Se E_f è simmetrico rispetto a 0, calcolare

   $$f(-x)$$

   deducendo l'eventuale parità o disparità di f. Si ricordi che affinché $f(x)$ sia pari deve risultare che $f(-x) = f(x)$ e che affinché $f(x)$ sia dispari deve risultare che $f(-x) = -f(x)$.

3) *Ricerca della periodicità.*

   Se E_f è periodico di periodo T, calcolare

   $$f(x+T)$$

deducendo l'eventuale periodicità di f.

4) *Determinazione degli zeri* (ovvero: intersezione con l'asse delle ascisse).
Studiare l'equazione

$$f(x) = 0$$

determinando eventuali zeri di f.

5) *Intersezione con l'asse delle ordinate.*
Se $0 \in E_f$, calcolare

$$f(0)$$

determinando l'eventuale intersezione di f con l'asse delle ordinate.

6) *Studio del segno.*

Studiare la disequazione

$$f(x) \geq 0$$

deducendo la positività/negatività di f.

7) *Comportamento all'infinito.*

Se E_f è illimitato superiormente (inferiormente), calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) \right)$$

determinando eventuali asintoti paralleli all'asse delle ascisse (asintoti orizzontali).

Se non vi è asintoto orizzontale, calcolare

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \right)$$

e

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx \quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) - mx \right)$$

purché abbiano senso, determinando eventuali asintoti non paralleli ad alcun asse del riferimento (asintoti obliqui).

8) *Limiti nei punti di accumulazione.*

Se vi sono $x_0 \in Der(E_f) - E_f$, calcolare

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

purché abbiano senso, determinando eventuali punti di salto finito, punti di salto infinito (asintoti verticali), punti di estensione continua ed altri.

9) *Determinazione delle intersezioni con gli asintoti* (orizzontali oppure obliqui).

10) *Calcolo della derivata prima.*

    Calcolare
$$f'(x).$$

    - osservare se $E_{f'} \subset E_f$ ed $E_{f'} \neq E_f$.

11) *Determinazione dei punti singolari.*

    Se vi sono $x_0 \in E_f$ tali che $x_0 \in Der(E_{f'}) - E_{f'}$, calcolare
$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$
    purché abbiano senso, determinando eventuali punti singolari per f.

12) *Determinazione dei punti stazionari.*

    Studiare l'equazione
$$f'(x) = 0$$
    determinando eventuali punti stazionari di f.

13) *Studio del segno della derivata prima.*

    Studiare la disequazione
$$f'(x) \geq 0$$
    deducendo la monotonia di f e determinando eventuali punti di estremo relativo di f.

14) *Calcolo del valore nei punti di estremo relativo.*

15) *Studio dei punti singolari.*

    Se vi sono x_0 punti singolari di f, calcolare
$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

purché abbiano senso, determinando eventuali punti angolosi, punti cuspidali o punti a tangente parallela all'asse delle ordinate (tangente verticale).

16) *Calcolo del valore nei punti singolari.*

17) *Ricerca dei punti di estremo assoluto.*

    I punti di estremo assoluto (minimo/massimo assoluto) vanno ricercati fra:

    - punti di $\partial E_f \cap E_f$;
    - risultati dei limiti;
    - punti di estremo relativo;
    - punti singolari;

    confrontando in essi i valori di f.

18) *Calcolo della derivata seconda.*

    Calcolare
    $$f''(x)$$

19) *Studio del segno della derivata seconda.*

    Studiare la disequazione
    $$f''(x) \geq 0$$
    deducendo la convessità/concavità di f e determinando eventuali punti di flesso di f.

20) *Determinazione delle tangenti nei punti di flesso* (ovvero: tangenti inflessionali).

21) *Determinazione delle intersezioni con le tangenti inflessionali.*

22) *Tracciamento del grafico approssimato.*

Osservazione 1.1. È immediato osservare che il punto 4 è incluso nel punto 6, così come il punto 12 è incluso nel punto 13.
Inoltre talvolta anche il punto 5 può essere incluso nel punto 4.

1.2 Richiami di teoria

Procediamo analizzando alcuni concetti che risultano fondamentali per gli studi di funzione che verranno analizzati in seguito.

Funzioni derivabili

Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in X. Supponiamo che f sia continua in $x_0 \in X \cap Der(X)$.

Poniamo:

$$f'({x_0}^+) = \lim_{x \to {x_0}^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$f'({x_0}^-) = \lim_{x \to {x_0}^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Si ha:

$$x_0 \text{ punto di derivabilità per } f \iff f \text{ derivabile in } x_0;$$

$$x_0 \text{ punto singolare di } f \iff f \text{ non è derivabile in } x_0.$$

$A)$ Se $\exists f'(x_0)$ allora

- $I)$ se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ allora

  x_0 punto di derivabilità per f.

- $II)$ se $f'(x_0) = \pm\infty$ allora

  x_0 punto a tangente verticale per f.

$B)$ Se $\nexists f'(x_0)$ ma $\exists f'({x_0}^+) \wedge \exists f'({x_0}^-)$ allora

- $I)$ se $f'({x_0}^+) \in \mathbb{R} \vee f'({x_0}^-) \in \mathbb{R}$ allora

  x_0 punto angoloso per f.

- $II)$ se $f'({x_0}^+) = \pm\infty \wedge f'({x_0}^-) = \pm\infty$ allora

  x_0 punto di cuspide per f.

Equazioni irrazionali

Consideriamo un'equazione del tipo:

$$\sqrt{f(x)} = g(x).$$

Per risolverla occorre innanzitutto porre la condizione di esistenza del radicale:

$$f(x) \geq 0.$$

Se tale condizione è soddisfatta, poiché il primo membro della disequazione di partenza è positivo o nullo, deve necessariamente essere anche:

$$g(x) \geq 0.$$

Se tutte queste condizioni sono soddisfatte, si può procedere elevando al quadrato entrambi i termini dell'equazione di partenza

$$f(x) = g(x)^2.$$

Quindi per risolvere l'equazione $\sqrt{f(x)} = g(x)$ bisogna risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x)^2 \end{cases}$$

Nel caso in cui l'equazione $\sqrt{f(x)} = g(x)$ viene risolta in uno studio di funzione (ad esempio per trovare gli zeri della funzione in esame), la condizione di esistenza del radicale può essere omessa in quanto essa è già implicita nel campo di esistenza della funzione.
Pertanto il sistema visto precedentemente può essere semplificato nel seguente modo.

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x)^2 \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali

1. Consideriamo una disequazione del tipo:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x).$$

Per risolverla occorre innanzitutto porre la condizione di esistenza del radicale:

$$f(x) \geq 0.$$

Se tale condizione è soddisfatta, essendo il primo membro della disequazione di partenza è positivo o nullo, deve necessariamente essere anche:

$$g(x) \geq 0.$$

Se tutte queste condizioni sono soddisfatte, si può procedere elevando al quadrato entrambi i termini della disequazione di partenza

$$f(x) \leq g(x)^2.$$

Quindi per risolvere la disequazione $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ bisogna risolvere il seguente sistema.[1]

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x)^2 \end{cases}$$

Nel caso in cui la disequazione $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ viene risolta in uno studio di funzione (ad esempio per studiare il segno della funzione in esame), la condizione di esistenza del radicale può essere omessa in quanto essa è già implicita nel campo di esistenza della funzione.

[1] Si ricordi che per risolvere un sistema di disequazioni è sufficiente risolvere singolarmente ciascuna disequazione e quindi considerare l'*intersezione* degli insiemi delle loro soluzioni. Per determinare tale insieme è utile rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni di ciascuna disequazione. Esaminando tale rappresentazione sarà facile determinare l'insieme delle soluzioni del sistema: esso, se non è vuoto, sarà costituito da tutti quegli intervalli in cui sono soddisfatte tutte le disequazioni, ovvero da tutti quegli intervalli in cui *tutte* le linee (le quali rappresentano gli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni) sono continue.

Pertanto il sistema visto precedentemente può essere semplificato nel seguente modo.

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x)^2 \end{cases}$$

2. Consideriamo una disequazione del tipo:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x).$$

Anche in questo caso occorre innanzitutto porre la condizione di esistenza del radicale:

$$f(x) \geq 0.$$

Il secondo membro della disequazione di partenza ora può essere sia positivo sia negativo o nullo.
Nel caso in cui $g(x) \geq 0$ si può procedere elevando al quadrato entrambi i termini della disequazione di partenza; nel caso in cui $g(x) < 0$ la disequazione di partenza sarà sempre soddisfatta purché $f(x) \geq 0$: in tal caso infatti il primo membro, positivo o nullo, sarà senz'altro maggiore di una quantità negativa.
Quindi per risolvere la disequazione $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ bisogna determinare l'unione degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi.

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x)^2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

Se la disequazione $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ viene risolta in uno studio di funzione (ad esempio per studiare il segno della funzione in esame), la condizione di esistenza del radicale può essere omessa in quanto essa è già implicita nel campo di esistenza della funzione.
Pertanto i sistemi visti precedentemente possono essere semplificati

nel seguente modo.

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x)^2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) < 0$$

La soluzione, quindi, è data dall'unione degli insiemi delle soluzioni del primo sistema e della seconda disequazione.

Il valore assoluto

Iniziamo con il ricordare la definizione di valore assoluto di un numero reale.
Sia x un generico numero reale, si ha

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio, se $x = +2 > 0$ sarà $|+2| = 2$ e se $x = -2 < 0$ sarà $|-2| = -(-2) = 2$.
Sia, ora, f una funzione reale di una variabile reale definita in X e sia un generico $x \in X$. Sfruttando la definizione di valore assoluto, segue che

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Procediamo considerando le seguenti equazioni e disequazioni.

- $|f(x)| = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$.
- $|f(x)| = c \Longleftrightarrow f(x) = -c \vee f(x) = c$, quando $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.
- $|f(x)| = b$ non ammette soluzioni quando $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$.
- $|f(x)| \geq 0$ è vera per ogni x per cui $f(x)$ è definita.
- $|f(x)| < 0$ non ammette soluzioni.
- $|f(x)| \geq c \Longleftrightarrow f(x) \leq c \vee f(x) \geq -c$, quando $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.
- $|f(x)| \leq c \Longleftrightarrow -c \leq f(x) \leq c$, quando $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

- $|f(x)| \geq b$ è vera per ogni x per cui $f(x)$ è definita, quando $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$.
- $|f(x)| \leq b$ non è mai verificata quando $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$.

Poniamo $g(x) = |f(x)|$ e calcoliamo la sua derivata prima.

$$g'(x) = \frac{f(x)}{|\ f(x)\ |} \cdot f'(x).$$

Risulta facile osservare che la quantità $\dfrac{f(x)}{|\ f(x)\ |}$ è costante.
Infatti detto x un elemento appartenente al suo insieme di definizione, sfruttando la definizione di $|f(x)|$ vista precedentemente segue che

$$\frac{f(x)}{|\ f(x)\ |} = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{f(x)} & \text{se} \quad f(x) > 0 \\ \dfrac{f(x)}{-f(x)} & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\frac{f(x)}{|\ f(x)\ |} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad f(x) > 0 \\ -1 & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

La funzione $\dfrac{f(x)}{|\ f(x)\ |}$ prende il nome di *funzione segno di* $f(x)$.

1.3 Traccia 27 maggio 2019 (A)

Studiare la funzione (senza distinguere i due casi finché è possibile)

$$f(x) = e^{|x-1|}$$

compresa la derivata seconda, tracciandone il grafico approssimato.

