Università degli Studi di Bari

Dipartimento di Economia e Finanza

RafforzaMenti delle competenze iniziali di Matematica Finanziaria

Prof. Giovanni Villani

Indice

1 I regimi finanziari: RIS e RIC **3**
- 1.1 Richiami di Matematica: funzioni e successioni . . . 3
  - 1.1.1 Alcune Funzioni elementari . . . 5
  - 1.1.2 Richiami sui Limiti . . . 8
- 1.2 Applicazioni di Matematica Finanziaria . . . 10
  - 1.2.1 Operazione di Capitalizzazione . . . 10
  - 1.2.2 Operazione di attualizzazione . . . 11
  - 1.2.3 Il regime dell'interesse semplice (RIS) . . . 11
  - 1.2.4 La capitalizzazione degli interessi nel RIS . . . 12
  - 1.2.5 Il Regime degli interessi composto RIC . . . 14
  - 1.2.6 Tasso nominale annuo convertibile m volte nell'anno. . . . 15
- 1.3 Esercizi di Riepilogo . . . 16

2 Le rendite finanziarie e i Piani di ammortamento **21**
- 2.1 Richiami di Matematica: la Serie Geometrica . . . 21
  - 2.1.1 Serie Geometrica . . . 22
- 2.2 Applicazioni Finanziarie: le Rendite . . . 22
  - 2.2.1 Valore di una Rendita . . . 23
  - 2.2.2 Alcune formule per il calcolo del valore di una rendita . . . 24
  - 2.2.3 Rendite perpetue . . . 26
  - 2.2.4 Problemi inversi . . . 26
- 2.3 Applicazioni Finanziarie: I piani di Ammortamento . . . 27
  - 2.3.1 Piano di ammortamento di un capitale S rimborsabile interamente a scadenza con interessi pagati posticipatamente . . . 27
  - 2.3.2 Piano di ammortamento con rimborso graduale del capitale S e interessi pagati posticipatamente . . . 28
  - 2.3.3 Piano di Ammortamento con rate costanti (ammortamento Francesce) . . . 31
  - 2.3.4 Piano di Ammortamento con quote capitali costanti (ammortamento Italiano) . . . 33
  - 2.3.5 Piano di ammortamento con quote di accumulazione (ammortamento Americano) . . . 34
- 2.4 Esercizi di Matematica Finanziaria . . . 35
  - 2.4.1 Esercizi di Riepilogo sulle Rendite . . . 35
  - 2.4.2 Esercizi di Riepilogo sui piani di ammortamento . . . 37

3 Valutazione di operazioni finanziaria in condizioni di certezza: REA E TIR 48
3.1 Richiami di Matematica: il Teorema degli Zeri. 48
3.2 Applicazioni Finanzarie: il criterio del REA e del TIR 48
3.2.1 Criterio del Risultato Economico Attualizzato (REA) 49
3.2.2 Criterio del Tasso Interno di Rendimento (TIR) 50
3.2.3 Il TAN e il TAEG 52
3.3 Esercizio di Riepilogo. 54

4 Approssimazione di una funzione mendiante polinomi: Duration e Convessitá. 64
4.1 Richiami di Matematica: Calcolo differenziale e integrale. 64
4.2 Applicazioni Finanziarie: Duration e Convessitá 67
4.2.1 La durata media finanziaria come misura della volatilità 68
4.2.2 Immunizzazione Finanziaria 72
4.2.3 Forza di interesse 74
4.2.4 Esercizi di Riepilogo 75

5 Teoria del portafoglio finanziario 79
5.1 Richiami di Probabilitá 79
5.1.1 Variabili aleatorie finite 80
5.1.2 Valore atteso, Varianza e coefficiente di correlazione 81
5.2 Applicazioni alla Finanza: Teoria del portafoglio finanziario con due titoli rischiosi 83
5.2.1 Casi particolari 88
5.2.2 Portafoglio ammissibili e portafogli efficienti 89
5.3 Esercizi di Riepilogo 90

Capitolo 1

I regimi finanziari: RIS e RIC

1.1 Richiami di Matematica: funzioni e successioni

Definizione 1 *Assegnati due insiemi A e B, si definisce funzione f di A in B una "legge"che associa ad ogni elemento di x di A un unico elemento y di B che denoteremo con $f(x)$. L'elemento $f(x)$ si dice valore di f in x. La funzione si indica:*

$$f : A \to B$$

L'insieme A si chiama **insieme di definizione o di partenza** o **dominio**, mentre l'insieme B si chiama **insieme di arrivo**. L'insieme dei valori di una funzione é detto **codominio** o **immagine** e si denota con $f(A)$:

$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ t.c. } y = f(x)\}$$

Ovviamente $f(A) \subseteq B$. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$, allora f é una funzione reale di variabile reale.

