Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 19 Dicembre 2016 - Traccia A

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{3x-4}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $D =]-\infty, -1[\cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$;
- $f(x) > 0 : \quad \left]\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right[$;
- $f(x) < 0 : \quad]-\infty, -1[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$;
- $f(x) = 0 : \quad x = \frac{5}{2}$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$; $\quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x\to \frac{4}{3}^+} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = -\frac{7}{3x^2-x-4}$;
- $f'(x) > 0$ MAI; $\quad f'(x) = 0$ MAI; $\quad f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in D$;
- $f''(x) = \frac{7(6x-1)}{(3x^2-x-4)^2}$;
- $f''(x) > 0 : \quad \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$;
- $f''(x) < 0 : \quad]-\infty, -1[$;
- $f''(x) = 0 :$ MAI;
- $f(D) = \quad \mathbb{R} - \{\ln(\frac{1}{3})\}$; $\quad f$ biunivoca? SI.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $e^x + 5x - 2 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	0	1	0.5	-1	≈ 5.71	$\approx +2.14$
1	0	0.5	0.25	-1	≈ 2.14	≈ 0.53
2	0	0.25	0.125	-1	≈ 0.53	≈ -0.24
3	0.125	0.25	0.1875			

Quindi $c_3 = 0.1875$ é una soluzione dell'equazione con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \arctan\left(\frac{x+1}{1-x}\right) dx$$

Soluzione:

$$I = \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{1-x}\right) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + c$$

4. Data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & h+2 & h+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ h & 0 & h \end{pmatrix}$$

- Determinare i valori di h per cui la matrice A abbia rango pari a 3;
- Posto $h = -2$ deteminare gli autovalori e i corrispondenti autovettori;
- La matrice A é diagonalizzabile? Se si, determinare la matrice D e P che realizzano la diagonalizzazione della matrice A.

  Soluzione

  $det(A) = 4h$. Se $h \neq 0$ allora $car(A) = 3$.
  Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 4$
  Gli autovettori corrispondenti: $\mathbf{x}_1 = (0, -\frac{t}{3}, t)$; $\mathbf{x}_2 = (0, t, 0)$; $\mathbf{x}_3 = (t, -\frac{t}{9}, -\frac{t}{3})$
  La matrice è diagonalizzabile perchè gli autovalori sono distinti.

5. Trovare e classificare i punti stazionari della funzione f definita dall'espressione:

$$f(x, y) = x^3 - x^2y + y^2$$

Soluzione: Le derivate parziali sono:

$$f_x = 3x^2 - 2xy; \quad f_y = -x^2 + 2y; \quad f_{xx} = 6x - 2y; \quad f_{xy} = -2x; \quad f_{yy} = 2$$

I punti critici sono $P_1 = (0, 0)$; $P_2(3, \frac{9}{2})$; La matrice Hessiana calcolata in P_1 è semidefinita positiva e quindi P_1 è di minimo relativo;
La matrice Hessiana calcolata in P_2 ìndefinita e quindi P_2 è un punto di sella.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 19 Dicembre 2016 - Traccia B

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $D = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup]1, +\infty[$;
- $f(x) > 0: \quad]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$;
- $f(x) < 0: \quad \left]-4, -\frac{3}{2}\right[$;
- $f(x) = 0: \quad x = -4$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ln(2)$; $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$
- $f'(x) = -\frac{5}{2x^2+x-3}$;
- $f'(x) > 0$ MAI; $\quad f'(x) = 0$ MAI; $\quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in D$;
- $f''(x) = \frac{5(4x+1)}{(2x^2+x-3)^2}$;
- $f''(x) > 0: \quad]1, +\infty[$;
- $f''(x) < 0: \quad \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$;
- $f''(x) = 0:$ MAI;
- $f(D) = \mathbb{R} - \{\ln(2)\}$; $\quad f$ biunivoca? SI.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $-x^2 - 4x + 2^x = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	0	1	0.5	1	-3	≈ -0.835
1	0	0.5	0.25	1	≈ -0.835	≈ 0.126
2	0.25	0.50	0.375	≈ 0.126	≈ -0.8357	≈ -0.343
3	0.25	0.375	0.3125			

Quindi $c_3 = 0.3125$ é una soluzione dell'equazione con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\, dx$$

Soluzione:

$$I = \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + c$$

4. Data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h & h \\ 0 & 1 & 1 \\ h+1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

- Determinare i valori di h per cui la matrice A abbia rango pari a 3;
- Posto $h = 0$ deteminare gli autovalori e i corrispondenti autovettori;
- La matrice A é diagonalizzabile? Se si, determinare la matrice D e P che realizzano la diagonalizzazione della matrice A.