Svolgimento

La funzione $f(x) = e^{|x-1|}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, dal momento che essa è data dalla composizione di più funzioni, quali l'esponenziale, il valore assoluto e un polinomio di primo grado, ciascuna delle quali è definita su tutto $\mathbb{R}$. Quindi $E_f = \mathbb{R}$.
Essendo il dominio simmetrico rispetto a 0, verifichiamo se $f(x)$ è pari o dispari. Calcoliamo

$$f(-x) = e^{|-x-1|} = e^{|-(x+1)|} = e^{|x+1|}.$$

Poiché $f(-x) \neq f(x)$, la funzione di partenza non è pari, inoltre, poiché $f(-x) \neq -f(x)$, la funzione di partenza non è neppure dispari.
Determiniamo le intersezioni con gli assi.
Partiamo dall'intersezione con l'asse delle ascisse.
L'equazione

$$e^{|x-1|} = 0$$

non ha soluzioni, dal momento che la funzione esponenziale non si annulla mai. Quindi la funzione $f(x)$ non presenta intersezioni con l'asse x.
Poiché $0 \in E_f$ determiniamo l'intersezione con l'asse delle ordinate.

$$f(0) = e^{|0-1|} = e^{|-1|} = e^1 = e.$$

Quindi, il grafico della funzione incontra l'asse y nel punto $A(0, e)$.
La funzione è sempre positiva e non si annulla mai, proprietà ereditate sempre dalla funzione "più esterna", ovvero dalla funzione esponenziale.
Determiniamo ora la derivata prima, applicando il Teorema di derivazione della funzione composta.

$$f'(x) = e^{|x-1|} \cdot \frac{x-1}{|\ x-1\ |}.$$

Ricordando quanto visto nel paragrafo 1.2, nella parte relativa al valore assoluto, si ha che la quantità $\dfrac{x-1}{\mid x-1 \mid}$ è una costante ed essa è pari a

$$\frac{x-1}{\mid x-1 \mid} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 1 \\ -1 & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

In altre parole la quantità $\dfrac{x-1}{\mid x-1 \mid}$ vale 1 a destra di 1 e vale -1 a sinistra di 1.
La derivata prima, dunque, è una funzione data dal prodotto di due funzioni, quali $e^{|x-1|}$, che per quanto visto in precedenza è definita su tutto $\mathbb{R}$, e $\dfrac{x-1}{\mid x-1 \mid}$, che è definita per tutte le x che non annullano il suo denominatore.
Quindi la funzione $f^{'}(x)$ è determinata per tutte le x tali che $\mid x-1 \mid \neq 0$.

$$\mid x-1 \mid \neq 0 \Longleftrightarrow x-1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 1.$$

Pertanto $E_{f'} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
Procediamo studiando il segno della derivata prima.
Poiché le funzioni $e^{|x-1|}$ e $\mid x-1 \mid$ sono sempre positive, segue che
$f^{'}(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x-1 > 0$, ovvero quando $x > 1$.

Dallo studio del segno della derivata prima, deduciamo che la funzione è strettamente decrescente per $x < 1$ e strettamente crescente per $x > 1$. Sostituendo nell'espressione di $f(x)$ il valore $x = 1$, segue che il punto $M(1,1)$ è un punto di minimo relativo per f. Analizzando gli insiemi $E_{f'}$ e E_f, emerge che la funzione $f(x)$ è continua in $x = 1$, ma in tale punto non è dotata di derivata prima.
Procediamo con il calcolo dei seguenti limiti, per classificare il punto di non derivabilità per f.
Per i calcoli che faremo è sempre fondamentale ricordare la definizione della

funzione $\dfrac{x-1}{\mid x-1 \mid}$ vista sopra.

$$\lim_{x\to 1^+} f^{'}(x) = \lim_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1 \\ x-1>0}} e^{|x-1|} \cdot \frac{x-1}{\mid x-1 \mid} = \lim_{x\to 1^+} e^{|x-1|} \cdot (+1) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} e^{|x-1|} = e^{|1-1|} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f^{'}(x) = \lim_{\substack{x\to 1^- \\ x<1 \\ x-1<0}} e^{|x-1|} \cdot \frac{x-1}{\mid x-1 \mid} = \lim_{x\to 1^-} e^{|x-1|} \cdot (-1) =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -e^{|x-1|} = -e^{|1-1|} = -e^0 = -1.$$

Essendo $\lim\limits_{x\to 1^+} f^{'}(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f^{'}(x)$ finiti ma distinti, sostituendo nell'espressione di $f(x)$ il valore $x = 1$, si può affermare che il punto $M(1, 1)$ è un punto angoloso.
Calcoliamo ora i limiti per $x \to \pm\infty$ di $f(x)$. Si ha:

$$\lim_{x\to +\infty} e^{|x-1|} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{|x-1|} = +\infty.$$

Ma come il lettore potrà verificare, non vi sono asintoti obliqui.
Quindi a tal punto si può osservare che il punto $M(1, 1)$ è un punto di minimo relativo.
Determiniamo ora la derivata seconda, applicando la regola di derivazione per il prodotto tra due funzioni e il Teorema di derivazione della funzione composta.

$$f^{''}(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{|x-1|}\right) \cdot \frac{x-1}{\mid x-1 \mid} + e^{|x-1|} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{\mid x-1 \mid}\right)$$

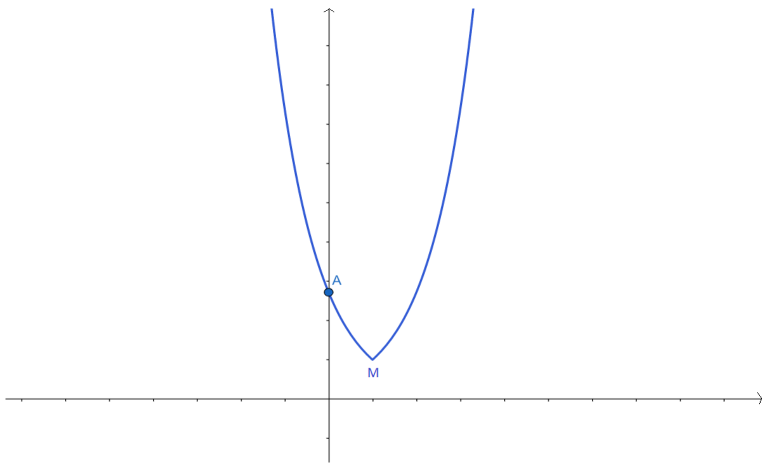
Per quanto visto in precedenza la quantità $\dfrac{x-1}{\mid x-1 \mid}$ è una costante, pertanto si ha che $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-1}{\mid x-1 \mid}\right) = 0.$

Quindi

$$f''(x) = e^{|x-1|} \cdot \frac{x-1}{|\ x-1\ |} \cdot \frac{x-1}{|\ x-1\ |} = e^{|x-1|} \cdot \frac{(x-1)^2}{|\ x-1\ |^2} =$$

$$= e^{|x-1|} \cdot \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = e^{|x-1|}.$$

Nei passaggi precedenti, sfruttando quella proprietà del valore assoluto secondo cui $|\ x\ |^2 = x^2$, si è posto $|\ x-1\ |^2 = (x-1)^2$.
Essendo $f''(x)$ pari a $e^{|x-1|}$, segue che essa è sempre strettamente positiva.
Dunque la funzione $f(x)$ è sempre convessa nel suo insieme di definizione.
Riportando tutte le informazioni raccolte sul piano cartesiano, segue che il grafico approssimato della funzione è di questo tipo.



1.4 Traccia 26 febbraio 2018 (B)

Studiare la funzione

$$f(x) = \log \left| \frac{x}{x+1} \right|$$

tracciandone il grafico approssimato.

Svolgimento

Poiché la funzione in esame è una funzione logaritmica e il suo argomento è dato dal valore assoluto di una funzione razionale fratta, per determinare il suo insieme di definizione, occorre considerare solo quello della funzione logaritmo (argomento strettamente positivo) e della funzione razionale fratta (denominatore diverso da zero), in quanto la funzione valore assoluto è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto bisogna imporre quanto segue.

$$\begin{cases} \left| \dfrac{x}{x+1} \right| > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Quindi $E_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0\}$.
Poiché E_f non è simmetrico rispetto a 0 certamente $f(x)$ non è né pari né dispari. Quindi non ha senso calcolare $f(-x)$.
Determiniamo le intersezioni con gli assi.
Partiamo con l'intersezione con l'asse delle ascisse. Consideriamo la seguente equazione.

$$\log \left| \frac{x}{x+1} \right| = 0$$

Ricordando il grafico della funzione logaritmo segue che essa è verificata solo quando

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| = 1.$$

Ricordando le proprietà del valore assoluto introdotte nel paragrafo 1.2 si ha che

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| = 1 \iff \frac{x}{x+1} = -1 \ \vee \ \frac{x}{x+1} = 1 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto, il grafico della funzione incontra l'asse x nel punto $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
Poiché $0 \notin E_f$ non ha senso determinare l'intersezione con l'asse delle ordinate. La funzione, quindi, non presenta alcuna intersezione con l'asse delle y.
Procediamo studiando il segno della funzione $f(x)$.
Ricordando il grafico della funzione logaritmo sappiamo che $\log(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1$. Pertanto per studiare il segno della funzione di partenza bisogna imporre la seguente disequazione:

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| \geq 1,$$

da cui (ricordando le proprietà del valore assoluto introdotte nel paragrafo 1.2),

$$\frac{x}{x+1} \leq -1 \ \vee \ \frac{x}{x+1} \geq 1 \Longleftrightarrow \frac{2x+1}{x+1} \leq 0 \ \vee \ \frac{-1}{x+1} \geq 0.$$

Risolvendo separatamente le due disequazioni (regola dei segni) e unendo la soluzione della prima disequazione con quella della seconda, segue che $f(x) \geq 0$ quando $x < 1 \ \vee \ -1 < x \leq \frac{1}{2}$.
Determiniamo ora la derivata prima, applicando il Teorema di derivazione della funzione composta.

$$f^{'}(x) = \frac{1}{\left|\frac{x}{x+1}\right|} \cdot \frac{\frac{x}{x+1}}{\left|\frac{x}{x+1}\right|} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \left|\frac{x+1}{x}\right| \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \left|\frac{x+1}{x}\right| \cdot \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Nei passaggi precedenti è stata sfruttata la proprietà del valore assoluto secondo cui $\mid x \mid^2 = x^2$.
La derivata prima è una funzione razionale fratta, quindi essa è definita per tutte le x che non annullano il denominatore. Pertanto $E_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$.
Poiché gli insiemi $E_{f'}$ e E_f sono uguali, segue che la funzione $f(x)$ è derivabile in tutto il suo dominio.
Studiando il segno della derivata prima segue che $f^{'}(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x(x+1) > 0$, ovvero quando $x < -1 \ \vee \ x > 0$.

Dallo studio del segno della derivata prima, deduciamo che la funzione è strettamente crescente per $x < -1$ e per $x > 0$, mentre è strettamente decrescente per $-1 < x < 1$.
Calcoliamo ora i limiti per $x \to \pm\infty$ di $f(x)$.
Prima di procedere osserviamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = \log|1| = \log(1) = 0.$$

La retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale.
Calcoliamo ora i limiti per $x \to -1^+$ e per $x \to -1^-$ di $f(x)$.
Prima di procedere osserviamo che

$$\lim_{\substack{x\to-1^+\\ x>-1\\ x+1>0}} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

e che

$$\lim_{\substack{x\to-1^+\\ x>-1\\ x+1>0}} \left|\frac{x}{x+1}\right| = \lim_{\substack{x\to-1^+\\ x>-1\\ x+1>0}} \left|x\cdot\frac{1}{x+1}\right| = |(-1)\cdot(+\infty)| = |-\infty| = +\infty.$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty,$$

segue che

$$\lim_{\substack{x\to-1^+\\ x>-1\\ x+1>0}} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = +\infty.$$

Analogamente

$$\lim_{\substack{x\to-1^-\\ x<-1\\ x+1<0}} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

e

$$\lim_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1 \\ x+1<0}} \left|\frac{x}{x+1}\right| = \lim_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1 \\ x+1<0}} \left|x\cdot\frac{1}{x+1}\right| = |(-1)\cdot(-\infty)| = |+\infty| = +\infty.$$

Pertanto

$$\lim_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1 \\ x+1<0}} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = +\infty.$$

La retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale.
Calcoliamo ora i limiti per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$ di $f(x)$.
Prima di procedere osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \left|\frac{x}{x+1}\right| = |0| = 0.$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty,$$

segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = -\infty.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to 0^-} \left|\frac{x}{x+1}\right| = |0| = 0.$$

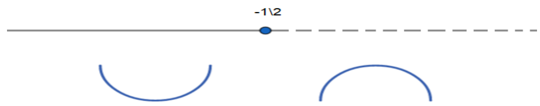
Pertanto

$$\lim_{x\to 0^-} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = -\infty.$$

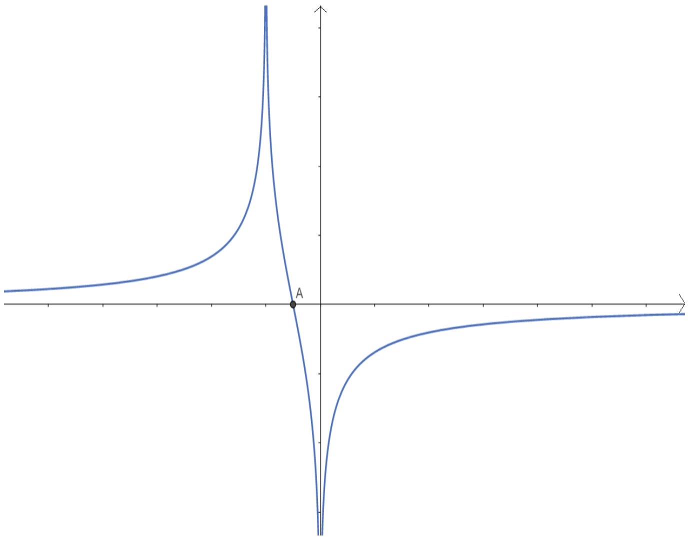
La retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale.
Determiniamo ora la derivata seconda, applicando la regola di derivazione per il quoziente tra due funzioni.

$$f''(x) = \frac{-(2x+1)}{x^2(x+1)^2}.$$

Dallo studio del segno della derivata seconda segue che $f''(x) \geq 0$ quando $x \leq -\frac{1}{2}$, con $x \neq -1$.



