

Prova scritta di Matematica Finanziaria -Università di Bari
a.a. 2022-2023 - 20 Dicembre 2023 - Traccia A

PRIMO CFU

Un individuo deposita un capitale C in banca al tasso semestrale (RIS) $i_{\frac{1}{2}}$ in regime di interesse semplice per 3 semestri. Determinare il tasso $i_{\frac{1}{2}}$ per ottenere un montante pari a $M_1 = 1.6C$. Tale montante viene reinvestito in regime di interesse composto (RIC) al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}}$ ricavato precedentemente. Determinare dopo quanto tempo si ottiene un interesse $I = 0.3C$.

SECONDO CFU

Un individuo prende in prestito la somma S da restituire con quattro rate ai tempi $t = 1, 2, 3, 4$ (tempo espresso in semestri). Sapendo che le rate sono: $R_1 = 5500$; $R_2 = 2800$; $R_3 = \frac{R_1 + R_2}{4}$; $R_4 = 3R_2$ e che il tasso annuale convertibile semestralmente è $j(2) = 0.10$, stilare il piano di ammortamento.

TERZO CFU

Un individuo dispone di due opportunità di investimento:

- 1) Investe $1.5x$ al tempo $t = 0$ e riceve x al tempo $t_1 = 2$ e $2x$ al tempo $t_2 = 4$ (tempo espresso in anni);
- 2) Investe $1.5x$ al tempo $t = 0$ e riceve $2x$ al tempo $t_1 = 2$ e $0.5x$ al tempo $t_2 = 4$ (tempo espresso in anni);

Determinare:

- Il tasso di valutazione j che rende le due operazioni indifferenti secondo il criterio del REA;
 - L'operazione più conveniente in base al criterio del TIR;
-

QUARTO CFU

Al tempo $t = 0$ si osservano sul mercato i prezzi delle seguenti obbligazioni (di valore nominale 100 euro):

- 88 prezzo a pronti di un'obbligazione con scadenza $t = 4$;
- 91 prezzo a pronti di un'obbligazione con scadenza $t = 7$;
- 82 prezzo a termine di un'obbligazione con emissione al tempo $t = 4$ e scadenza $t = 7$.

Calcolare i tassi di interesse $i(0, 4)$, $i(0, 7)$, $i(4, 7)$. Dire se, dall'osservazione di tali tassi, si può dedurre che è violato il principio di assenza di arbitraggio e in caso affermativo, costruire una strategia di arbitraggio e determinare il profitto finale, supponendo di potere effettuare vendite allo scoperto per un importo massimo di euro 10000.

QUINTO CFU

Si consideri una operazione finanziaria A che prevede introiti di euro 200 euro al tempo $t = 1$, euro 300 al tempo $t = 4$, euro 500 al tempo $t = 5$ (tempo espresso in anni). Calcolare la duration e la convessità di A utilizzando il tasso di interesse annuale $i = 0.03$. Determinare inoltre la variazione relativa (utilizzando il polinomio di Taylor di secondo ordine) sapendo che il tasso di interesse passa da $i = 0.03$ a $i' = 0.04$.

SESTO CFU

Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da rendimento medio, scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a:

$$\mu_A = 0.20; \quad \sigma_A = 3; \quad \mu_B = 0.35; \quad \sigma_B = 4; \quad \rho_{AB} = -0.20$$

Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale nel titolo A ed una percentuale $1 - \alpha$ nel titolo B :

1. rappresentare nel piano media-varianza l'insieme dei portafogli ammissibili e la frontiera efficiente;
 2. determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza.
-

Soluzioni

$$1) M_1 = C(1 + i_{1/2} \cdot 3) = 1,6C \Rightarrow i_{1/2} = 0,20$$

$$M_1 (1,20)^t = M_1 + I = 0$$

$$1,6C(1,20)^t = 1,6C + 0,3C$$

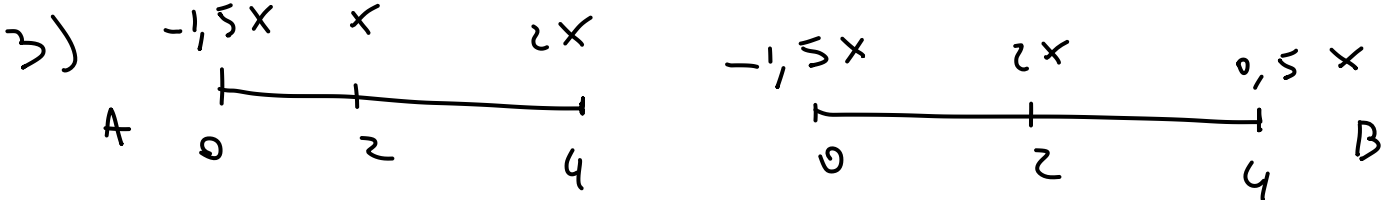
$$1,6C(1,20)^t = 1,90C \Rightarrow (1,20)^t = 1,1875$$