Definizione 2 *Se una funzione f é invertibile si definisce funzione* ***inversa*** *di f e si denota con f^{-1}, la funzione:*

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

$$\forall y \in B \quad f^{-1}(y) = x \ t.c. \ \ f(x) = y$$

Funzioni monotone

Definizione 3 *Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$;*

- *f si dice* ***crescente*** *in X se $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;*
- *f si dice* ***strettamente crescente*** *in X se $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;*
- *f si dice* ***decrescente*** *in X se $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;*
- *f si dice* ***strettamente decrescente*** *in X se $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;*
- *Se f é* ***crescente*** *o* ***decrescente*** *in X, allora f si dice che é* ***monotona*** *in X;*
- *Se f é* ***strettamente crescente*** *o* ***strettamente decrescente*** *in X, allora f si dice che é* ***strettamente monotona*** *in X;*

Successioni

Una successione é una funzione f definita in $\mathbb{N}$ e a valori in $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Per indicare una successione si utilizza la notazione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il codominio della successione é $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ e si chiama insieme dei termini della successione.

Definizione 4 *Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **monotona crescente (strettamente crescente)** se:*

$$x_n \leq x_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (x_n < x_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N})$$

*Si dirá **monotona decrescente (strettamente descrescente** se:*

$$x_n \geq x_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (x_n > x_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N})$$

Definizione 5 *La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata superiormente $\iff$ $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ é limitato superioriormente:*

$$\exists k \in \mathbb{R}\, t.c.\, x_n \leq k, \,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata inferiormente $\iff$ $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ é limitato inferiormente:

$$\exists h \in \mathbb{R}\, t.c.\, h \leq x_n \,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Definizione 6 *Si definisce **estremo inferiore** di una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata inferiormente il piú grande dei minoranti e si denota con $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$,*

$$h = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : h \leq x_n \\ \\ \forall \epsilon > 0\, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}\, t.c.\, h + \epsilon > x_{\bar{n}} \end{cases}$$

Definizione 7 *Si definisce **estremo superiore** di una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata superiormente il piú piccolo dei maggioranti e si denota con $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$,*

$$k = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : k \geq x_n \\ \\ \forall \epsilon > 0\, \exists\, \bar{\bar{n}} \in \mathbb{N}\, t.c.\, k - \epsilon < x_{\bar{\bar{n}}} \end{cases}$$

Il numero di Nepero

Il numero di Nepero é un numero irrazionale compreso tra 2 e 3 e si denota con la lettera e. Esso equivale a $e = 2,71828...$

La successione di termine generale $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ é limitata superiormente ed é monotona crescente. Si definisce:

$$e = \sup \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

La successione di termine generale $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$ é limitata inferiormente ed é monotona decrescente. Si definisce:

$$e = \inf \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Si ha che:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

1.1.1 Alcune Funzioni elementari

Funzione potenza con esponente $n \in \mathbb{N}$

Si definisce funzione potenza con esponente $n \in \mathbb{N}$ la funzione:

$$f(x) = x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x \quad n \text{ volte}$$

Caso n pari:

- $D = \mathbb{R}; \quad f(D) = [0, +\infty[$;
- f é pari;
- f é strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty[$;
- f é strettamente convessa.

Osservazione 1 *Tale funzione* ***non é biunivoca****, ma ristretta a* $[0, +\infty[$ *é strettamente crescente ed é invertibile. La sua inversa si definisce radice n-esima.*

Caso n dispari:

- $D = \mathbb{R}; \quad f(D) = \mathbb{R}$;
- f é dispari;
- f é strettamente crescente (quindi invertibile);
- f é strettamente concava in $]-\infty, 0]$ e strettamente convessa in $[0, +\infty[$.

Osservazione 2 *Tale funzione é strettamente crescente e la sua inversa si definisce radice n-esima.*

Funzione potenza con esponente $-n$

Si consideri la funzione $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.
Caso n pari:

- $D = \mathbb{R} - \{0\}; \quad f(D) =]0, +\infty[$;
- f é pari;
- f é strettamente crescente in $]-\infty, 0[$ e strettamente decrescente in $]0, +\infty[$;
- f é strettamente convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$.

Caso n dispari:

- $D = \mathbb{R} - \{0\}; \quad f(D) = \mathbb{R} - \{0\}$;
- f é dispari;
- f é strettamente decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$;
- f é strettamente concava in $]-\infty, 0[$ e strettamente convessa in $]0, +\infty[$.