Deduciamo, quindi, che la funzione è convessa per $x < -\dfrac{1}{2}$, con $x \neq -1$, mentre è concava per $x > -\dfrac{1}{2}$, con $x \neq 0$. Il punto $A\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ è punto di flesso della funzione.
Riportando tutte le informazioni raccolte sul piano cartesiano, segue che il grafico approssimato della funzione è di questo tipo.



1.5 Traccia 4 marzo 2019 (A)

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$$

tracciandone il grafico approssimato.

Svolgimento

La funzione in esame è somma di due funzioni: un polinomio di grado 1, il quale è definito $\forall x \in \mathbb{R}$, e la radice quadrata di un polinomio di grado 2, la quale è definita solo quando il radicando è positivo.
Per determinare l'insieme di definizione della funzione di partenza consideriamo solo la condizione di esistenza della radice quadrata. Quindi, imponendo che $x^2 - 1 \geqslant 0$, segue che $E_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
Essendo il dominio simmetrico rispetto a 0, verifichiamo se $f(x)$ è pari o dispari. Calcoliamo

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} - x = \sqrt{x^2 - 1} - x.$$

Poiché $f(-x) \neq f(x)$, la funzione di partenza non è pari, inoltre, poiché $f(-x) \neq -f(x)$, la funzione di partenza non è neppure dispari.
Determiniamo le intersezioni con gli assi.
Partiamo con l'intersezione con l'asse delle ascisse. Consideriamo la seguente equazione

$$\sqrt{x^2 - 1} + x = 0,$$

la quale diventa $\sqrt{x^2 - 1} = -x$.
Ricordando quanto visto nel paragrafo 1.2, per risolvere tale equazione irrazionale, bisogna considerare il seguente sistema,

$$\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ x^2 - 1 = (-x)^2 \end{cases}$$

ove abbiamo certamente trascurato la condizione di esistenza della radice quadrata poiché già implicita nel campo di esistenza della funzione.
È immediato osservare che tale sistema non ammette soluzioni.

Quindi la funzione $f(x)$ non presenta intersezioni con l'asse x.
Poiché $0 \notin E_f$ non ha senso determinare l'intersezione con l'asse delle ordinate. La funzione, quindi, non presenta alcuna intersezione con l'asse delle y.
Procediamo studiando il segno della funzione $f(x)$.
Per lo studio del segno di $f(x)$ bisogna risolvere la seguente disequazione $\sqrt{x^2-1} \geqslant -x$. Ricordando quanto visto nel paragrafo 1.2, per risolvere tale disequazione irrazionale, bisogna considerare (trascurando sempre la condizione di esistenza della radice) il seguente sistema e la seguente disequazione.

$$\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ x^2-1 \geqslant (-x)^2 \end{cases} \qquad \text{e} \quad -x < 0$$

Il sistema non ammette soluzioni, mentre la disequazione ha come soluzione $x > 0$.
Poiché la funzione non è definita per $x \in]0, 1[$, si ha che $f(x) \geq 0$ quando $x \geq 1$.
Procediamo calcolando la derivata prima.

$$f^{'}(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right) + 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1.$$

La derivata prima è una funzione data dalla somma di due funzioni. La prima è una funzione costante, la quale è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, la seconda è $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, la quale è definita per tutte le x che non annullano il denominatore e soddisfano la condizione di esistenza della radice quadrata.
Pertanto per determinare l'insieme di definizione della derivata prima dobbiamo imporre che $x^2-1 > 0$; da questo segue che $E_{f'} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
Dallo studio del segno della derivata prima segue che $f^{'}(x) \geq 0 \iff \sqrt{x^2-1} > -x$, ovvero quando $x > 1$.

Dunque, deduciamo che la funzione è strettamente crescente per $x > 1$ e strettamente decrescente per $x < -1$. Sostituendo nell'espressione di $f(x)$ i valori $x = -1$ e $x = 1$, segue che il punto $A(-1, -1)$ è un punto di minimo

assoluto, mentre il punto $B(1,1)$ è un punto di minimo relativo. Analizzando gli insiemi $E_{f'}$ e E_f, emerge che la funzione $f(x)$ è continua in $x=-1$ e $x=1$, ma in tali punti non è dotata di derivata prima.
Per classificare i punti di non derivabilità per f, calcoliamo i limiti per $x\to 1^+$ e per $x\to 1^-$ di $f'(x)$.
Prima di procedere osserviamo che

$$\lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1\\ x^2-1>0}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$

e che

$$\lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1\\ x^2-1>0}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} x \cdot \lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1\\ x^2-1>0}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 1\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1\\ x^2-1>0}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1 = +\infty + 1 = +\infty.$$

Analogamente osservando che

$$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1\\ x^2-1>0}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$

e che

$$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1\\ x^2-1>0}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^-} x \cdot \lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1\\ x^2-1>0}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 1\cdot(+\infty) = +\infty,$$

segue che

$$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1\\ x^2-1>0}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1 = +\infty + 1 = +\infty.$$

La retta di equazione $x=-1$ è la tangente a destra alla curva di equazione $y=f(x)$ nel punto $A(-1,-1)$, mentre la retta di equazione $x=1$ è la tangente a sinistra alla curva di equazione $y=f(x)$ nel punto $B(1,1)$.
Calcoliamo ora il limite per $x\to-\infty$ di $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} + x = +\infty - \infty.$$

Avendo ottenuto una forma indeterminata, per risolvere tale limite, si procede razionalizzando.

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

La retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro.
Calcoliamo ora il limite per $x \to +\infty$ di $f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}+x = +\infty + \infty = +\infty.$$

Poiché tale limite non è finito, verifichiamo se esiste o meno un asintoto obliquo destro.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} + 1 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 = 2;$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x =$$

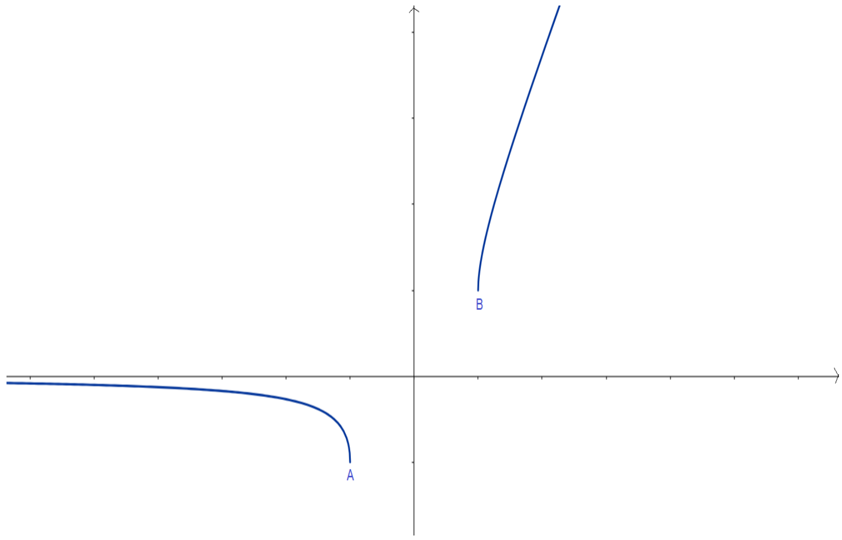
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{(\sqrt{x^2-1}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Poiché tali limiti esistono e sono finiti, la retta di equazione $y = mx + q$, ovvero $y = 2x$, è un asintoto obliquo destro.
Quindi a tal punto si può osservare che il punto $A(-1,-1)$ è un punto di minimo assoluto, mentre il punto $B(1,1)$ è un punto di minimo relativo.
Determiniamo ora la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - \left(x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right)}{(\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}.$$

Dallo studio del segno della derivata seconda emerge che $f''(x) \geq 0 \iff -(x^2-1) > 0$. Quindi la funzione è concava nel suo insieme di definizione. Riportando tutte le informazioni raccolte sul piano cartesiano, segue che il grafico approssimato della funzione è di questo tipo.



Capitolo 2

Integrali

2.1 Richiami di teoria

Definizione 2.1. Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si definisce **primitiva** di f su $[a, b]$ una funzione G tale che $\forall x \in [a, b]$ si abbia:

$$G^{'}(x) = f(x).$$

Osservazione 2.1. Se G è una primitiva di f, allora lo è anche $G + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Infatti se G_1 e G_2 sono due primitive di f su $[a, b]$, allora $G_1^{'} - G_2^{'} = 0$, quindi $(G_1 - G_2)^{'} = 0$. Dunque dal teorema di Lagrange segue che $G_1 - G_2 = costante$.

Definizione 2.2. Se $a > b$ e $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, definiamo

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx;$$

poniamo poi $\int_a^a f(x)\, dx = 0$. Il numero reale $\int_a^b f(x)\, dx$ viene detto **integrale definito** da a a b di f.

Teorema 2.1. *(Teorema fondamentale del calcolo integrale) Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e sia G una sua primitiva su $[a, b]$. Allora:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

Osservazione 2.2. Per ogni primitiva G di f, la differenza $G(b) - G(a)$ si suole denotare con il simbolo $\Big[G(x)\Big]_a^b$. Segue:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_a^b.$$

Definizione 2.3. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. L'insieme delle primitive di f si chiama **integrale indefinito** di f e si denota con il simbolo:

$$\int f(x)\,dx.$$

Osservazione 2.3. Come conseguenza dell'osservazione 2.1, denotata con G una primitiva di f, risulta:

$$\int f(x)\,dx = G(x) + c \quad \text{ove} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Il calcolo dell'integrale è dunque ricondotto al calcolo delle primitive. Pertanto si usa dire che integrazione e derivazione sono operazioni inverse.

2.2 Integrali immediati

Ricordando le derivate delle funzioni elementari, risultano immediati i seguenti integrali.

Funzione	Primitive
k (costante)	$kx + c$
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\dfrac{a^x}{\log a} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$

Le formule precedenti possono essere generalizzate utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte. Si ottengono così le seguenti formule.

Funzione	Primitive
$[f(x)]^\alpha \, f'(x)$	$\dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\log\|f(x)\| + c$
$e^{f(x)}f'(x)$	$e^{f(x)} + c$
$a^{f(x)}f'(x)$	$\dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + c$
$\sin[f(x)]f'(x)$	$-\cos[f(x)]x + c$
$\cos[f(x)]f'(x)$	$\sin[f(x)] + c$
$\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$	$\arctan[f(x)] + c$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	$\arcsin[f(x)] + c$
$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	$\arccos[f(x)] + c$
$\dfrac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}$	$\tan[f(x)] + c$
$\dfrac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}$	$-\cot[f(x)] + c$

Procediamo con la risoluzione dei seguenti integrali tratti dalle tracce.

▶ Traccia 13 novembre 2018 (B)

Calcolare l'integrale tra $-\pi/4$ e $\pi/4$ di $g(x) = \tan x$.

Svolgimento

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

Dal momento che $D(\cos x) = -\sin x$, a meno di un segno la funzione presente al numeratore è pari alla derivata prima della funzione presente al denominatore.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int_{\pi/4}^{\pi/4} \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\Big[\log|\cos x|\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= -\Big(\log|\cos(\pi/4)| - \log|\cos(-\pi/4)|\Big).$$

Sfruttando la parità della funzione $\cos x$, si ha che $\cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4)$, da cui $\log|\cos(-\pi/4)| = \log|\cos(\pi/4)|$.
Pertanto segue che:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx = 0.$$

▶ Traccia 24 aprile 2018 (B)

Calcolare l'integrale tra 0 e 1 di $g(x) = |x^2 - 2|$.

Svolgimento

Osserviamo se possiamo risolvere l'integrale, togliendo il valore assoluto.

$$|x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se} \quad x^2 - 2 \geqslant 0 \\ -(x^2 - 2) & \text{se} \quad x^2 - 2 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se} \quad x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ x \geq \sqrt{2} \\ -(x^2 - 2) & \text{se} \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Quando $x \in [0, 1]$ allora $|x^2 - 2| = -(x^2 - 2)$.
Procediamo, dunque, con la risoluzione dell'integrale.

$$\int_0^1 |x^2 - 2| \, dx = \int_0^1 -(x^2 - 2) \, dx = \int_0^1 -x^2 + 2 \, dx =$$

$$= -\int_0^1 x^2 \, dx + 2\int_0^1 dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\Big[x\Big]_0^1.$$

Segue che:

$$\int_0^1 |x^2 - 2| = \frac{5}{3}.$$

▶ Traccia 27 maggio 2019 (A)

Calcolare l'integrale tra 1 e 2 di $g(x) = e^{|x-1|}$.