  Soluzione

  $det(A) = 2(h-1)$. Se $h \neq 1$ allora $car(A) = 3$.
  Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$
  Gli autovettori corrispondenti: $\mathbf{x}_1 = (0, -\frac{t}{2}, t)$; $\quad \mathbf{x}_2 = (0, t, 0)$; $\quad \mathbf{x}_3 = (t, \frac{t}{3}, \frac{t}{3})$
  La matrice è diagonalizzabile perchè gli autovalori sono distinti.

5. Trovare e classificare i punti stazionari della funzione f definita dall'espressione:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$$

Soluzione: Le derivate parziali sono:

$$f_x = 2x - y - 3x^2; \quad f_y = -2y - x; \quad f_{xx} = 2 - 6x; \quad f_{xy} = -1; \quad f_{yy} = -2$$

I punti critici sono $P_1 = (0, 0)$; $\quad P_2\left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right)$;
La matrice Hessiana calcolata in P_1 è indefinita e quindi P_1 è un punto di sella. La matrice Hessiana calcolata in P_2 ̀ definita negativa e quindi P_2 è un punto massimo relativo.

La soluzione proposta ha il solo scopo didattico di confrontare i risultati. Ovviamente tutti i passaggi analitici che sono importanti nel compito sono stati omessi.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 11 Gennaio 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{x^2 - \ln x}$$

Soluzione

- Dominio: $D =]0, +\infty[$;
- $f(x) > 0 : \quad \forall\, x \in D$;
- $f(x) < 0 : \quad$ MAI ;
- $f(x) = 0 : \quad$ MAI;
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;
- $f'(x) = e^{x^2 - \ln x} \left(\dfrac{2x^2 - 1}{x} \right)$;
- $f'(x) > 0 \quad \left] \sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty \right[$; $\quad f'(x) = 0 \quad x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (min. rel.) ; $\quad f'(x) < 0 \quad \left] 0, \sqrt{\frac{1}{2}} \right[$;
- $f''(x) = \dfrac{2e^{x^2 - \ln x}(2x^4 - x^2 + 1)}{x^2}$;
- $f''(x) > 0 : \quad \forall\, x \in D$;
- $f''(x) < 0 : \quad$ MAI;
- $f''(x) = 0 : \quad$ MAI;
- $f(D) = \quad \left] f(\sqrt{\frac{1}{2}}), +\infty \right[$ biunivoca? NO; $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (min. ass.)

2. Approssimare la funzione $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ con il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$

Soluzione.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}; \quad f''(x) = -\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$
$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f(x) \approx x$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^3+3}{x^2+1}\,dx$$

Soluzione:

$$I = \frac{x^2}{2} + 3\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

4. Siano:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & k \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema $Ax = b$.

Soluzione

$det(A) = 4k - 11$. Se $k \neq \frac{11}{4}$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x_1 = -\frac{k+10}{4k-11}; \quad x_2 = -\frac{2k+3}{4k-11}; \quad x_3 = \frac{17}{4k-11}$$

Se $k = \dfrac{11}{4}$ allora $car(A) = 2$ e $car(B) = 3$ e quindi il sistema è incompatibile.