Funzione potenza con esponente $\dfrac{1}{n}$

Si consideri la funzione $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
Caso n pari

- $D = [0, +\infty[$;
- $f(D) = [0, +\infty[$;
- f é strettamente crescente;
- f é strettamente concava

Caso n dispari

- $D = \mathbb{R}$;
- $f(D) = \mathbb{R}$;
- f é dispari;
- f é strettamente crescente;
- f é strettamente convessa in $]-\infty, 0]$ e strettamente concava in $[0, +\infty[$

Funzione esponenziale

Sia $a > 0$ e $a \neq 1$. Definiamo come la funzione esponenziale di base a:

$$f(x) : x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in]0, +\infty[\text{ con } x \in \mathbb{R}$$

Caso con $a > 1$:

- $D = \mathbb{R}$;
- $f(D) =]0, +\infty[$;
- f é strettamente crescente;
- f é strettamente convessa;

Caso con $0 < a < 1$:

- $D = \mathbb{R}$;
- $f(D) =]0, +\infty[$;
- f é strettamente decrescente;
- f é strettamente convessa;

Funzione logaritmo di base a

L'inversa della funzione esponenziale di base a si definisce funzione logaritmo di base a e di indica con $f(x) = \log_a x$.

$$\log_a(x) : x \in]0, +\infty[\rightarrow \log_a(x) \in \mathbb{R}$$

Quindi risulta che $\forall\, a > 0$ e $a \neq 1$:

$$\log_a y = x \iff a^x = y$$

Quindi si ottiene che:

$$\log_a a^x = x; \quad a^{\log_a x} = x$$

Caso $a > 1$:

- $D =]0, +\infty[$;
- $f(D) = \mathbb{R}$;
- f é strettamente crescente;
- f é strettamente concava.

Caso $0 < a < 1$

- $D =]0, +\infty[$;

- $f(D) = \mathbb{R}$;
- f é strettamente decrescente;
- f é strettamente convessa.

Proprietá della funzione logaritmo:

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
3. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log y$;
4. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$;
5. $\log_a 1 = 0$;
6. $\log_a a = 1$.

1.1.2 Richiami sui Limiti

Definizione 8 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Il punto x_0 é detto* ***punto di accumulazione per*** *X, se in ogni intorno di x_0 esiste almeno un punto di X diverso da x_0, ossia:*

$$\forall I_{x_0},\, \exists x \in I_{x_0} \cap X - \{x_0\}$$

Definizione 9 *Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ un* ***punto di accumulazione per*** *X e sia $L \in \tilde{\mathbb{R}}$. Si dice che il limite di $f(x)$, per x tendente a x_0, é L o, equivalentemente, che $f(x)$ tende ad L quando x tende a x_0, e si scrive:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se é verificata la seguente condizione:

$$\forall I_L,\, \exists\, I_{x_0}\; t.c.\, \forall x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\} : f(x) \in I_L$$

Caso $x_0 \in \mathbb{R}$ **e** $L \in \mathbb{R}$

In questo caso $I_L =]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$ raggio dell'intorno. Si ha:

$$f(x) \in I_L \iff |f(x) - L| < \varepsilon$$

Inoltre, se $I_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ con $\delta > 0$ raggio dell'intorno, si ha:

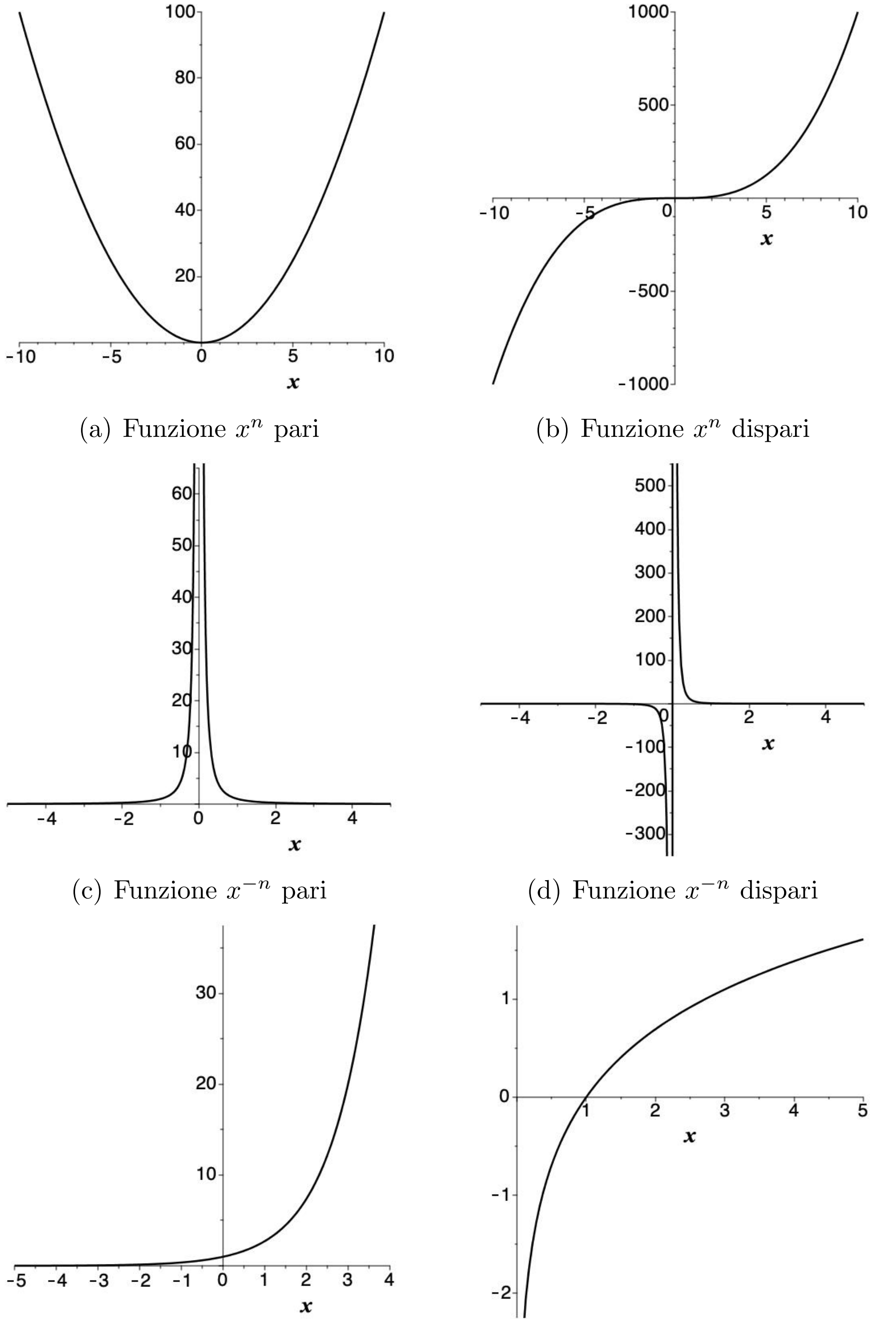
$$x \in I_{x_0} - \{x_0\} \iff 0 < |x - x_0| < \delta$$