Svolgimento

Osserviamo se possiamo risolvere l'integrale, togliendo il valore assoluto.

$$e^{|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se} \quad x - 1 \geqslant 0 \\ e^{-(x-1)} & \text{se} \quad x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se} \quad x \geqslant 1 \\ e^{-(x-1)} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Quando $x \in [1,2]$ allora $e^{|x-1|} = e^{x-1}$.
Procediamo, dunque, con la risoluzione dell'integrale.

$$\int_1^2 e^{|x-1|}\,dx = \int_1^2 e^{x-1}\,dx = \left[e^{x-1}\right]_1^2 = e - 1.$$

La seconda uguaglianza discende dal fatto che $D(x-1) = 1$.

▶ **Traccia 3 dicembre 2018 (B)**

Calcolare l'integrale tra 1 e 2 di $g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+3}$.

Svolgimento

$$\int_1^2 \sqrt{x-1} - \sqrt{x+3}\,dx = \int_1^2 \sqrt{x-1}\,dx - \int_1^2 \sqrt{x+3}\,dx =$$

$$= \int_1^2 (x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_1^2 (x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \left[\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \approx -1,45.$$

La terza uguaglianza discende dal fatto che $D(x-1) = 1$ e $D(x+3) = 1$

2.3 Integrazione delle funzioni razionali

Una **funzione razionale** è una funzione del tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi, rispettivamente di grado n e m. Ci occupiamo ora di capire come integrare funzioni di questa tipologia scindendo vari casi a seconda del grado del numeratore e del denominatore.

- Supponiamo dapprima che $n < m$.

I caso : *il denominatore è di primo grado* $(m = 1)$. Come visto nel paragrafo precedente, in questo caso l'integrale si calcola facilmente mediante il logaritmo, e la formula generale è:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c,$$

in quanto si osserva che $D(ax+b) = a$.

II caso : *il denominatore è di secondo grado* $(m = 2)$. In questo caso l'integrale è del tipo $\displaystyle\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$ e per risolverlo bisogna distinguere 3 casi, a seconda del valore del discriminante del denominatore.

$\Delta > 0$. In questo caso, il polinomio al denominatore è scomponibile in fattori lineari. Dette x_1 e x_2 le sue radici, sappiamo che:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Per semplicità supponiamo che $a = 1$. Se $a \neq 1$ possiamo mettere in evidenza a e applicare quanto faremo al polinomio $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}$.
Procediamo scomponendo la funzione integranda in fratti semplici, ovvero decomponendola nella somma di due frazioni con denominatore di grado 1 :

$$\frac{px+q}{x^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

A e B sono due costanti che si determinano applicando il **principio di identità dei polinomi**.

Noti i valori di A e B l'integrale di partenza si scriverà come somma di due integrali i quali possono essere risolti applicando quanto detto nel *I caso*.
Procediamo analizzando il seguente esempio.

- **Traccia 11 settembre 2018 (B)**

Calcolare l'integrale tra 0 e 1 di $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che il polinomio al denominatore è di grado 2, $\Delta = 9 > 0$. Poiché $a = 1$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$,

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$$

Procediamo scomponendo la funzione integranda in fratti semplici.

$$\frac{x}{x^2 - x - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2},$$

ove A e B sono le costanti da determinare.

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}.$$

Consideriamo l'uguaglianza ottenuta.

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}.$$

Affinché essa sia verificata i numeratori delle due frazioni devono essere identici. Eguagliamo i coefficienti dei termini aventi lo stesso grado (**principio di identità dei polinomi**). Deve quindi verificarsi che:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Procediamo con la risoluzione dell'integrale di partenza.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-x-2}dx = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x-2)}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx +$$

$$+\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{3}\Big[\log|x+1|\Big]_0^1 + \frac{2}{3}\Big[\log|x-2|\Big]_0^1 \approx 0,23.$$

$\Delta = 0.$ In questo caso, il polinomio al denominatore ha due radici coincidenti, ovvero $x_1 = x_2$. Sappiamo che:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)^2.$$

Per semplicità supponiamo che $a = 1$. Se $a \neq 1$ possiamo mettere in evidenza a e applicare quanto faremo al polinomio $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$.
Procediamo scomponendo la funzione integranda in fratti semplici, ovvero in usa somma del tipo:

$$\frac{px+q}{x^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}.$$

A e B sono due costanti che si determinano applicando il **principio di identità dei polinomi**.
Noti i valori di A e B l'integrale di partenza si scriverà come somma di due integrali i quali possono essere risolti applicando quanto detto nel *I caso* e nel paragrafo precedente.
Procediamo analizzando il seguente esempio.

▶ **Traccia 16 ottobre 2018 (A)**

Calcolare l'integrale tra 0 e 1 di $g(x) = \dfrac{x-2}{(x+2)^2}$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che il polinomio al denominatore è di grado 2, $\Delta = 0$. Inoltre $a = 1$, $x_1 = x_2 = -2$, e il polinomio è già decomposto in prodotto di fattori lineari.
Procediamo scomponendo la funzione integranda in

fratti semplici.

$$\frac{x-2}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2},$$

ove A e B sono le costanti da determinare.

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}.$$

Consideriamo l'uguaglianza ottenuta.

$$\frac{x-2}{(x+2)^2} = \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}.$$

Affinché essa sia verificata i numeratori delle due frazioni devono essere identici. Eguagliamo i coefficienti dei termini aventi lo stesso grado (**principio di identità dei polinomi**). Deve quindi verificarsi che:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = -4 \end{cases}$$

Procediamo con la risoluzione dell'integrale di partenza.

$$\int_0^1 \frac{x-2}{(x+2)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx - 4\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2}dx =$$

$$= \Big[\log|x+2|\Big]_0^1 - 4\left[\frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1}\right]_0^1 \approx -0.26.$$

$\Delta < 0$. In questo caso non esistono radici reali del polinomio al denominatore, pertanto esso non è scomponibile in fattori lineari. Per semplicità supponiamo che $a = 1$. Se $a \neq 1$ possiamo mettere in evidenza a e applicare quanto faremo al polinomio $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$.
Se il polinomio al numeratore ha grado 0, ovvero è una costante, il polinomio al denominatore si può esprimere come somma di due quadrati:

$$x^2 + bx + c = (x+k)^2 + m,$$

ove k e m sono due costanti che si determinano applicando il **principio di identità dei polinomi**.
Dunque l'integrale di partenza può essere ricondotto alla forma:

$$\int \frac{1}{(x+k)^2+m}dx.$$

Tale integrale, mettendo opportunamente in evidenza le costanti, si può ricondurre al seguente integrale (già visto nel paragrafo precedente):

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}dx.$$

Se, invece,il polinomio al numeratore ha grado 1, si spezza la frazione in due addendi, di cui uno presenta al numeratore la derivata del denominatore (ottenendo, così, un integrale logaritmico), mentre l'altro ha un numeratore costante e si riconduce alla forma sopra esaminata.
Per maggior chiarezza procediamo analizzando i seguenti esempi.

- ▶ **Traccia 4 marzo 2019 (A)**

  Calcolare l'integrale tra 0 e 1 di $g(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$.

  Svolgimento

  Per prima cosa osserviamo che il polinomio al denominatore è di grado 2, $\Delta = -16 < 0$, mentre il numeratore ha grado 0 (è una costante). Inoltre il denominatore è già scritto nella forma $(x+k)^2+m$, ove $k = 0$ e $m = 4$.
  Procediamo con la risoluzione dell'integrale, ricordando che tutti i passaggi saranno effettuati con il fine di ottenere un integrale della forma:

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}dx.$$

Quindi:

$$\int_0^1 \frac{2}{x^2+4}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 \approx 0,46.$$

► **Esercizio N. 4.50 tratto dal libro "Esercitazioni di Matematica", di P. Marcellini e C. Sbordone.**

Calcolare l'integrale tra 0 e 1 di $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che il polinomio al denominatore è di grado 2, $\Delta = -3 < 0$, mentre il numeratore ha grado 1.
Scomponiamo la funzione integranda nella somma di due opportune frazioni algebriche: la prima delle due dovrà avere per numeratore la derivata del denominatore, cioè $2x+1$, mentre la seconda un numeratore costante.

$$\frac{3x+2}{x^2+x+1} = 3\frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+x+1} = 3\frac{(2x)\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+x+1} = \frac{3}{2}\frac{2x+\frac{4}{3}+1-1}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{2x+1+\frac{1}{3}}{x^2+x+1} = \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{\frac{1}{3}}{x^2+x+1}.$$

Procediamo con la risoluzione dell'integrale:

$$\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

Il primo integrale è immediato:

$$\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\Big[\log|x^2+x+1|\Big]_0^1.$$

Consideriamo ora solo il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

Per risolverlo scriviamo il denominatore nella forma $(x+k)^2+m = x^2+k^2+2kx+m$. Affinché i polinomi x^2+x+1 e $x^2+2kx+k^2+m$ siano uguali, applico il principio di identità dei polinomi, per trovare i valori di m e k.

$$\begin{cases} 2k = 1 \\ k^2+m = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ m = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Segue che:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Come fatto in precedenza, ricordiamo che tutti i passaggi saranno effettuati con il fine di ottenere un integrale della forma:

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}dx.$$

Quindi:

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right]_0^1.$$

Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti, si ha che:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\Big[\log|x^2+x+1|\Big]_0^1 +$$

$$+\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right]_0^1 \approx 1,95.$$

III *caso* : *il denominatore è di grado maggiore di 2* ($m > 2$). In questo caso è sempre possibile decomporre il denominatore nel prodotto di polinomi di grado 1 oppure di grado 2 (questi ultimi sono privi di radici reali, ovvero sono caratterizzati dal $\Delta < 0$). Fatto questo, si decompone la funzione integranda applicando la seguente proposizione (caso generale, che ingloba anche i casi analizzati precedentemente).

Proposizione 2.1. *(Decomposizione in fratti semplici) Sia la funzione razionale* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *ove* $P(x)$ *e* $Q(x)$ *sono due polinomi, rispettivamente di grado* n *e* m, *con* $n < m$. *Supponiamo che* $Q(x)$ *abbia la seguente fattorizzazione in* $\mathbb{R}$*:*

$$Q(x) = (x-x_1)^{r_1}...(x-x_h)^{r_h}(x^2+a_1x+b_1)^{s_1}...(x^2+a_lx+b_l)^{s_l},$$

ove $x_i \in \mathbb{R}$ *per* $i = 1...h$ *e* $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ *per* $j = 1...l$ *e il trinomio* $x^2+a_jx+b_j$ *non ha radici reali.*

Allora si possono trovare n numeri reali

$$A_{1,1}, \dots, A_{1,r_1} \dots, A_{h,1}, \dots, A_{h,r_h}$$
$$B_{1,1}, C_{1,1}, \dots, B_{1,s_1}, C_{1,s_1}, \dots, B_{l,1}, C_{l,1}, \dots, B_{l,s_l}, C_{l,s_l}$$

tali che

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,r_1}}{(x-x_1)^{r_1}} + \\ &+ \dots + \\ &\frac{A_{h,1}}{x-x_h} + \frac{A_{h,2}}{(x-x_h)^2} + \dots + \frac{A_{h,r_h}}{(x-x_h)^{r_h}} + \\ &\frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+a_1x+c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2+a_1x+c_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,s_1}x + C_{1,s_1}}{(x^2+a_1x+c_1)^{s_1}} + \\ &+ \dots + \\ &\frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{x^2+a_lx+c_l} + \frac{B_{l,2}x + C_{l,2}}{(x^2+a_lx+c_l)^2} + \dots + \frac{B_{l,s_l}x + C_{l,s_l}}{(x^2+a_lx+c_l)^{s_l}}.\end{aligned}$$

Procediamo analizzando i seguenti esempi.