5. Trovare e classificare i punti stazionari della funzione f definita dall'espressione:

$$f(x,y) = y \cdot \ln(x^2-3);$$

Soluzione: Le derivate parziali sono:

$$f_x = \frac{2xy}{x^2-3}; \quad f_y = \ln(x^2-3); \quad ; \quad f_{xx} = -\frac{2y(x^2+3)}{(x^2-3)^2}; \quad f_{xy} = \frac{2x}{x^2-3}; \quad f_{yy} = 0$$

I punti critici sono $P_1 = (2,0)$; $\quad P_2(-2,0)$;
La matrice Hessiana calcolata sia in P_1 e in P_2 è indefinita poichè gli autovalori risultano essere di segno opposto, ossia: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -4$. Quindi P_1 e P_2 sono punti di sella.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 25 Gennaio 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\ln|x|}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{0, +1, -1\}$;
- $f(x) > 0: \quad \forall\, x\, \in]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$;
- $f(x) < 0 :]-1, +1[-\{0\}$;
- $f(x) = 0: \quad$ MAI;
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; \lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2};$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$
- $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln^2|x| + 1)}$;
- $f'(x) > 0 \quad]0, 1[\cup]1, +\infty[; \quad f'(x) < 0] - \infty, -1[\cup] - 1, 0[; \quad f'(x) = 0$ MAI;
- $f''(x) = \dfrac{(\ln|x| + 1)^2}{x^2[\ln^2|x| + 1]^2}$;
- $f''(x) > 0: \quad \forall\, x\, \in\, D - \{\pm\frac{1}{e}\}$;
- $f''(x) < 0: \quad$ MAI;
- $f''(x) = 0: \quad x = \pm\frac{1}{e}$;
- $f(D) = \quad \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$; $\quad f$ biunivoca? NO; Non esistono massimi e minimi assoluti e relativi;

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $e^{|x|} + 3x^3 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[-1, 0]$.

Soluzione.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	-1	0	-0.5	≈ -0.28	1	≈ 1.27
1	-1	-0.5	-0.75	≈ -0.28	≈ 1.27	≈ 0.85
2	-1	-0.75	-0.875	≈ -0.28	≈ 0.85	≈ 0.38
3	-1	-0.875	-0.9375			

Quindi $c_3 = -0.9375$ é una soluzione dell'equazione con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

Soluzione:

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + c$$

4. Determinare gli autovalori ed i corrispondenti autovettori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

Soluzione

Autovalori: $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_2 = 3$
Autovettori associati: $\mathbf{x}_1 = (0, 0, t); \quad \mathbf{x}_2 = (t, t, -2t); \quad \mathbf{x}_3 = (t, -\frac{1}{3}t, \frac{2}{3}t) \quad \forall t \neq 0$

5. Studiare il segno della forma quadratica $Q(x, y) = tx^2 - 2xy + (1 + t)y^2$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione
La matrice A risulta essere: $A = \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix}$; mentre l'equazione caratteristica risulta: $\lambda^2 + \lambda(-1 - 2t) + t^2 + t - 1 = 0$ dove otteniamo:

$$\lambda_1 = \frac{2t + 1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{2t + 1 - \sqrt{5}}{2};$$

Possimo concludere che:

- Se $t > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ allora $\lambda_1 > 0; \quad \lambda_2 > 0$ e la forma quadratica é definita positiva;
- Se $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ allora $\lambda_1 > 0; \quad \lambda_2 = 0$ e la forma quadratica é semidefinita positiva;
- Se $t \in] - \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$ allora $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ e la forma quadratica é indefinita;
- Se $t = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ allora $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$ e la forma quadratica é semidefinita negativa;
- Se $t < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ allora $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ e la forma quadratica é definita negativa;

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 08 Febbraio 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = (6 - x)e^{-\frac{1}{x}}$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{0\}$;
- $f(x) > 0 : \quad \forall x \in]-\infty, 6[-\{0\}$;
- $f(x) < 0 : \quad \forall x \in]6, +\infty[$;
- $f(x) = 0 : \quad x = 6$;
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$;
- $f'(x) = -\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2 + x - 6)}{x^2}$;
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-3, 2[-\{0\}; \quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$; $f'(x) = 0\, x = -3, 2$;
- $x = -3$ (min relativo); $x = 2$ (max relativo);
- $f''(x) = -\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}(13x - 6)}{x^4}$;
- $f''(x) > 0 : \quad \forall x \in]-\infty, \frac{6}{13}[$;
- $f''(x) < 0 : \quad \forall x \in]\frac{6}{13}, +\infty[$ MAI;
- $f''(x) = 0 : \quad x = \frac{6}{13}$ (Punto di flesso);
- $f(D) = \quad]-\infty, 4e^{-\frac{1}{2}}] \cup [9e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$; f biunivoca? NO; Non esistono massimi e minimi assoluti;