La definizione di limite si puó scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \text{t.c.}\, \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

La funzione **converge** ad L in x_0.



(a) Funzione x^n pari

(b) Funzione x^n dispari

(c) Funzione x^{-n} pari

(d) Funzione x^{-n} dispari

(e) Funzione e^x

(f) Funzione $\ln(x)$

Figura 1.1: Grafici di alcune funzioni elementari

Limiti Notevoli

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$

- $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e;$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e;$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1;$

- , $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$

- , $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$

1.2 Applicazioni di Matematica Finanziaria

1.2.1 Operazione di Capitalizzazione

Supponiamo di avere due istanti: quello inziale o presente $t_0 = 0$ in cui viene investito un capitale C e un istante futuro $t_1 = 1$ in cui ricaviamo una somma M (montante) già nota in t_0. La differenza tra il montante M ed il capitale C si definisce **interesse**:

$$I = M - C \tag{1.1}$$

Risulta immediato dalla formula (1.1) che $M = C + I$, ossia il montante è la somma tra il capitale impiegato e gli interessi prodotti. Si definisce **tasso di interesse** e si denota con i il rapporto tra l'interesse prodotto e il capitale investito:

$$i = \frac{I}{C} \tag{1.2}$$

Il tasso di interesse i può essere indicato in modo percentuale o unitario. Quindi se $i = 10\%$ corrispendi in termini unitari $i = 0.10$. Dalla formula (1.2) otteniamo che $I = Ci$ e quindi:

$$M = C + I = C + Ci = C(1 + i)$$

Denoteremo con $r = (1 + i)$ il **fattore di capitalizzazione** e quindi il montante si ottiene moltiplicando il capitale iniziale C per il fattore di capitalizzazione r:

$$M = Cr \tag{1.3}$$

Tale operazione di definisce di *operazione di capitalizzazione*.

1.2.2 Operazione di attualizzazione

Analizziamo l'operazione simmetrica, ossia quella in cui un soggetto dispone di una somma di denaro nell'istante futuro $t_1 = 1$ e vuole entrarne in possesso oggi, nell'istante $t_0 = 0$. Tale operazione si definisce operazione di **attualizzazione**. Senza cambiare notazione rispetto all'operazione precedente di capitalizzazione, il capitale C puó essere considerato come il valore attuale nell'istante $t_0 = 0$ di una somma futura M disponibile in $t_1 = 1$. E quindi dalla formula (1.3) si ottiene:

$$C = \frac{M}{r} = \frac{M}{1+i} = M(1+i)^{-1} \tag{1.4}$$

Denoteremo con $v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i}$ il **fattore di attualizzazione** e quindi il valore attuale di una somma di denaro M disponibile in futuro é:

$$C = Mv \tag{1.5}$$

Osservazione 3 *In una operazione finanziaria si determina una relazione di* ***equivalenza*** *tra due somme di denaro disponibili in istanti diversi, ossia M é il montante di C ma anche che C é il valore attuale di M. Quindi se si capitalizza una somma C disponibile in $t_0 = 0$ si ottiene $M = Cr$ in $t_1 = 1$ ma se poi si attualizza $M = Cr$ disponibile in $t_1 = 1$ si ottiene in $t_0 = 0$ il valore attuale Crv che deve essere pari alla somma iniziale, ossia $Crv = C$ e quindi $rv = 1$.*