▶ **Traccia 2 maggio 2019 (A)**

Calcolare l'integrale tra 2 e 3 di $g(x) = \dfrac{x-2}{x^3-x}$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che il polinomio al denominatore è di grado 3 ed è scomponibile nel prodotto di tre fattori lineari:

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1).$$

Procediamo scomponendo la funzione integranda in fratti semplici.

$$\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1},$$

ove A, B e C sono le costanti da determinare.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x-1)(x+1)}.$$

Consideriamo l'uguaglianza ottenuta.

$$\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x-1)(x+1)}.$$

Affinché essa sia verificata i numeratori delle due frazioni devono essere identici. Eguagliamo i coefficienti dei termini aventi lo stesso grado (**principio di identità dei polinomi**). Deve quindi verificarsi che:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1=-2 \\ -A=-2 \end{cases} \implies \begin{cases} A=2 \\ B=-\dfrac{1}{2} \\ C=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Procediamo con la risoluzione dell'integrale di partenza.

$$\int_2^3 \frac{x-2}{x^3-x}dx = 2\int_2^3 \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{(x-1)}dx = -\frac{3}{2}\int_2^3 \frac{1}{(x+1)}dx =$$

$$= 2\Big[\log|x|\Big]_2^3 - \frac{1}{2}\Big[\log|x-1|\Big]_2^3 - \frac{3}{2}\Big[\log|x+1|\Big]_2^3 \approx 0,033.$$

▶ Traccia 11 settembre 2018 (A)

Calcolare l'integrale tra -1 e 0 di $g(x)=\dfrac{x}{x^3-1}$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che il polinomio al denominatore è di grado 3 ed è scomponibile in tal modo:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1),$$

ove il polinomio $x^2 + x + 1$ ha grado 2 e non ha radici reali ($\Delta = -3 < 0$).
Procediamo scomponendo la funzione integranda in fratti semplici

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

ove A, B e C sono le costanti da determinare. Poiché $x^2 + x + 1$ è un polinomio di grado 2 irriducibile, nella seconda frazione, al numeratore corrispondente, dobbiamo porre un generico polinomio di grado 1, $Bx + C$.

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Consideriamo l'uguaglianza ottenuta

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Affinché essa sia verificata i numeratori delle due frazioni devono essere identici. Eguagliamo i coefficienti dei termini aventi lo stesso grado (**principio di identità dei polinomi**). Deve quindi verificarsi che:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{1}{3} \\ C = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Procediamo con la risoluzione dell'integrale di partenza.

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x}{x-1}dx + \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx$$

Il primo integrale è immediato:

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x}{x-1}dx = \frac{1}{3}\Big[\log|x-1|\Big]_{-1}^{0}.$$

Consideriamo ora solo il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx.$$

Scomponiamo la funzione integranda nella somma di due opportune frazioni algebriche: la prima delle due dovrà avere per numeratore la derivata del denominatore, cioè $2x+1$, mentre la seconda un numeratore costante.

$$\frac{-x+1}{x^2+x+1} = \frac{-x+1+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{x^2+x+1} = \frac{-x-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Segue

$$\int_{-1}^{0} \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

Anche in tal caso il primo integrale è immediato:

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{2}\Big[\log|x^2+x+1|\Big]_{-1}^{0} = 0.$$

In realtà l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

è stato già risolto in precedenza (esercizio tratto dal libro "Esercitazioni di Matematica"). Quindi, applicando un risultato precedente emerge che

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] \right]_{-1}^{0}.$$

Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti, otteniamo:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \Big[\log |x-1| \Big]_{-1}^{0} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] \right]_{-1}^{0} \approx 0,37.$$

- Supponiamo ora che $n \geq m$.
  In tal caso si può eseguire la divisione euclidea tra i polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, ottenendo che

  $$P(x) = Q(x)V(x) + R(x),$$

  ove $Q(x)$ e $R(x)$ sono due polinomi, chiamati rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di $P(x)$ per $Q(x)$. Inoltre $R(x)$ può essere un polinomio nullo, mentre se $R(x) \neq 0$, detto r il suo grado, segue che $r < m$.
  Sostituendo tale risultato nell'integrale di partenza, esso può essere scritto nella seguente forma:

  $$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{Q(x)V(x) + R(x)}{Q(x)} dx = \int V(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

  Il primo integrale è facilmente risolvibile dal momento che la funzione $V(x)$ è un polinomio, mentre il secondo si risolve applicando quanto visto in precedenza in quanto la funzione integranda è razionale e il polinomio al numeratore è di grado inferiore a quello del polinomio posto al denominatore ($r < m$).
  Procediamo analizzando il seguente esempio.

▶ **Traccia 21 gennaio 2019 (B)**

Calcolare l'integrale tra 0 e 1 di $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2+1}$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che sia il polinomio posto al numeratore sia quello posto al denominatore sono di grado 2. Eseguiamo la divisione euclidea tra i polinomi $x^2 - x - 2$ e $x^2 + 1$.

$x^2 - x - 2$	$x^2 + 1$
$x^2 + 0x + 1$	1
$-x - 3$	

Dunque $V(x) = 1$ e $R(x) = -x - 3$, ovvero $x^2 - x - 2 = (x^2+1)1+(-x-3)$. Sostituiamo tale risultato nell'integrale di partenza.

$$\int_0^1 \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{-x - 3}{x^2 + 1} dx.$$

Si osserva facilmente che a tale risultato si poteva giungere aggiungendo $+1$ e -1 direttamente al polinomio $x^2 - x - 2$ (senza effettuare la divisione euclidea).
Procediamo osservando che il primo integrale ottenuto è immediato

$$\int_0^1 dx = \Big[x\Big]_0^1 = 1,$$

mentre il secondo rientra nel *II caso*, infatti il polinomio posto al denominatore è di grado 2 e $\Delta = -4 < 0$.

$$\int_0^1 \frac{-x - 3}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{-x}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{-3}{x^2 + 1} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx - 3 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{2} \Big[\log|x|\Big]_0^1 - 3 \Big[\arctan(x)\Big]_0^1.$$

Mettendo insieme tutti i risultati ricavati, segue che

$$\int_0^1 \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 1} dx = 1 - \frac{1}{2} \Big[\log|x|\Big]_0^1 - 3 \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 \approx -1,702.$$

2.4 Integrazione per parti

Teorema 2.2. ***(Regola di integrazione definita per parti)*** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, intervallo. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzione continue con le loro derivate prime in I, per ogni $a, b \in I$ si ha:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx.$$

► **Esercizio N. 4.68 tratto dal libro "Esercitazioni di Matematica", di P. Marcellini e C. Sbordone.**

Calcolare l'integrale tra 0 e 1 di $h(x) = \arctan x$.

Svolgimento

Consideriamo

$$\int_0^1 \arctan x\, dx.$$

Osserviamo

$$f(x) = \arctan x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{e} \quad g'(x) = 1 \longrightarrow g(x) = x.$$

Applicando la regola di integrazione definita per parti, si ha:

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = \Big[x \ \arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx =$$

$$= \Big[x \ \arctan x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \Big[x \ \arctan x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\log|x^2+1|\Big]_0^1 \approx 0,44.$$

► **Esercizio N. 4.68 tratto dal libro "Esercitazioni di Matematica", di P. Marcellini e C. Sbordone.**

Calcolare l'integrale tra 1 e 2 di $h(x) = \log x$.

Svolgimento

Consideriamo
$$\int_1^2 \log x \; dx.$$
Osserviamo
$$f(x) = \log x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g'(x) = 1 \longrightarrow g(x) = x.$$
Applicando la regola di integrazione definita per parti, si ha:
$$\int_1^2 \log x \; dx = \Big[x \; \log x\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{x} \; dx =$$
$$= \Big[x \; \log x\Big]_1^2 - \int_1^2 dx = \Big[x \; \log x\Big]_1^2 - \Big[x\Big]_1^2 \approx 0,37.$$

▶ **Esercizio N. 4.69 tratto dal libro "Esercitazioni di Matematica", di P. Marcellini e C. Sbordone.**

Calcolare l'integrale tra 1 e 2 di $h(x) = x^2 e^x$.

Svolgimento

Consideriamo
$$\int_1^2 x^2 e^x \; dx.$$
Osserviamo
$$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x \quad \text{e} \quad g'(x) = e^x \longrightarrow g(x) = e^x.$$
Applicando la regola di integrazione definita per parti, si ha:
$$\int_1^2 x^2 e^x \; dx = \Big[x^2 e^x\Big]_1^2 - 2\int_1^2 x e^x \; dx.$$
Risolviamo singolarmente il seguente integrale
$$\int_1^2 x e^x \; dx.$$
Osserviamo
$$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1 \quad \text{e} \quad g'(x) = e^x \longrightarrow g(x) = e^x.$$

Applicando la regola di integrazione definita per parti, si ha:

$$\int_1^2 xe^x\ dx = \Big[xe^x\Big]_1^2 - \int_1^2 e^x\ dx = \Big[xe^x\Big]_1^2 - [e^x]_1^2.$$

Mettendo insieme i risultati ottenuti si ha:

$$\int_1^2 x^2e^x\ dx = \Big[x^2e^x\Big]_1^2 - 2\Big[xe^x\Big]_1^2 + 2\Big[e^x\Big]_1^2 \approx 12,04.$$

▶ **Traccia 27 maggio 2019 (B)**

Calcolare l'integrale tra 2 e 3 di $h(x) = \log|x-1|$.

Svolgimento

Osserviamo se possiamo risolvere l'integrale, togliendo il valore assoluto.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x-1 \geqslant 0 \\ -(x-1) & \text{se} \quad x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Quando $x \in [2,3]$ allora $|x-1| = x-1$.
Procediamo, dunque, con la risoluzione dell'integrale.

$$\int_2^3 \log|x-1|\ dx = \int_2^3 \log(x-1)\ dx.$$

Osserviamo

$$f(x) = \log(x-1) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{e} \quad g'(x) = 1 \longrightarrow g(x) = x.$$

Applicando la regola di integrazione definita per parti, si ha:

$$\int_2^3 \log(x-1)\ dx = \Big[x\ \log(x-1)\Big]_2^3 - \int_1^2 \frac{x}{x-1} dx =$$

$$= \Big[x\ \log(x-1)\Big]_2^3 - \int_2^3 \frac{x+1-1}{x-1} dx = \Big[x\ \log(x-1)\Big]_2^3 - \int_2^3 dx +$$

$$- \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = \Big[x\ \log(x-1)\Big]_2^3 - \Big[x\Big]_2^3 - \Big[\log(x-1)\Big]_2^3 \approx 0,39.$$

2.5 Integrazione per sostituzione

Teorema 2.3. ***(Regola di integrazione definita per sostituzione)*** *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, intervalli. Siano assegnate due funzioni*

$$f : X \to \mathbb{R} \quad e \quad \varphi : Y \to X,$$

la prima continua continua in X e la seconda dotata di derivata prima continua in Y. Allora, per ogni $a, b \in \varphi(Y)$, denotati con α e β due punti di Y tali che $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

► **Esercizio N. 4.107 tratto dal libro "Esercitazioni di Matematica", di P. Marcellini e C. Sbordone.**

Calcolare l'integrale di $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$.

Svolgimento

Consideriamo

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} dx.$$

Poniamo

$$t = \sqrt{x} \longrightarrow dt = \frac{1}{2x} dx \longrightarrow dx = 2tdt.$$

Applicando la regola di integrazione definita per sostituzione, si ha:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} dx = \int \frac{t}{2+t} 2t\, dt = 2 \int \frac{t^2}{2+t} dt.$$

Osserviamo che il polinomio posto al numeratore ha grado maggiore rispetto a quello posto al denominatore, pertanto effettuiamo la divisone euclidea tra i polinomi t^2 e $2+t$.

$$
\begin{array}{r|l}
t^2+0t+0 & t+2 \\ \hline
t^2+2t & t-2 \\ \hline
-2t+0 & \\
-2t-4 & \\ \hline
4 &
\end{array}
$$

Dunque $V(x) = t - 2$ e $R(x) = 4$, ovvero $t^2 = (2+t)(t-2)+4$. Sostituiamo tale risultato nell'integrale ottenuto.

$$2\int \frac{t^2}{2+t}dt = 2\int (t-2)\,dt + 2\int \frac{4}{2+t}dt = 2\int t\,dt - 4\int dt +$$

$$+8\int \frac{1}{2+t}dt = 2\frac{t^2}{2} - 4t + 8\log|2+t| + c.$$

Ricordando che abbiamo posto $t = \sqrt{x}$, segue:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx = x - 4\sqrt{x} + 8\log|2+\sqrt{x}| + c.$$

▶ **Traccia 27 maggio 2019 (B)**

Calcolare l'integrale tra 0 e 1 di $h(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}$.

Svolgimento

Consideriamo

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}dx.$$

Poniamo

$$t = e^{2x} \longrightarrow dt = 2e^{2x}dx \longrightarrow dx = \frac{1}{2t}dt.$$

Inoltre osserviamo che

$$t = 1 \quad \text{quando} \quad x = 0; \qquad t = e^2 \quad \text{quando} \quad x = 1.$$

Applicando la regola di integrazione definita per sostituzione, si ha:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}dx = \int_1^{e^2} \frac{t-1}{t+2}\frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{t-1}{t(t+2)}dt.$$

Consideriamo il seguente integrale

$$\int_1^{e^2} \frac{t-1}{t(t+2)}dt.$$

Il polinomio posto al denominatore ha grado maggiore rispetto a quello posto al numeratore; il polinomio posto al denominatore ha grado 2, $\Delta > 0$.
Procediamo scomponendo la funzione integranda in fratti semplici.

$$\frac{t-1}{t(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2},$$

ove A e B sono le costanti da determinare.