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $\sqrt{(x^2 - 1)} - 2 + \ln(x) = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Soluzione.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	1	2	1.5	-2	≈ 0.42	≈ -0.47
1	1.5	2	1.75	≈ -0.47	≈ 0.42	≈ -0.0042
2	1.75	2	1.875	≈ -0.0042	≈ 0.42	≈ 0.21
3	1.75	1.875	1.8125			

Quindi $c_3 = -0.9375$ é una soluzione dell'equazione con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{x(\ln^2 x - 1)}\, dx$$

Soluzione:

$$I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \right| + c$$

4. Risolvere il sistema $(A - kB)x = 0$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Soluzione

La matrice $(A - kB) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -1-k & 0 \\ 3 & 2+k & 1 \end{pmatrix}$. Il $det(A - kB) = -k - 4$; Se $k \neq -4$ allora il sistema omogeneo ammette un'unica soluzione, ossia quella banale $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0$. Se $k = -4$ allora il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo $\left(-\frac{3}{7}t, -\frac{1}{7}t, t\right)$

5. Un'azienda produce due beni, A e B. La funzione di costo per produrre x unitá di A e y unitá di B é la seguente:

$$C(x, y) = 0.04x^2 + 0.01xy + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500$$

Sapendo che il prezzo di vendita del bene A é di 15 mentre del bene B é di 9, determinare il livello di produzione x e y che massimizzano il profitto.

Soluzione
Il profitto é $\Pi(x, y) = 15x + 9y - C(x, y)$ e quindi:

$$\Pi(x, y) = 15x + 9y - 0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 - 4x - 2y - 500$$

Le derivate parziali sono:

$$\Pi_x(x, y) = 11 - 0.08x - 0.01y; \quad \Pi_y(x, y) = 7 - 0.01x - 0.02y$$

$$\Pi_{xx} = -0.08; \quad \Pi_{xy} = 0; \quad \Pi_{yy} = -0.02$$

L'unico punto critico é $P_0 = (100, 300)$. Poiché la matrice Hessiana é definita negativa allora il punto P_0é un punto di massimo.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 05 Aprile 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $D =]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$;
- $f(x) > 0:$ MAI;
- $f(x) < 0:$ $\forall x \in D$;
- $f(x) = 0:$ MAI;
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0;$ $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty;$
- $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)};$
- $f'(x) > 0$ $\forall x \in]+1, +\infty[;$ $f'(x) < 0$ $\forall x \in]-\infty, -1[;$
  $f'(x) = 0$ MAI;
- $f''(x) = -\frac{4(3x^2+1)}{(x^2+1)^2(x^2-1)^2};$
- $f''(x) > 0:$ MAI; $f''(x) < 0: \forall x \in D;$ $f''(x) = 0:$ MAI;
- $f(D) =$ $]-\infty, 0[;$ f biunivoca? NO; Non esistono massimi e minimi assoluti;

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $e^{x^2-1} - 3x = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	0	1	0.5	≈ 0.36	-2	≈ -1.02
1	0	0.5	0.25	≈ 0.36	≈ -1.02	≈ -0.35
2	0	0.25	0.125	≈ 0.36	≈ -0.35	≈ -0.0013
3	0	0.125	0.0625			

Quindi $c_3 = 0.0625$ é una soluzione dell'equazione con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^4 x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\, dx$$

Soluzione:

$$I = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

Quindi $\displaystyle\int_1^4 x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\, dx = I(4) - I(1) = \frac{15}{2}\ln(5) - 16\ln(2) + \frac{3}{2}$

4. Determinare gli autovalori, i corrispondenti autovettori della seguente matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