Osservazione 4 *In una operazione di capitalizzazione, in assenza di spese, normalmente $M > C$ e quindi $I > 0$. Di conseguenza, il tasso di interesse sarà $i > 0$. Nel caso particolare in cui l'interesse fosse nullo, avremo che $i = 0$ e quindi $v = 1$. All'aumentare del tasso possiamo notare il fattore di attualizzazione v diminuisce fino caso limiti in cui $\lim_{i \to +\infty} v = \lim_{i \to +\infty} \frac{1}{1+i} = 0$. Quindi possiamo affermare che $v \in [0, 1]$.*

1.2.3 Il regime dell'interesse semplice (RIS)

Consideriamo ora sia l'aspetto temporale, ossia la durata dell'investimento, e sia la modalità attraverso la quale vengono calcolati gli interessi. Nel regime dell'interesse semplice, d'ora in poi **RIS**, gli interessi vengono calcolati in proporzione al capitale investito e alla durata dell'operazione:

$$I = Cit \tag{1.6}$$

dove C è il capitale investito, t è la durata dell'investimento che può essere espressa in anni, semestri, mesi, ecc, mentre i è il **tasso d'interesse periodale**, ossia il tasso riferito all'unità di misura scelta per il tempo. Quindi se un investimento dura $t = 3$ anni abbiamo bisogno che il tasso i sia un tasso annuale. Dalla formula dell'interesse (1.6), possiamo ricavare il montante all'istante finale t:

$$M = C + I = C + Cit = C(1 + it) \tag{1.7}$$

dove $r(t) = (1 + it)$ é il **fattore di capitalizzazione semplice**.
Consideriamo l'analoga operazione di attualizzazione, in cui disponiamo alla scadenza t di una somma M e vogliamo conoscere il suo valore attuale C in $t = 0$. Come abbiamo visto, M può essere interpretato come il montante ottenuto investendo C per una durata pari a t anni, ossia

$M = C(1+it)$. Poichè siamo interessati a determinare il valore attuale C, con alcuni passaggi otteniamo che:

$$C = \frac{M}{1+it} \tag{1.8}$$

Denotando con $v(t) = \dfrac{1}{1+it}$ il **fattore di attualizzazione semplice**, otteniamo che il valore attuale in $t = 0$ di una somma M disponibile all'istante t è:

$$C = Mv(t) \tag{1.9}$$

In questo caso, la differenza tra i due importi si chiama **sconto** e lo denotiamo con D:

$$D(t) = M - C = M - \frac{M}{1+it} = \frac{Mit}{(1+it)}$$

Alcune Formule inverse nel RIS

- $i = \dfrac{I}{Ct}; \quad i = \dfrac{M-C}{Ct};$
- $t = \dfrac{I}{Ci}; \quad i = \dfrac{M-C}{Ci};$
- $C = \dfrac{I}{it}; \quad C = \dfrac{M}{1+it};$

1.2.4 La capitalizzazione degli interessi nel RIS

Il RIS trova applicazione per periodi di tempo piuttosto brevi. In questo regime gli **interessi non sono fruttiferi di altri interessi**, e in qualche modo restano pietrificati. Quindi l'investitore ha convenienza ha riscuotere gli interessi maturati e aggiungerli al capitale. Tale operazione si chiama *capitalizzazione degli interessi*. Dimostriamo il tutto con un esempio. Prendiamo in considerazione un'operazione di durata complessiva pari a t. Il montante che si ottiene alla scadenza t, senza che l'investitore effettui operazioni intermedie è:

$$M_1 = C(1+it)$$

Consideriamo ora il caso in cui interrompiamo l'operazione in un istante intermedio s precedente a t. Il montante nell'istante intermedio s è:

$$M(s) = C(1+is)$$

L'investitore riceve il montante $M(s)$ e immediatamente lo reinveste per la durata residua che è $t - s$. Quindi il montante finale è:

$$\tilde{M} = M(s)[1 + i(t-s)] = C(1+is)[1+i(t-s)] = C(1 + it + i^2 s(t-s))$$

Possiamo notare come $\tilde{M} > M_1$, e quindi se in un istante intermedio si capitalizzano gli interessi, il montante aumenta. Quindi l'investitore avrà convenienza ad effettuare operazioni di capitalizzazione intermedie degli interessi maturati. Possiamo affermare che il regime RIS *non è scindibile*. Generalizziamo fissando un periodo intermedio $\dfrac{t}{2}$ degli interessi. Il montante complessivo sará:

$$M_2 = C\left(1 + \frac{it}{2}\right)^2$$

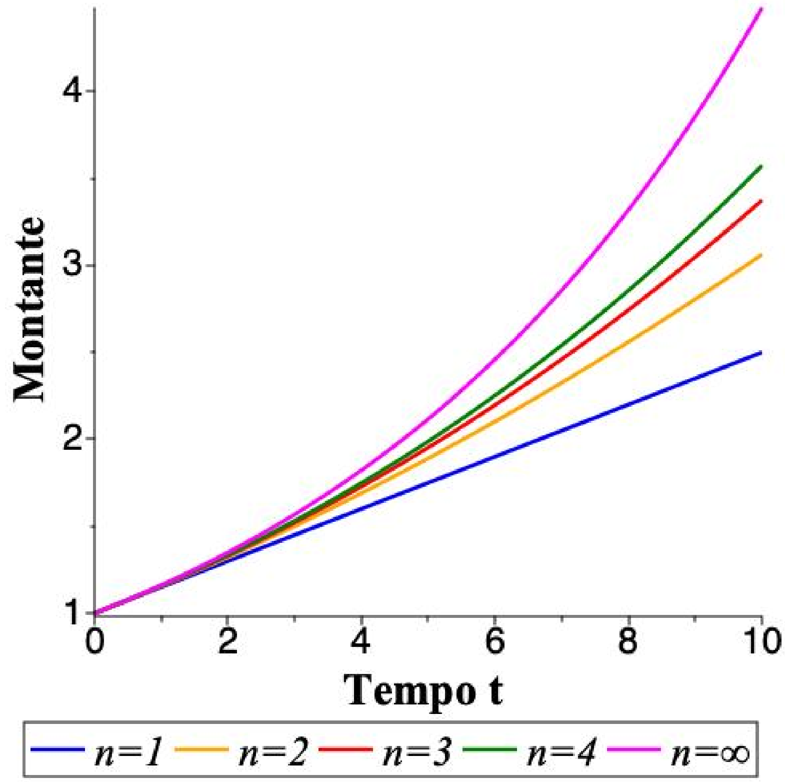


Figura 1.2: Confronto nel Ris al variare delle capitalizzazioni intermedie

Se invece la capitalizzazione intermedia avviene in tre istanti di durata $\frac{t}{3}$, Il montante complessivo sará:

$$M_3 = C\left(1+\frac{it}{3}\right)^3$$

Di conseguenza, se la capitalizzazione intermedia avviene in n istanti di durata $\frac{t}{n}$, Il montante complessivo sará:

$$M_n = C\left(1+\frac{it}{n}\right)^n$$

Se facciamo tendere n a ∞, possiamo pensare ad una capitalizzazione continua degli interessi. Pertanto:

$$M_\infty = \lim_{n\to+\infty} C\left(1+\frac{it}{n}\right)^n$$

Ponendo $\frac{it}{n} = \frac{1}{m}$ allora $n = mit$. Quindi utilizzando i limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty} C\left(1+\frac{it}{n}\right)^n = \lim_{m\to+\infty} C\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{it} = Ce^{it}$$

dove $M_\infty > M_n > \cdots, M_2 > M_1$

1.2.5 Il Regime degli interessi composto RIC

Il regime finanziario di capitalizzazione composta, d'ora in poi denotato con RIC, permette di rendere gli interessi fruttiferi di altri interessi automaticamente, al momento stesso in cui si producono.
Ipotizzaziamo che un capitale C venga investito per una unità temporale $t = 1$ (ad es. 1 anno) al tasso di interesse i. Il montante ottenuto è:

$$M(1) = C(1 + i)$$

Se alla scadenza l'investimento continua alle stesse condizioni, ossia il montante $M(1)$ viene investisto per un altro periodo, otteniamo che il montante in $t = 2$ è:

$$M(2) = M(1)(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

e cosi all'istante $t = n$ avremo che:

$$M(n) = M(n - 1)(1 + i) = C(1 + i)^{n-1}(1 + i) = C(1 + i)^n$$

Ora è possibile definire un regime che preveda che il rimborso del montante avvenga anzichè ad istanti di tempo discreti, in qualsiasi istante $t \geq 0$. La legge di formazione del montante risulta pertanto:

$$M(t) = C(1 + i)^t \tag{1.10}$$

da cui si ricava che:

$$I(t) = M(t) - C = C(1 + i)^t - C = C[(1 + i)^t - 1] \tag{1.11}$$

Nel caso particolare in cui $t = 1$, l'interesse prodotto alla fine del periodo è $I(1) = C(1+i-1) = iC$.
Indichiamo con $r(t) = (1 + i)^t$ il **fattore di capitalizzazione composto** e quindi:

$$M(t) = Cr(t)$$

Per verificare che in tale regime gli interessi producono altri interessi, proviamo ad effettuare una capitalizzazione intermedia degli interessi in un istante s precedente a t. Il montante che otteniamo nell'istante s è:

$$M(s) = C(1 + i)^s$$

Successivamente preleviamo tale somma $M(s)$ e la reivestiamo per la durata residua $t - s$. Il montante finale che otterremo con una capitalizzazione intermedia degli interessi in s è:

$$\tilde{M}(t) = M(s)(1 + i)^{t-s} = C(1 + i)^s(1 + i)^{t-s} = C(1 + i)^{s+t-s} = C(1 + i)^t$$

Possiamo notare come il montante non cambia se vengono effettuate delle operazione intermedie di capitalizzazione di interesse. Per questo motivo il RIC è il regime più utilizzato (come vedremo successivamente, il RIC è un regime *scindibile*).