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t)}{t(t+2)} = \frac{(A+B)t+2A}{t(t+2)}.$$

Consideriamo l'uguaglianza ottenuta.

$$\frac{t-1}{t(t+2)} = \frac{(A+B)t+2A}{t(t+2)}.$$

Affinché essa sia verificata i numeratori delle due frazioni devono essere identici. Eguagliamo i coefficienti dei termini aventi lo stesso grado (**principio di identità dei polinomi**). Deve quindi verificarsi che:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A=-1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-\dfrac{1}{2} \\ B=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Procediamo con la risoluzione dell'integrale.

$$\int_1^{e^2} \frac{t-1}{t(t+2)}dt = -\frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{1}{t}dt + \frac{3}{2}\int_1^{e^2} \frac{1}{t+2}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\log|t|\Big]_1^{e^2} + \frac{3}{2}\Big[\log|t+2|\Big]_1^{e^2}.$$

Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti si ha:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}dx = -\frac{1}{4}\Big[\log|t|\Big]_1^{e^2} + \frac{3}{4}\Big[\log|t+2|\Big]_1^{e^2} \approx 0,37.$$

Capitolo 3

Serie numeriche

3.1 Richiami di teoria

Definizione 3.1. Sia B un insieme. Si dice **successione** a valori in B una qualsiasi funzione

$$a : \mathbb{N} \to B.$$

Il valore della successione a nel punto n si scrive a_n anziché $a(n)$. Per indicare l'intera successione data si usa la scrittura $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Se $A = \mathbb{R}$, si parla di **successione di numeri reali**.

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si denota con il simbolo (abuso di notazione)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

la *serie di termine generale* a_n.

Tale serie può:

- convergere, ovvero:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}.$$

- divergere positivamente, ovvero (abuso di notazione):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty.$$

- divergere negativamente, ovvero (abuso di notazione):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\infty.$$

- essere irregolare, ovvero (abuso di notazione):

$$\nexists \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Teorema 3.1. *(**Condizione necessaria per la convergenza**) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si ha:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \textit{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Osservazione 3.1. Per il teorema precedente non è vero il viceversa: può accadere, infatti, che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ anche se la serie non converge. Tuttavia tale teorema risulta essere molto utile nella forma negativa:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ non converge.}$$

Proposizione 3.1. *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali.*
Se le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \qquad (1)$$

sono convergenti, allora anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) \qquad (2)$$

è convergente e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n+\sum_{n=0}^{+\infty}b_n.$$

Se le serie (1) *sono divergenti con lo stesso segno, allora anche la serie* (2) *è divergente.*
Se una delle serie (1) *è divergente e l'altra è convergente, allora la serie* (2) *è divergente.*

Proposizione 3.2. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali e sia* $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$. *Le serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n)$$

hanno lo stesso comportamento. In particolare, se convergono, risulta anche:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

Proposizione 3.3. *Siano* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *due successioni di numeri reali. Se i termini delle serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty}b_n$$

differiscono solo per un numero finito di indici, le serie hanno lo stesso carattere.

Teorema 3.2. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali tale che* $a_n\geq 0$ *(rispettivamente* $a_n\leq 0$ *)* $\forall n\in\mathbb{N}$. *Allora la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ *può o convergere o divergere positivamente (rispettivamente negativamente).*

Teorema 3.3. *(**Criterio del confronto**) Siano* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *due successioni di numeri reali non negativi tali che*

$$r_n\leq s_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Allora si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} r_n \text{ converge},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n \text{ diverge positivamente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \text{ diverge positivamente}.$$

Osservazione 3.2. Certamente tale teorema è verificato anche se la disuguaglianza $r_n \leq s_n$ è verificata definitivamente (da un certo punto in poi).
Il Criterio del confronto, inoltre, è uno strumento estremamente utile per stabilire il comportamento di una serie a termini non negativi poiché consente di ricondurre il problema della convergenza di una serie "difficile" da trattare a quello della convergenza di una "serie campione" il cui comportamento è noto.

Teorema 3.4. ***(Criterio di Leibniz)*** *Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che:*

- $b_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- $b_n \geq b_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *cioè $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente;*
- $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$

Allora la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$$

risulta convergente.

Riportiamo ora alcune Proposizioni che descrivono il comportamento di alcune serie.

Proposizione 3.4. *La serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}$$

è detta ***serie geometrica di ragione*** q. *Tale serie converge alla somma* $\dfrac{1}{1-q}$ *nel caso in cui* $-1 < q < 1$, *diverge positivamente nel caso in cui* $q \geqslant 1$ *e non è regolare nel caso in cui* $q \leq -1$.

Proposizione 3.5. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

è detta ***serie armonica generalizzata*** *(**serie armonica** se* $\alpha = 1$*). Tale serie converge se* $\alpha > 1$ *e diverge positivamente se* $\alpha \leq 1$.

Osservazione 3.3. Da tale Proposizione emerge che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge positivamente}$$

mentre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge.}$$

3.2 Esercizi vari

Per la risoluzione dei seguenti esercizi risulta fondamentale lo studio approfondito di quanto fatto del paragrafo precedente.

- ▶ **Traccia 24 aprile 2018 (A)**

Studiare la serie degli $a_n = |1 - n^2|$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che la successione $a_n = |1 - n^2|$ è definita $\forall n \in \mathbb{N}$, in quanto la successione $1 - n^2$ è definita su tutto $\mathbb{N}$ e la funzione valore assoluto è sempre definita.
Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |1 - n^2|,$$

ove non eliminiamo alcun indice dal momento che a_n in tal caso è definita su tutto $\mathbb{N}$.
Procediamo cercando di eliminare il valore assoluto.

$$|1 - n^2| = \begin{cases} 1 - n^2 & \text{se} \quad 1 - n^2 \geqslant 0, \ n \in \mathbb{N} \\ -(1 - n^2) & \text{se} \quad 1 - n^2 < 0, \ n \in \mathbb{N} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - n^2 & \text{se} \quad -1 \leq n \leq 1, \ n \in \mathbb{N} \\ -(1 - n^2) & \text{se} \quad -1 < n \ \vee \ n > 1, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pertanto continuiamo analizzando la seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} -(1 - n^2) = \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 - 1,$$

la quale per la Proposizione 3.3, ha lo stesso comportamento della serie di partenza.

Consideriamo inizialmente il seguente limite.

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} n^2 - 1 \neq 0$, dall'Osservazione 3.1 emerge che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 - 1$ non converge.
È facile osservare che la successione $n^2 - 1 > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$.
Dunque per il Teorema 3.2 è possibile affermare che $\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 - 1$ può o convergere o divergere positivamente.
Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti segue che la serie di partenza diverge positivamente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |1 - n^2| = \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 - 1 = +\infty.$$

▶ **Traccia 28 luglio 2018 (A)**

Studiare la serie degli $a_n = e^{\frac{1}{n+1}}$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che la successione $a_n = e^{\frac{1}{n+1}}$ è definita $\forall n \in \mathbb{N}$, in quanto la successione $\dfrac{1}{n+1}$ è definita su tutto $\mathbb{N}$ (il suo denominatore non si annulla mai quando $n \in \mathbb{N}$) e la funzione esponenziale è sempre definita.
Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{1}{n+1}},$$

ove non eliminiamo alcun indice dal momento che a_n in tal caso è definita su tutto $\mathbb{N}$.
Procediamo calcolando il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = 1.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n+1}} \neq 0$, dall'Osservazione 3.1 emerge che $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{1}{n+1}}$ non converge.
Inoltre, è facile osservare che $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (proprietà dell'esponenziale). Dunque per il Teorema 3.2 è possibile affermare che $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{1}{n+1}}$ può o convergere o divergere positivamente.
Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti segue che la serie di partenza diverge positivamente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = +\infty.$$

▶ **Traccia 11 settembre 2018 (A)**

Studiare la serie degli $a_n = \log\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che la successione $a_n = \log\left(\frac{1}{n+1}\right)$ è definita $\forall n \in \mathbb{N}$, in quanto la funzione logaritmo è sempre definita quando il suo argomento è una quantità strettamente positiva, mentre la successione $\frac{1}{n+1}$ è definita su tutto $\mathbb{N}$ (il suo denominatore non si annulla mai quando $n \in \mathbb{N}$) e $\forall n \in \mathbb{N}$ essa è sempre positiva.
Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

ove non eliminiamo alcun indice dal momento che a_n in tal caso è definita su tutto $\mathbb{N}$.
Procediamo calcolando il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\infty.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{1}{n+1}\right) \neq 0$, dall'Osservazione 3.1 emerge che

$\sum_{n=0}^{+\infty} \log\left(\frac{1}{n+1}\right)$ non converge.
Procediamo studiando il segno degli a_n.

$$a_n \geqslant 0 \Rightarrow \log\left(\frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq 0.$$

Certamente la disuguaglianza $\frac{n}{n+1} \leq 0$ non è mai verificata $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $a_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dunque per il Teorema 3.2 è possibile affermare che $\sum_{n=0}^{+\infty} \log\left(\frac{1}{n+1}\right)$ può o convergere o divergere negativamente.
Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti segue che la serie di partenza diverge negativamente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\infty.$$

► **Traccia 26 febbraio 2018 (B)**

Studiare la serie degli $a_n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right)\right]^{2n}$.

Svolgimento

Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right)\right]^{2n},$$

ove non eliminiamo alcun indice dal momento che a_n in tal caso è definita su tutto $\mathbb{N}$, in quanto la successione $\frac{\pi}{3} + \pi n$ è definita su tutto $\mathbb{N}$ e la funzione coseno è sempre definita.
Iniziamo con il considerare solo la successione

$$b_n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right)\right]^2.$$

Esplicitiamo il valore che essa assume al variare di $n \in \mathbb{N}$.

$$n = 0 \qquad\qquad b_0 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\right]^2.$$

Sfruttando la periodicità della funzione coseno, si osserva facilmente che $\forall n \in \mathbb{N}$, n pari $(n = 0, 2, 4, 6, ...)$, $b_n = \left[\frac{1}{2}\right]^2$: infatti alla quantità $\frac{\pi}{3}$ si aggiunge sempre un multiplo di 2π.

$$n = 1 \qquad\qquad b_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\right]^2 = \left[-\frac{1}{2}\right]^2.$$

Sfruttando la periodicità della funzione coseno, si osserva facilmente che $\forall n \in \mathbb{N}$, n dispari $(n = 1, 3, 5, 7, ...)$, $b_n = \left[-\frac{1}{2}\right]^2$: infatti alla quantità $\frac{\pi}{3}$ si aggiunge sempre un multiplo dispari di π.

Ma certamente

$$\left[\pm\frac{1}{2}\right]^2 = +\frac{1}{4}.$$

Dunque è facile osservare che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right)\right]^{2n} = \left[\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right)\right]^2\right]^n = \left[b_n\right]^n = \left[\frac{1}{4}\right]^n.$$

Da questo emerge che la serie di partenza, in realtà, è pari alla seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{4}\right]^n.$$

Si è ottenuta una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{4}$. Essendo $-1 < q < 1$, per la Proposizione 3.4 tale serie converge alla somma $\frac{1}{1-q}$, che in tal caso è pari a $\frac{4}{3}$.

Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right)\right]^{2n} = \frac{4}{3}.$$

▶ Traccia 18 febbraio 2019 (B)

Studiare la serie degli $a_n = \frac{1}{n^2 + n}$ usando il teorema del confronto.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che la successione $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ è definita $\forall n \in \mathbb{N}$ tali che $n^2+n \neq 0$, ovvero quando $n \neq 0$.
Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n},$$

ove eliminiamo solo l'indice $n = 0$ dal momento che a_n, per quanto detto sopra, non è definita per $n = 0$.
Per prima cosa calcoliamo il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0.$$

Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = 0$, dall'Osservazione 3.1 emerge che non si può dir nulla circa il comportamento della serie di partenza: per procedere percorriamo altre strade.
È immediato osservare che $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. Dunque per il Teorema 3.2 è possibile affermare che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$ può o convergere o divergere positivamente.
Osserviamo che

$$n^2+n > n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

da cui segue

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0.$$

Si consideri la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Per l'Osservazione 3.3 essa converge, quindi, applicando il Criterio del confronto (Teorema 3.3), si può concludere che anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$ converge.