Dire se matrice A é diagonalizzabile. Se si, determinare inoltre la matrice D e P che realizzano la diagonalizzazione $D = P^{-1}AP$

Soluzione

Gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = 2;$$

I corrispondenti autovettori sono:

$$\mathbf{x}_1 = (0, 0, t); \quad \mathbf{x}_2 = (-2t, t, t); \quad \mathbf{x}_3 = \left(\frac{t}{4}, \frac{t}{4}, t\right) \quad \forall\, t \neq 0$$

La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; mentre la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; attribuendo il valore $t = 1$ agli autovettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ e il valore $t = 4$ a $\mathbf{x}_3$.

5. Consideriamo un'azienda con una funzione di produzione Cobb-Douglas $f(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$, nei fattori produttivi x (capitale) e y (lavoro). Il prezzo unitario del bene prodotto é 1, mentre i costi unitari dei fattori x e y sono rispettivamente $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Determinare le quantitá da produrre per massimizzare il profitto dell'azienda:

$$\Pi(x, y) = RicaviTotali - CostiTotali = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$$

Soluzione
Le derivate parziali sono:

$$\Pi_x(x, y) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2};$$
$$\Pi_y(x, y) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3};$$

Per determinare i punti critici dobbiamo risolvere il sistema:

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3};$$

che diventa:

$$x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 1;$$

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{2}{3}} = 1;$$

e pertanto

$$x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$$

da cui $\frac{y}{x} = 1$ e quindi $y = x$. Sostituendo $y = x$ nella $x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 1$ si ottiene $y = 1$ e quindi $x = 1$. Quindi il punto critico é $P_1 = (1, 1)$.
Le derivata parziali seconde sono:

$$\Pi_{xx}(x, y) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}; \quad \Pi_{xy}(x, y) = \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}; \quad \Pi_{yy}(x, y) = -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}$$

Poiché la matrice Hessiana é definita negativa nel punto P_1, allora P_1 é un punto di massimo. Quindi impiegando $x = 1$ come primo fattore produttivo e $y = 1$ come secondo fattore produttivo si ottiene il massimo profitto che é $\Pi(1, 1,) = \frac{1}{6}$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 07 GIUGNO 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{2 \ln x - 1}$$

Soluzione

- Dominio: $D =]0, +\infty[- \{e^{\frac{1}{2}}\}$;
- $f(x) > 0 : \quad \forall\, x \in]0, 1[\cup]e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$;
- $f(x) < 0 : \quad \forall\, x \in]1, e^{\frac{1}{2}}[$;
- $f(x) = 0 : \quad x = 1$;
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to e^{\frac{1}{2}+}} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to e^{\frac{1}{2}-}} f(x) = -\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{2 \ln^2(x) - \ln(x) - 1}{(2 \ln(x) - 1)^2}$;
- $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in]0, e^{-\frac{1}{2}}[\cup]e, +\infty[; \quad f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in]e^{-\frac{1}{2}}, e[- \{e^{\frac{1}{2}}\}$;
  $f'(x) = 0 \; x = e^{-\frac{1}{2}}$ massimo relativo ; $\quad x = e$ minimo relativo
- $f''(x) = -\dfrac{2 \ln(x) - 5}{x(2 \ln(x) - 1)^3}$;
- $f''(x) > 0 : \forall\, x \in]e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{5}{2}}[; \quad f''(x) < 0 : \forall\, x \in]0, e^{\frac{1}{2}}[\cup]e^{\frac{5}{2}}, +\infty[; \quad f''(x) = e^{\frac{5}{2}}$ punto di flesso ;
- $f(D) = \;]-\infty, \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}}[\cup]e, +\infty[$; $\quad f$ biunivoca? NO; Non esistono massimi e minimi assoluti;

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^3 e^{x^2 - 1} \, dx$$

Soluzione:

$$\int x^3 e^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot 2xe^{x^2-1}$$