$$\text{e punto } t = \frac{\ln 1,1875}{\ln 1,20} = 0,9425 \text{ semestri}$$

$$2) i_{1/2} = \frac{0,10}{2} = 0,05; S = 5500(1,05)^{-1} + 2800(1,05)^{-2} + 2075(1,05)^{-3} + 8400(1,05)^{-4}$$

$$= 16480,94$$

n	I	C	R	D
0				16480,94
1	824,04	4675,96	5500	11804,98
2	590,24	2209,76	2800	9595,22
3	479,76	1585,24	2075	8000
4	400	8000	8400	0



$$\mathbb{R} \bar{E} A_A = \mathbb{R} \bar{E} A_B$$

$$-1,5x + xv^2 + 2xv^4 = -1,5x + 2xv^2 + 0,5xv^4$$

$$x(v^2 - 1,5v^4) = 0 \Rightarrow v^2 - 1,5v^4 = 0$$

$$\text{con } x \neq 0$$

$$v^2(1 - 1,5v^2) = 0$$

$$v^2 = y \Rightarrow 1 - 1,5y = 0 \Rightarrow y = 0,6$$

Soluzioni finanziarie
Significative

$$\begin{aligned} TIR_A = 0 \quad & -1,5x + x v^2 + 2x v^4 = 0 \\ & x(-1,5 + v^2 + 2v^4) = 0 \quad x \neq 0 \\ & \quad \quad \quad y = v^2 \end{aligned}$$

$$2y^2 + y - 1,5 = 0 \Rightarrow y = 0,6513$$

$$v = \sqrt{0,6513} = 0,8070$$

$$TIR_A = 23,91\%$$

$$TIR_B = 0 \quad -1,5x + 2x v^2 + 0,5x v^4 = 0$$

$$x(-1,5 + 2v^2 + 0,5v^4) = 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ y = v^2$$