▶ **Traccia 25 settembre 2017 (B)**

Studiare la serie degli $a_n = \dfrac{1}{|n|-2}$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che $|n| = n$, in quanto $n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Da questo segue che

$$a_n = \frac{1}{|n|-2} = \frac{1}{n-2}.$$

Tale successione è definita $\forall n \in \mathbb{N}$ tali che $n-2 \neq 0$, ovvero quando $n \neq 2$.
Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 2}}^{+\infty} \frac{1}{n-2},$$

ove eliminiamo solo l'indice $n = 2$ dal momento che a_n, per quanto detto sopra, non è definita per $n = 2$.
Calcoliamo il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-2} = 0.$$

Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-2} = 0$, dall'Osservazione 3.1 emerge che non si può dir nulla circa il comportamento della serie di partenza: per procedere percorriamo altre strade.
È immediato osservare che $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2$.
Per determinare il comportamento della serie di partenza, ci serviamo della seguente serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-2}.$$

Poiché le due serie differiscono per un numero finito di indici, per la Proposizione 3.3 hanno lo stesso carattere.
La nuova serie ha termini a segno non negativi, quindi, per il

Teorema 3.2 è possibile affermare che $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$ può o convergere o divergere positivamente.
Osserviamo che

$$n - 2 < n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 3$$

da cui segue

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 3.$$

Si consideri la seguente serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

la quale ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, in quanto le due sere differiscono per un numero finito di indici.
Per l'Osservazione 3.3 $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente, quindi, applicando il Criterio del confronto (Teorema 3.3), si può concludere che anche la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$ diverge positivamente.

▶ **Traccia 13 novembre 2018 (B)**

Studiare la serie degli $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} - n$.

Svolgimento

Per prima cosa osserviamo che la successione a_n è data dalla somma di due successioni: la prima è $\frac{(-1)^n}{n^2}$, la quale è definita $\forall n \in \mathbb{N}$ tali che $n \neq 0$, la seconda è $-n$ la quale è definita $\forall n \in \mathbb{N}$. Pertanto segue che la successione $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} - n$ è definita $\forall n \in \mathbb{N}$ tali che $n \neq 0$. Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} - n \right),$$

ove eliminiamo solo l'indice $n = 0$ dal momento che a_n, per

quanto detto sopra, non è definita per $n = 0$.
Per procedere analizziamo separatamente il comportamento delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} -n.$$

- Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} -n$.
  Calcoliamo il seguente limite

  $$\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty.$$

  Poiché $\lim_{n\to+\infty} -n \neq 0$, dall'Osservazione 3.1 emerge che $\sum_{n=1}^{+\infty} -n$ non converge .
  È immediato osservare che $-n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$.
  Tale serie ha termini a segno negativi, quindi, per il Teorema 3.2 è possibile affermare che $\sum_{n=1}^{+\infty} -n$ può o convergere o divergere negativamente.
  Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti segue che la serie in questione diverge negativamente:

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} -n = -\infty.$$

- Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
  Per stabilire il suo comportamento vediamo se sono verificate le ipotesi del Criterio di Leibniz (Teorema 3.2).
  Usando le notazioni di tale Teorema, chiamiamo $b_n = \frac{1}{n^2}$ e osserviamo che:
  - $b_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tali che $n \geq 1$.
  - $b_n \geq b_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tali che $n \geq 1$.
  - $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

  Dunque la serie a termini di segno alterno

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

risulta convergente per il Criterio di Leibniz.

Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti e prendendo in considerazione la parte finale della Proposizione 3.1 segue che la serie di partenza diverge negativamente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} - n \right) = -\infty.$$

Capitolo 4

Insieme dei numeri reali

4.1 Richiami di teoria

Definizione 4.1. Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice **limitato superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in X \; x \leq M.$$

Definizione 4.2. Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice **limitato inferiormente** se

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in X \; m \leq x.$$

Definizione 4.3. Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Osservazione 4.1. Consideriamo seguenti insiemi.

- $\emptyset$ è limitato;
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ è illimitato sia inferiormente che superiormente;
- $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $[a, b]$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, sono limitati;
- $\{a\}$ ove $a \in \mathbb{R}$ è limitato;
- $]-\infty, a[$ e $]-\infty, a]$ ove $a \in \mathbb{R}$ sono illimitati inferiormente e limitati superiormente;
- $]b, +\infty[$ e $[b, +\infty[$ ove $b \in \mathbb{R}$ sono limitati inferiormente e illimitati superiormente.

Questa prima parte è importante per determinare le proprietà metriche di un insieme.

Definizione 4.4. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, si definisce *intervallo di centro* x_0 *e raggio* ε l'insieme

$$I(x_0, \varepsilon) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}.$$

Esempio 4.1. Presi $x_0 = 7$ e $\varepsilon = 4,27$, *l'intervallo di centro* 7 *e raggio* 4,27 corrisponde all'insieme $]2,73\ ,\ 11,27[$.

Definizione 4.5. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, si definisce *intervallo bucato di centro* x_0 *e raggio* ε l'insieme

$$\dot{I}(x_0, \varepsilon) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus x_0.$$

Definizione 4.6. Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice **insieme aperto** se

$$\forall x_0 \in X \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } I(x_0, \varepsilon) \subseteq X.$$

Osservazione 4.2. Sono aperti i seguenti insiemi:

- $\emptyset$;
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;
- $]a, b[$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$;
- $]-\infty, a[$ e $]b, +\infty[$ ove $a, b \in \mathbb{R}$.

Inoltre è importante osservare che

(a) l'unione di un numero qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto;

(b) l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.

Definizione 4.7. Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice **insieme chiuso** se $\mathbb{R} \setminus X$ è un insieme aperto.

Osservazione 4.3. Sono chiusi i seguenti insiemi:

- $\emptyset$;
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;
- $[a, b]$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$;
- $\{a\}$ ove $a \in \mathbb{R}$ è chiuso;
- $]-\infty, a]$ e $[b, +\infty[$ ove $a, b \in \mathbb{R}$.

Inoltre è importante osservare che

(a) l'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso;

(b) l'intersezione di un numero qualsiasi di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

Esempio 4.2. Consideriamo l'insieme $X =]-2, 3]$.

◇ Tale insieme non è aperto, in quanto non esiste nessun intervallo di centro 3 che sia completamente contenuto nell'insieme X.

◇ Tale insieme non è chiuso, in quanto detto $\mathbb{R} \setminus X =]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[$, è facile osservare esso non è aperto: non esiste, infatti, nessun intervallo di centro -2 che sia completamente contenuto nell'insieme $\mathbb{R} \setminus X$.

Dunque l'insieme
$$X =]-2, 3]$$
non è né aperto né chiuso.

Ragionando allo stesso modo, si prova che non sono né aperti né chiusi i seguenti insiemi:

- $[a, b[$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$;
- $]a, b]$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$

Questa seconda parte è importante per determinare le proprietà topologiche di un insieme.

Teorema 4.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, allora si ha:*

$$X \text{ è un insieme connesso } \iff X \text{ è un intervallo }.$$

Definizione 4.8. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $x_0 \in X$. Diciamo che x_0 è un **punto interno a** X se

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } I(x_0, \varepsilon) \subseteq X.$$

L'insieme dei punti interni a X si chiama **interno di** X e si denota con $\overset{\circ}{X}$.

Osservazione 4.4. Analizziamo i seguenti casi.

- $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$;
- $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$;
- sia $\{a\}$ ove $a \in \mathbb{R}$, il suo interno coincide con $\emptyset$;
- siano $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $[a, b]$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, l'interno di ciascuno di essi coincide con l'insieme $]a, b[$;
- siano $] - \infty, a[$ e $] - \infty, a]$ ove $a \in \mathbb{R}$ l'interno di ciascuno di essi coincide con l'insieme $] - \infty, a[$;
- siano $]b, +\infty[$ e $[b, +\infty[$ ove $b \in \mathbb{R}$, l'interno di ciascuno di essi coincide con l'insieme $]b, +\infty[$.

Definizione 4.9. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che x_0 è un **punto esterno a** X se

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } I(x_0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}.$$

L'insieme dei punti esterni a X si chiama **esterno di** X e si denota con $Ext(X)$.

Osservazione 4.5. In modo del tutto equivalente si può asserire che un punto è esterno ad un insieme se e solo se è un punto interno al complementare dell'insieme, ovvero

$$Ext(X) = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus X}}.$$

Osservazione 4.6. Analizziamo i seguenti casi.

- $Ext(\emptyset) = \mathbb{R}$;
- $Ext(\mathbb{R}) = \emptyset$;
- sia $\{a\}$ ove $a \in \mathbb{R}$, il suo esterno coincide con $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$;
- siano $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $[a, b]$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, l'esterno di ciascuno di essi coincide con l'insieme $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$;
- siano $]-\infty, a[$ e $]-\infty, a]$ ove $a \in \mathbb{R}$ l'esterno di ciascuno di essi coincide con l'insieme $]a, +\infty[$;
- siano $]b, +\infty[$ e $[b, +\infty[$ ove $b \in \mathbb{R}$, l'interno di ciascuno di essi coincide con l'insieme $]-\infty, b[$.

Definizione 4.10. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che x_0 è un **punto di frontiera per** X se

$$\forall \varepsilon > 0 \; I(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset \text{ e } I(x_0, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di frontiera per X si chiama **frontiera di** X e si denota con ∂X.

Osservazione 4.7. Dalla precedente definizione si evince che un punto di frontiera per un insieme può appartenere o non appartenere all'insieme stesso.

Osservazione 4.8. Analizziamo i seguenti casi.

- $\partial\emptyset = \emptyset$;
- $\partial\mathbb{R} = \emptyset$;
- sia $\{a\}$ ove $a \in \mathbb{R}$, la sua frontiera coincide con $\{a\}$;
- siano $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $[a, b]$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, la frontiera di ciascuno di essi coincide con l'insieme $\{a, b\}$;
- siano $]-\infty, a[$ e $]-\infty, a]$ ove $a \in \mathbb{R}$ la frontiera di ciascuno di essi coincide con l'insieme $\{a\}$;

- siano $]b, +\infty[$ e $[b, +\infty[$ ove $b \in \mathbb{R}$, la frontiera di ciascuno di essi coincide con l'insieme $\{b\}$.

Definizione 4.11. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che x_0 è un **punto di accumulazione per** X se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \dot{I}(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di accumulazione per X si chiama **derivato di** X e si denota con X' o con $DerX$

Osservazione 4.9. Dalla precedente definizione si evince che un punto di accumulazione per un insieme può appartenere o non appartenere all'insieme stesso.

Osservazione 4.10. Analizziamo i seguenti casi.

- $\emptyset' = \emptyset$;
- $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$;
- sia $\{a\}$ ove $a \in \mathbb{R}$, l'insieme contenente tutti i suoi punti di accumulazione coincide con l'insieme $\emptyset$;
- siano $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $[a, b]$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, l'insieme contenente tutti i punti di accumulazione per ciascuno di essi coincide con l'insieme $[a, b]$;
- siano $]-\infty, a[$ e $]-\infty, a]$ ove $a \in \mathbb{R}$ l'insieme contenente tutti i punti di accumulazione per ciascuno di essi coincide con l'insieme $]-\infty, a]$;
- siano $]b, +\infty[$ e $[b, +\infty[$ ove $b \in \mathbb{R}$, l'insieme contenente tutti i punti di accumulazione per ciascuno di essi coincide con l'insieme $[b, +\infty[$.

Definizione 4.12. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $x_0 \in X$. Diciamo che x_0 è un **punto isolato per** X se

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \dot{I}(x_0, \varepsilon) \cap X = \emptyset.$$

Osservazione 4.11. Dalla precedente definizione si evince che un punto isolato per un insieme, a differenza di uno di accumulazione, deve necessariamente appartenere all'insieme stesso.

Osservazione 4.12. Analizziamo i seguenti casi.

- dato $\emptyset$, l'insieme contenente tutti i suoi punti isolati coincide con l'insieme $\emptyset$;
- dato $\mathbb{R}$, l'insieme contenente tutti i suoi punti isolati coincide con l'insieme $\emptyset$;
- sia $\{a\}$ ove $a \in \mathbb{R}$, l'insieme contenente tutti i suoi punti isolati coincide con l'insieme $\{a\}$; ne segue che tutti punti dell'insieme $\mathbb{N}$ sono punti isolati per $\mathbb{N}$;
- siano $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ e $[a,b]$ ove $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, l'insieme contenente tutti i punti isolati per ciascuno di essi coincide con l'insieme $\emptyset$;
- siano $]-\infty,a[$ e $]-\infty,a]$ ove $a \in \mathbb{R}$ l'insieme contenente tutti i punti isolati per ciascuno di essi coincide con l'insieme $\emptyset$;
- siano $]b,+\infty[$ e $[b,+\infty[$ ove $b \in \mathbb{R}$, l'insieme contenente tutti i punti isolati per ciascuno di essi coincide con l'insieme $\emptyset$.