Integrando per parti e ponendo $g = x^2; g' = 2x; f' = 2xe^{x^2-1}; f = e^{x^2-1}$ otteniamo:

$$\frac{1}{2}\int x^2 \cdot 2xe^{x^2-1} = \frac{1}{2}\left[x^2e^{x^2-1} - \int 2xe^{x^2-1}\right] = \frac{1}{2}\left[x^2e^{x^2-1} - e^{x^2-1}\right]$$

4. Studiare al variare del parametro k il sistema $Ax = b$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

5. Studiare e classificare i punti critici della funzione:

$$f(x,y) = -x^2 + 3xy - 2y^3$$

Soluzione
Le derivate parziali prime sono: $f_x(x,y) = -2x + 3y; \quad f_y(x,y) = 3x - 6y^2;$
I punti critici sono $A = (0,0)$ e $B = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{4}\right)$.
Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx}(x,y) = -2; \quad f_{xy} = 3; \quad f_{yy} = -12y$$

Calcolando la matrice Hessiana risulta che il punto A é un punto di sella mentre B é un punto di massimo.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 21 Giugno 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\frac{1+3x}{1-3x}$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$;
- $f(x) < 0: \quad \forall\, x \in]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$;
- $f(x) > 0: \quad \forall\, x \in]-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}[$;
- $f(x) = 0: \quad x = -\frac{1}{3}$;
- $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) = +\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\frac{\pi}{4}$
- $f'(x) = \frac{3}{1+9x^2}$;
- $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in D; \quad f'(x) < 0$ MAI $\quad f'(x) = 0$ MAI
- $f''(x) = \frac{-54x}{(1+9x^2)^2}$;
- $f''(x) > 0 : \forall\, x \in]-\infty, 0[; \quad f''(x) < 0 : \forall\, x \in]0, +\infty[-\left\{\frac{1}{3}\right\}; \quad f''(x) = 0 :$ $x = 0$ punto di flesso ;
- $f(D) = \;]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[-\left\{\frac{-\pi}{4}\right\}$ f biunivoca? SI; Non esistono massimi e minimi assoluti;

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $e^{x-1} - 3x^4 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

   Soluzione: $c_3 = 0.6875$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\, dx$$

Soluzione: Per sostituzione $\sqrt{x} = t$ otteniamo:

$$\int \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2\ln(t+1)\,dt$$

Integrando per parti: $\int 2\ln(t+1)\,dt = 2[t\ln(t+1) - \int \frac{t}{t+1}\,dt] = 2[t\ln(t+1) - \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\,dt] = 2[t\ln(t+1) - t + \ln(t+1)] = 2[\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1)] + c$

4.

5. Data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determinare i valori di h per cui la matrice A abbia rango pari a 3;
- Posto $h = 0$ deteminare gli autovalori e i corrispondenti autovettori;

Soluzione: Se $h \neq 2 \pm \sqrt{6}$ allora $car(A) = 3$ altrimenti $car(A) = 2$;
Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$; I relativi autovettori sono: $x_1 = (3t, 0, t)$; $x_2 = (0, t, t)$; $x_3 = (0, 0, t)$; con $t \neq 0$.

6. Data la funzione:

$$f(x, y) = x^2 \arctan(x) + ycos(x)$$

calcolare le derivata parziali prime e seconde.

Soluzione: $f_x = 2x\arctan x + \frac{x^2}{1+x^2} - y\sin x$; $f_y = cosx$; $f_{xx} = 2\arctan x + \frac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2} - y\cos(x)$; $f_{xy} = -\sin(x)$; $f_{yy} = 0$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 12 Luglio 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R}$;
- $f(x) > 0 : \quad \forall\, x\, \mathbb{R} - \{2\}$;
- $f(x) < 0 : \quad$ MAI ;
- $f(x) = 0 : \quad x = 2$;
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$;
- $f'(x) > 0 \quad \forall\, x\,]2, +\infty[; \quad f'(x) < 0 \quad \forall\, x\,] - \infty, 2[; \quad f'(x) = 0 \quad x = 2$; (punto di minimo relativo e assoluto).
- $f''(x) = \dfrac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$;
- $f''(x) > 0 : \forall\, x \ \in]1, 3[; \quad f''(x) < 0 : \forall\, x \ \in] - \infty, 1[\cup \cup]3, +\infty[; \quad f''(x) = 0 : x = 1; x = 3$ punti di flesso ;
- $f(D) = [0, +\infty[; \quad F$ biunivoca? NO;

2. Determinare il polinomio di Taylor della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ di punto iniziale $x_0 = 1$ e di ordine $n = 2$.