Lo sconto composto

Anche in questo caso, analizziamo l'operazione simmetrica in cui un soggetto dispone di un ammontare M alla scadenza t e vuole realizzare il suo valore attuale C all'istante iniziale $t = 0$. Ovviamente M puó essere considerato come il montante di C e quindi dalla (1.10) con brevi passaggi otteniamo:

$$C = \frac{M}{(1+i)^t} = M(1+i)^{-t} \tag{1.12}$$

Indichiamo con $v(t) = \dfrac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$ il **fattore di attualizzazione composto**.

Alcune Formule inverse nel RIC

- $i = \left(\dfrac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1;$
- $t = \dfrac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)};$

1.2.6 Tasso nominale annuo convertibile m volte nell'anno.

Supponiamo che un investitore disponga di un capitale C che viene investito in RIC al tasso annuo i, ma l'interesse prodotto venga corrisposto all'investitore m volte in un anno. L'interesse maturato al capo del primo periodo è:

$$I(1/m) = Ci_{1/m}$$

Se questo interesse non viene capitalizzato, il capitale disponibile alla fine del primo $1/m$ periodo è ancora C. E quindi l'interesse alla fine del secondo periodo è:

$$I(2/m) = Ci_{1/m}$$

Ovviamente alla fine dell'anno, l'individuo avrà riscosso su ogni unità di capitale m volte l'ammontare $i_{1/m}$. La somma di queste m rate, anche se non ha un significato finanziario in quanto gli importi sono disponibili ad epoche diverse, prende il nome di **tasso nominale convertibile** m **volte nell'anno**, e risulta quindi:

$$j(m) = mi_{1/m} \tag{1.13}$$

da cui si ottiene facilmente che il tasso periodale è:

$$i_{1/m} = \frac{j(m)}{m} \tag{1.14}$$

Dai tassi equivalenti periodali definiti per il RIC nella formula (2.4), ossia

$$i_{1/m} = (1+i)^{1/m} - 1 \tag{1.15}$$

Sostituendo l'espressione (1.15) nella formula (1.13), otteniamo:

$$j(m) = m[(1+i)^{1/m} - 1] = \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{\frac{1}{m}} \tag{1.16}$$

subsectionTasso istantaneo d'interesse Si definisce **tasso istantaneo d'interesse** o **tasso annuo convertibile infinite volte nell'anno** e si denota con δ, il seguente limite:

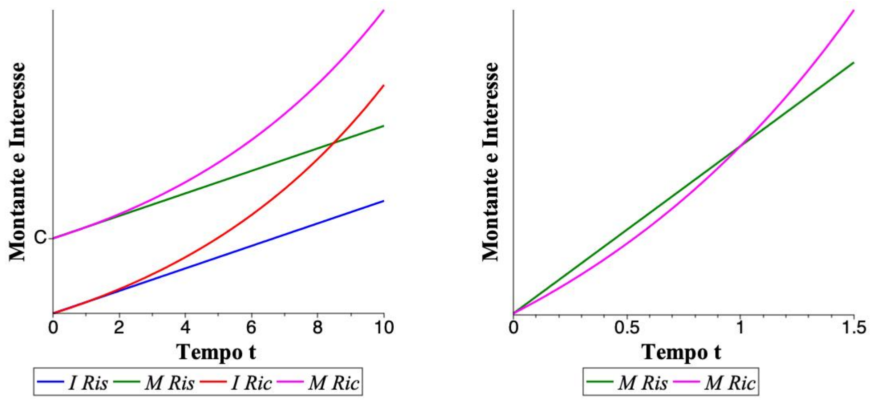
$$\delta = \lim_{m \to +\infty} j(m) = \ln(1+i) \tag{1.17}$$

Al tendere di m all'infinito le rate diventano un flusso uniforme e continuo di capitale durante tutto l'anno. In particolare, svolgendo il limite definito nella (1.17) e ponendo $h = \frac{1}{m}$, otteniamo che:

$$\delta = \lim_{m \to +\infty} j(m) = \lim_{m \to +\infty} \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{\frac{1}{m}} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+i)^h - 1}{h} = \ln(1+i)$$

Osservazione 5 *Si osservi che* $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$ *è un limite notevole.*

Quindi possiamo affermare che il tasso istantaneo di interesse $\delta = \ln(1+i)$ ed è costante nel tempo, non dipende dalla durata t.