Definizione 4.13. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che x_0 è un **punto di aderenza per** X se

$$\forall \varepsilon > 0 \; I(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di aderenza per X si chiama **chiusura di** X e si denota con $\overline{X}$.

Osservazione 4.13. Dalla precedente definizione si evince che un punto di aderenza per un insieme può appartenere o non appartenere all'insieme stesso.

Osservazione 4.14. Certamente le Definizioni 4.11 e 4.13 sembrano essere "quasi" uguali. In realtà tra di esse è presente un'importante differenza: nella definizione circa i punti di accumulazione x_0 appartiene all'intorno che si considera, mentre in quella circa i punti di aderenza x_0 non appartiene all'intorno che si considera.

Osservazione 4.15. Analizziamo i seguenti casi.

- $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$;
- sia $\{a\}$ ove $a \in \mathbb{R}$, l'insieme contenente tutti i suoi punti di aderenza coincide con l'insieme $\{a\}$;
- siano $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $[a, b]$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, l'insieme contenente tutti i punti di aderenza per ciascuno di essi coincide con l'insieme $[a, b]$;
- siano $]-\infty, a[$ e $]-\infty, a]$ ove $a \in \mathbb{R}$ l'insieme contenente tutti i punti di aderenza per ciascuno di essi coincide con l'insieme $]-\infty, a]$;
- siano $]b, +\infty[$ e $[b, +\infty[$ ove $b \in \mathbb{R}$, l'insieme contenente tutti i punti di aderenza per ciascuno di essi coincide con l'insieme $[b, +\infty[$.

4.2 Esercizi vari

Per la risoluzione dei seguenti esercizi risulta fondamentale lo studio approfondito di quanto fatto del paragrafo precedente.

- **Traccia 27 maggio 2019 (A)**

Dati gli insiemi $X =]-\infty, 2] \cup \{1\}$ e $Y =]0, 4]$, dare le principali proprietà topologiche e metriche di X, Y e $X \setminus Y$ e determinarne l'interno e la chiusura.

Svolgimento

Consideriamo l'insieme $X =]-\infty, 2] \cup \{1\}$.
È immediato osservare che di fatto $X =]-\infty, 2]$.

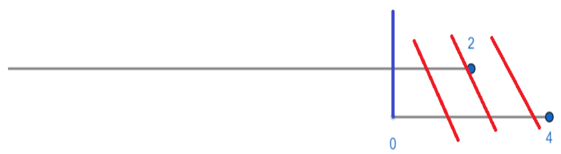
- DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ METRICHE: l'insieme X è illimitato inferiormente e limitato superiormente.
- DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE: l'insieme X è chiuso, in quanto l'insieme $R \setminus X =]2, +\infty[$ è aperto poiché si può facilmente osservare che per ogni suo punto esiste sempre un intorno contenuto nell'insieme $R \setminus X$; l'insieme X è connesso essendo un intervallo.
- DETERMINIAMO IL SUO INTERNO: $\overset{\circ}{X} =]-\infty, 2[$. Il punto 2 non può appartenere all'interno di X poiché non esiste alcun intorno di 2 che sia contenuto nell'insieme X.
- DETERMINIAMO LA SUA CHIUSURA: $\overline{X} =]-\infty, 2]$. Tutti i punti dell'insieme di partenza sono di aderenza in quanto tutti i loro intorni hanno intersezione non vuota con l'insieme X.

Consideriamo l'insieme $Y =]0, 4]$.

- DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ METRICHE: l'insieme Y è limitato.

- DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE: l'insieme Y non è aperto poiché non esiste alcun intorno di 4 che sia contenuto in esso; l'insieme Y non è chiuso, in quanto l'insieme $R \setminus Y =]-\infty, 0] \cup]4, +\infty[$ non è aperto poiché non esiste alcun intorno di 0 che sia contenuto in esso; l'insieme Y è connesso essendo un intervallo.
- DETERMINIAMO IL SUO INTERNO: $\overset{\circ}{Y} =]0, 4[$. Il punto 4 non può appartenere all'interno di Y poiché non esiste alcun intorno di 4 che sia contenuto nell'insieme Y.
- DETERMINIAMO LA SUA CHIUSURA: $\overline{Y} = [0, 4]$. Il punto 0 va incluso tra i punti di aderenza di dell'insieme Y in quanto ogni suo intorno ha intersezione non vuota con l'insieme Y.

Consideriamo l'insieme $X \setminus Y$.
Ricordiamo che per determinare la differenza insiemistica tra due insiemi bisogna togliere agli elementi del primo insieme quelli del secondo.
Rappresentando i due insiemi in questione come di seguito,



risulta immediato osservare che $X \setminus Y =]-\infty, 0]$.

- DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ METRICHE: l'insieme $X \setminus Y$ è illimitato inferiormente e limitato superiormente.
- DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE: l'insieme $X \setminus Y$ è chiuso, in quanto l'insieme $R \setminus (X \setminus Y) =]0, +\infty[$ è aperto poiché si può facilmente osservare che per ogni suo punto esiste sempre un intorno contenuto in esso; l'insieme $X \setminus Y$ è connesso essendo un intervallo.

- ◇ DETERMINIAMO IL SUO INTERNO: $\overset{\circ}{\widehat{X \setminus Y}} =]-\infty, 0[$. Il punto 0 non può appartenere all'interno di $X \setminus Y$ poiché non esiste alcun intorno di 0 che sia contenuto nell'insieme $X \setminus Y$.
- ◇ DETERMINIAMO LA SUA CHIUSURA: $\overline{X \setminus Y} =]-\infty, 0]$. Tutti i punti dell'insieme di partenza sono di aderenza in quanto tutti i loro intorni hanno intersezione non vuota con l'insieme $X \setminus Y$.

▶ **Traccia 2 maggio 2019 (B)**

Dato l'insieme $X = (]-\infty, 0[\cup[0, 1[) \setminus \{0\}$ darne le principali proprietà topologiche e metriche e determinarne la frontiera.

Svolgimento

Consideriamo l'insieme X.
È immediato osservare che $X =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

- ◇ DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ METRICHE: l'insieme X è illimitato inferiormente e limitato superiormente.
- ◇ DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE: l'insieme X è aperto, in quanto è dato dall'unione di due insiemi aperti; l'insieme X non è connesso essendo unione di due intervalli disgiunti.
- ◇ DETERMINIAMO LA SUA FRONTIERA: $\partial X = \{0, 1\}$. Certamente entrambi questi punti sono punti di frontiera per X poiché tutti i loro intorni hanno intersezione non vuota sia con l'insieme X che con l'insieme $R \setminus X$.

▶ **Traccia 5 marzo 2018 (A)**

Determinare l'insieme $X = (]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)\cap]0, 1[$ e trovare l'insieme dei suoi punti esterni.

Svolgimento

È immediato osservare che $X =]0,1[$.
Procediamo determinando l'insieme dei suoi punti esterni.

$$Ext(X) = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus X}} = \overset{\circ}{\widehat{]0,1[}} = (\overset{\circ}{\widehat{]-\infty,0]\cup[1,+\infty[}}) =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[.$$

Certamente i punti 0 e 1 non possono appartenere all'insieme $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus X}}$ poiché ogni loro intorno non è contenuto nell'insieme $\mathbb{R}\setminus X$.

▶ Traccia 28 luglio 2018 (A)

Determinare il derivato dell'insieme $X =]-1,0[\cup]0,2[\cup\{3\}$.

Svolgimento

È immediato osservare che l'insieme X non può essere riscritto diversamente in quanto è dato dall'unione di tre insiemi disgiunti.
Procediamo determinando il suo derivato.
Certamente il punto 3 non è un punto di accumulazione per X in quanto esiste un suo intorno bucato (con raggio molto piccolo) avente intersezione vuota con l'insieme X. Il punto 3 è infatti un punto isolato per X. Tutti i restanti punti dell'insieme X sono di accumulazione, in quanto ogni loro intorno bucato ha intersezione non vuota con l'insieme X. Segue che $X' = [-1,2]$.

▶ Traccia 11 settembre 2018 (B)

Determinare i punti isolati dell'insieme $X =]-1,1[\cup([0,2[\setminus\{1\})$.

Svolgimento

È immediato osservare che $X =]-1,1[\cup]1,2[$.
Procediamo determinando i suoi punti isolati.
Certamente l'inseme contenente i suoi punti isolati coincide con

$\emptyset$, in quanto non esistono punti di X per cui esiste un proprio intorno bucato avente intersezione vuota con l'insieme X.

▶ Traccia 16 ottobre 2018 (B)

Dire se l'insieme $X = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup]1, 2[$ è aperto o chiuso, giustificando al risposta.

Svolgimento

È immediato osservare che l'insieme X non può essere riscritto diversamente in quanto è dato dall'unione di due insiemi disgiunti.

- ◇ L'insieme X non è aperto poiché non esiste alcun intorno del punto $\frac{1}{2}$ che sia contenuto in X.
- ◇ L'insieme X non è chiuso poiché l'insieme

$$\mathbb{R} \setminus X = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right] \cup [2, +\infty[$$

non è aperto, in quanto non esiste alcun intorno dei punti 1 e 2 che sia contenuto in $\mathbb{R} \setminus X$.

▶ Traccia 24 giugno 2019 (B)

Dati gli insiemi $X =]0, 5]$ e $Y = [1, 2[$, dare le principali proprietà topologiche e metriche di X, Y, $X \cup Y$ e $X \cap Y$ e determinarne il derivato.

Svolgimento

Consideriamo l'insieme $X =]0, 5]$.

- ◇ DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ METRICHE: l'insieme X è limitato.

- ◇ DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE: l'insieme X non è aperto poiché non esiste alcun intorno del punto 5 che sia contenuto in X; l'insieme X non è chiuso, in quanto l'insieme $R \setminus X =]-\infty, 0] \cup]5, +\infty[$ non è aperto poiché non esiste alcun intorno del punto 0 che sia contenuto in $R \setminus X$; l'insieme X è connesso essendo un intervallo.
- ◇ DETERMINIAMO IL SUO DERIVATO: $X' = [0, 5]$. Certamente anche il punto 0 va incluso tra i punti di accumulazione per X in quanto ogni suo intorno bucato ha intersezione non vuota con l'insieme X.

Consideriamo l'insieme $Y = [1, 2[$.

- ◇ DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ METRICHE: l'insieme Y è limitato.
- ◇ DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE: l'insieme Y non è aperto poiché non esiste alcun intorno del punto 1 che sia contenuto in Y; l'insieme Y non è chiuso, in quanto l'insieme $R \setminus Y =]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$ non è aperto poiché non esiste alcun intorno del punto 2 che sia contenuto in $R \setminus Y$; l'insieme Y è connesso essendo un intervallo.
- ◇ DETERMINIAMO IL SUO DERIVATO: $Y' = [1, 2]$. Certamente anche il punto 2 va incluso tra i punti di accumulazione per Y in quanto ogni suo intorno bucato ha intersezione non vuota con l'insieme Y.

Consideriamo l'insieme $X \cup Y$.
È immediato osservare che $X \cup Y =]0, 5]$, pertanto vale quanto detto in precedenza per l'insieme X.

Consideriamo l'insieme $X \cap Y$.
È immediato osservare che $X \cap Y = [1, 2[$, pertanto vale quanto detto in precedenza per l'insieme Y.

▶ Traccia 4 marzo 2019 (A)

Dato l'insieme $X = ([-1, +\infty[\cup \{2\}) \setminus]-\infty, 0[$ darne le principali proprietà topologiche e metriche e determinarne la chiusura.

Svolgimento

Consideriamo l'insieme X.
È immediato osservare che $X = [0, +\infty[$.

- ◇ DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ METRICHE: l'insieme X è limitato inferiormente e illimitato superiormente.
- ◇ DETERMINIAMO LE SUE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE: l'insieme X è chiuso, in quanto l'insieme $R \setminus X =]-\infty, 0[$ è aperto poiché si può facilmente osservare che per ogni suo punto esiste sempre un intorno contenuto nell'insieme $R \setminus X$; l'insieme X è connesso essendo un intervallo.
- ◇ DETERMINIAMO LA SUA CHIUSURA: $\overline{X} = [0, +\infty[$. Tutti i punti dell'insieme di partenza sono di aderenza in quanto tutti i loro intorni hanno intersezione non vuota con l'insieme X.

Bibliografia

[1] M. Abate, C. de Fabritiis (1999), *Esercizi di geometria*, McGraw-Hill

[2] M. Troisi, (1987), *Analisi Matematica I*, Liguori Editori

[3] E. Acerbi, G. Buttazzo, (1997), *Primo corso di Analisi Matematica*, Pitagora Editrice

[4] P. Marcellini, C. Sbordone, (1995), *Esercitazioni di Matematica*, Liguori Editori