   Soluzione: $f(1) = 1; \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}; \quad f'(1) = \frac{1}{3}; \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}; \quad f''(1) = -\frac{2}{9}$.
   Si ottiene che:
   $$f(x) \approx 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{9}(x - 1)^2$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\, dx$$

Soluzione: Per sostituzione $\sqrt{x} = t$ otteniamo:

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\, dx = 2 \int \frac{t^2 - t}{t + 1}\, dt = 2 \int t - 2 + \frac{2}{t + 1}\, dt = t^2 - 4t + 4 \ln |t + 1| + c$$

Ritornando alla variabile x avremo:

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\, dx = x - 4\sqrt{x} + 4 \ln(\sqrt{x} + 1) + c$$

4. Studiare al variare del parametro k il sistema $Ax = b$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

5. Un'azienda produce due beni A e B. Il costo giornaliero di produzione delle quantitá $Q_A$di A e Q_B di B é $C(Q_A, Q_B) = 0.1(Q_A^2 + Q_AQ_B + Q_B^2)$. Ipotizzando che l'azienda venda tutta la produzione di A al prezzo $P_A = 120$ e B al prezzo $P_B = 90$, calcolare i livelli di produzione che massimizzano il profitto.
Soluzione: $\Pi(Q_A, Q_B) = 120Q_A + 90Q_B - 0.1(Q_A^2 + Q_AQ_B + Q_B^2)$; Dalle condizione di primo ordine

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_A} = 120 - 0.2Q_A - 0.10Q_B = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_B} = 90 - 0.2Q_B - 0.10Q_A = 0;$$

otteniamo che $(Q_A^* = 500, Q_B^* = 200)$. Calcolando la matrice Hessiana:

$$\frac{\partial \Pi^2}{\partial^2 Q_A} = -0.20; \quad \frac{\partial \Pi^2}{\partial^2 Q_B} = -0.20; \quad \frac{\partial \Pi^2}{\partial Q_A \partial Q_B} = -0.10;$$

avremo che

$$H(500, 200) = \begin{pmatrix} -0.20 & -0.10 \\ -0.10 & -0.20 \end{pmatrix} \Rightarrow det(H_1) = -0.20 < 0; \quad det(H) = 0.03 > 0$$

la matrice Hessiana é definita positiva e quindi $(Q_A^* = 500, Q_B^* = 200)$ é un punto di massimo.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 06 Settembre 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$$

Soluzione

- Dominio: $D =]0, +\infty[- \{+1\}$;
- $f(x) > 0: \quad \forall x \in D$;
- $f(x) < 0: \quad$ MAI ;
- $f(x) = 0: \quad$ MAI;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to+1^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to+1^-} f(x) = 0$;
- $f'(x) = e^{\frac{1}{\ln x}} \dfrac{\ln^2(x) - 1}{\ln^2(x)}$;
- $f'(x) > 0 \quad \forall x\,]0, \dfrac{1}{e}[\cup]e, +\infty[; \quad f'(x) < 0 \quad \forall x\,]\dfrac{1}{e}, e[-\{1\}; f'(x) = 0\, x = e; x = \dfrac{1}{e}$.
- $x = \frac{1}{e}$ (max relativo); $x = e$ (min relativo);
- $f''(x) = -e^{\frac{1}{\ln x}} \left(\dfrac{\ln^2(x) - 2\ln(x) - 1}{x \ln^4(x)} \right)$;
- $f''(x) > 0 : \forall x \in]e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}}[; \quad f''(x) < 0 : \forall x \in]0, e^{1-\sqrt{2}}[\cup]e^{1+\sqrt{2}}, +\infty[; \quad f''(x) = 0 : \quad x = e^{1-\sqrt{2}}; x = e^{1+\sqrt{2}}$ punti di flesso ;
- $f(D) =]0, \frac{1}{e^2}] \cup [e^2, +\infty[; \quad f$ biunivoca? NO;

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^4 - 2e^{5x} = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[-1, 0]$.