$$0,5y^2 + 2y - 1,5 = 0$$

$$y = 0,6457$$

$$v = \sqrt{0,6457} = 0,8035$$

$$TIR_B = 24,45\%$$

B > A

$$4) \quad 88 \cdot r(0,4) = 100 \Rightarrow r(0,4) = 1,1363$$

$$i(0,4) = (1,1363)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,0324$$

$$81 \cdot r(0,7) = 100 \Rightarrow r(0,7) = 1,0989$$

$$i(0,7) = (1,0989)^{\frac{1}{7}} - 1 = 0,0135$$

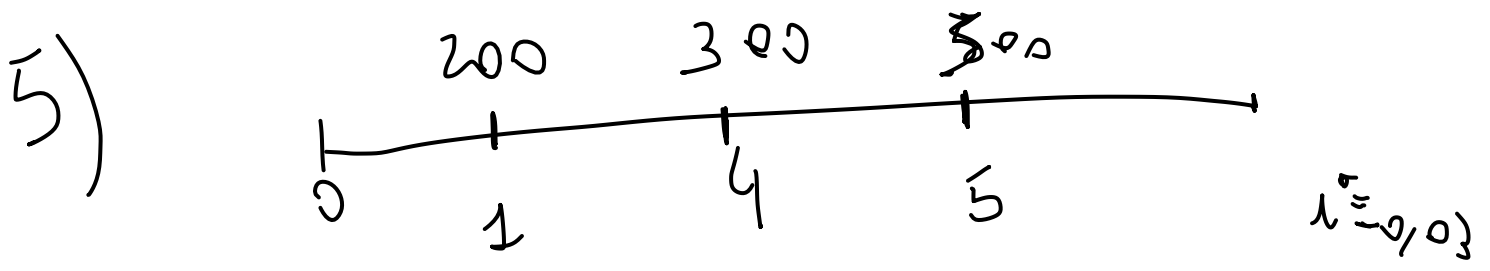
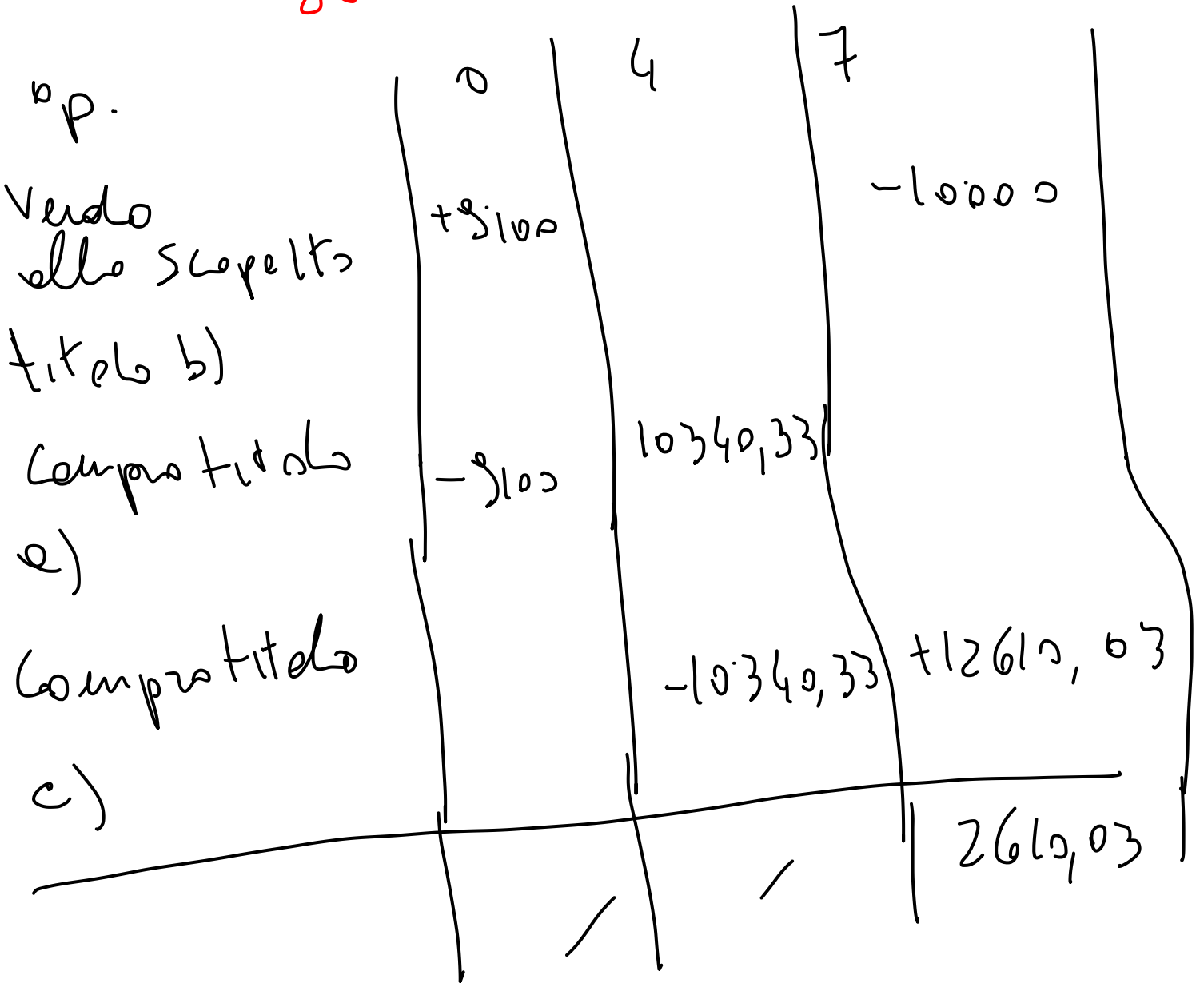
$$82 \cdot r(1,7) = 100 \Rightarrow r(1,7) = 1,2195$$

$$i(1,7) = (1,2195)^{\frac{1}{7}} - 1 = 0,0683$$

$$r(0,4) \cdot r(4,7) = 1,1363 \cdot 1,2195 = 1,3857$$

$$> r(0,7) = 1,0989$$

Az b. + vegezo



$$V_{0,12} = 1 \cdot 200 (1,03)^{-1} + 4 \cdot 300 (1,03)^{-4} + 5 \cdot 500 (1,03)^{-5}$$

$$200(1,03)^{-1} + 300(1,03)^{-4} + 500(1,03)^{-5}$$

=

$$\frac{3416,88}{892,02} = 3,83 \text{ eur.}$$

$$\text{Conv.} = 1^2 \cdot 200(1,03)^{-1} + 4^2 \cdot 300(1,03)^{-4} + 5^2 \cdot 500(1,03)^{-5}$$

$$892,02$$

$$= \frac{15241,52}{892,02} = 17,08$$

$$\delta = \ln(1,03) = 0,0295$$

$$\delta' = \ln(1,04) = 0,0392$$

$$\text{voz} \approx -\text{duz} d\delta + \frac{1}{2} \text{conv.} (d\delta)^2 = -0,0363$$

$$6) \sigma_p^2 = d^2 \cdot 9 + (1-d)^2 \cdot 16 + 2d(1-d) \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-0,2)$$

$$\sigma_p^2 = 9d^2 + 16d^2 - 32d + 16 - 4,8d + 4,8d^2$$

$$\sigma_p^2 = 29,8d^2 - 36,8d + 16$$

$$d^* = \frac{36,8}{2 \cdot 29,8} = 0,6174$$

$$\mu_p = 0,2d + 0,35(1-d) = 0,35 - 0,15d$$

$$\Rightarrow d = 2,33 - 6,6 \mu_p$$

$$\sigma_p^2 = 29,8(2,33 - 6,6 \mu_p)^2 - 36,8(2,33 - 6,6 \mu_p) + 16 =$$

$$\sigma_p^2 = 1324,44 \mu_p^2 - 681,75 \mu_p + 92,38$$

$$\sigma_{p^*}^2 = 4,63$$

$$M_{p^*} = 0,2571$$