Soluzione:

$$c_3 = -0.5625$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{3x - 2}{1 + x^2}\, dx$$

Soluzione: $\displaystyle\int \frac{3x-2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{3x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{-2}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$
$\displaystyle\frac{3}{2}\ln(1+x^2) - 2\arctan x + c$

4. Determinare gli autovalori e i corrispondenti autovettori della matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Autovalori sono: $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 3; \quad \lambda_3 = 5$. Corrispondenti autovettori: $x_1 = (t, -3t, t); \quad x_2 = (t, 0, 0); \quad x_3 = (\frac{7}{2}t, 2t, t), \quad \forall t \neq 0$

5. Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione:

$$f(x,y) = x^2 e^{x^2+y^2}$$

Soluzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}(x^2+1); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y e^{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2}(2x^4+5x^2+1); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2}(x^2+1); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 e^{x^2+y^2}(y^2+1)$$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 10 Novembre 2017

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1+e^x}$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R}$;
- $f(x) > 0 : \quad \forall\, x \in D$;
- $f(x) < 0 : \quad$ MAI ;
- $f(x) = 0 : \quad$ MAI;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$;
- $f'(x) = \frac{-e^x}{(e^{2x}+2e^x+2)}$;
- $f'(x) > 0 \quad$ MAI; $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in D$; $\quad f'(x) = 0 \quad$ MAI .
- $f''(x) = \frac{e^x(e^{2x}-2)}{(e^{2x}+2e^x+2)^2}$;
- $f''(x) > 0 : \forall\, x \in]\ln\sqrt{2}, +\infty[$; $\quad f''(x) < 0 : \forall\, x \in]-\infty, \ln\sqrt{2}[$; $\quad f''(x) = 0 :$ $x = \ln\sqrt{2}$ punto di flesso ;
- $f(D) =]0, \frac{\pi}{4}[\quad f$ biunivoca? SI; Non esistono massimi e minimi assoluti.

2. Determinare il polinomio di grado $n = 2$, punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{x-1}$$

.

Soluzione: $f(0) = 0$; $\quad f'(x) = \frac{2}{(x-1)(2x+1)} - \frac{\ln(2x+1)}{(x-1)^2}$; $\quad f'(0) = -2$; $\quad f''(x) = -\frac{4}{(2x+1)^2(x-1)} - \frac{4}{(2x+1)(x-1)^2} + \frac{2\ln(2x+1)}{(x-1)^3}$; $\quad f''(0) = 0$. Quindi:

$$f(x) \approx -2x$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,dx$$

Soluzione: $\dfrac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1} = x^3-3x^2+x-3+\dfrac{2x}{x^2-1}$ Quindi

$$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,dx = \int (x^3-3x^2+x-3)\,dx + \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x^2-1|+c$$

4. Risolvere il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in, \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix};$$

Soluzione: Il determinante di A é nullo, ma considerando un matrice estratta del tipo $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ il $det(A^*) = 1$ e quindi $car(A) = 2$. Mentre se si estrae dalla matrice completa $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & k \end{pmatrix}$ un minore di ordine tre del tipo $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}$; risulta che $\det(B^*) = k-2$ e quindi se $k \neq 2$ allora $car(B) = 3$ e il sistema é incompatibile. Se $k = 2$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni ponendo $x_3 = t$ e scegliendo le prime due equazioni: $x_1 = 1-t; \quad x_2 = -2t; \quad x_3 = t$

5. Studiare il segno della seguente forma quadratica utilizzando i determinanti di Nord Ovest:

$$Q(x,y,z) = -x^2-3y^2+4xy+2xz-5yz$$

Soluzione: La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $det(A_1) = -1; \quad det(A_2) = -1 < 0; \quad det(A) = -\frac{3}{4} < 0$ e quindi la forma quadratica é indefinita.