(a) (b)

Figura 1.3: Confronto RIS e RIC

1.3 Esercizi di Riepilogo

1. Un individuo ha depositato otto mesi fa un capitale C in RIC al tasso di interesse annuale i e due anni fa un capitale $3C$ in RIS al tasso semestrale $j_{1/2} = 0.08$. Sapendo che oggi riceve un montante pari a $5C$, determinare il tasso annuale i.

   Soluzione

   $$C(1+i)^{\frac{8}{12}} + 3C(1 + 0.08 \cdot 4) = 5C \to i = 0.0605$$

2. Un individuo deposita un capitale C in banca al tasso annuo $i = 0.06$ in regime di interesse composto accordandosi di ritare il montante quando gli interesse maturati saranno pari al 20% del capitale depositato C. Determinare la durata dell'investimento.

Soluzione

$I = 0.20C$ quindi $M = 1.20C$. Da cui $C(1.06)^t = 1.2C$ si ottiene $t = \dfrac{\ln 1.20}{\ln 1.06} = 3.1289$ anni.

3. Un individuo ha investito 5 mesi fa la somma $C = 5\,000$ in Regime di interesse semplice (RIS) al tasso annuo $i = 0.05$. Il montante ricevuto viene investito in Regime di interesse composto (RIC) per 3 anni al tasso annuo convertibile semestralmente $j(2) = 0.10$. Alla fine dei tre anni, preleva 1 000 euro e reinveste la somma restante sempre in RIC per altri 2 anni al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.06$. Determinare il montante finale M.

   Soluzione: $M = 7\,372.95$

4. Dart ha investito un capitale C_1 5 semestri fa in regime di interesse composto (RIC) al tasso mensile $i_{\frac{1}{12}} = 0.015$ e un capitale $C_2 = 3C_1$ 3 anni fa in regime di interesse semplice (RIS) al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.03$. Sapendo he oggi ritira un montante complessivo di $M = 11\,966.43$, determinare C_1 e C_2.

   Soluzione:

   $C_1(1.015)^{30} + 3C_1(1 + 0.03 \cdot 6) = 11\,966.43$ da cui $C_1 = 2\,344,97$ e $C_2 = 7\,034,93$.

5. LARA dispone di un capitale $C_1 = 1\,500$ tra quattro mesi, di $C_2 = 2\,800$ tra sette semestri e di $C_3 = 4\,000$ tra quattro anni e tre mesi. Sapendo che il tasso di interesse annuo é $i = 0.08$ per il primo anno e successivamente diventa $i = 0.05$, determinare il valore attuale sia in regime di interesse semplice (RIS) che composto (RIC).

   Soluzione:

   RIC $V(0) = 6\,917.49$; RIS $V(0) = 6\,951.53$

6. Ferri investe in $t = 0$ la somma $C = 2\,500$ euro per tre anni e nove mesi al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.04$. Il montante ottenuto viene reinvestito al tasso annuale $i = 0.07$. Determinare dopo quanti anni si ottiene un montante finale pari a $M = 5\,000$. Effettuare in calcoli in RIC e in RIS.

   Soluzione:

   RIC $t = 5.89$ anni; RIS $t = 7.69$ anni.

7. Actarus dispone di un capitale C che investe in $t = 0$ per $\dfrac{2}{5}$ in RIC al tasso trimestrale $i_{\frac{1}{4}} = 0.05$ per 6 semestri e per $\dfrac{3}{5}$ in RIS al tasso mensile $i_{\frac{1}{12}} = 0.01$ per 2 anni. Sapendo che

complessivamente ottiene un montante $M = 7\,311,71$, determinare l'ammontare C.

Soluzione:

$C = 5\,000$.

8. Un'impresa ha un credito di 10 000 euro disponibile tra 2 anni e 3 mesi. Si rivolge alla banca che sconta tale credito al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.03$ in RIS. Il valore attuale ricavato viene investito in RIC al tasso annuale $i = 0.05$. Determinare dopo quanti anni si ottiene un montante di 11 000 euro.

   Soluzione:

   $10000(1 + 0.03 \cdot 4.5)^{-1}(1.05)^t = 11000; \quad t = 4.54$ anni.

9. Un tizio ha investito le seguenti somme (tempo espresso in anni): C al tempo $t = 0$, 1 500 euro in $t = 1.5$, $2C$ in $t = 3$ e $6C$ in $t = 4$. Sapendo che al tempo $t = 5$ ritira un montante $M = 20\,000$ euro, determinare C sapendo che il tasso di interesse bimestrale $i_{\frac{1}{6}} = 0.02$. Effettuare i calcoli nel regime RIC e in RIS.

   Soluzione: in RIC $C = 1\,596.49$; in RIS $C = 1\,654.62$

10. Un tizio ha investito dieci mesi fa presso la Banca Popolare di Bari un capitale C in RIS al tasso di interesse semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.09$ e inoltre ha investito tre anni fa presso la Banca di Credito della Valtellina la somma $2C$ in RIC al tasso di interesse semestrale $j_{\frac{1}{2}} = 0.03$. Sapendo che oggi riceve complessivamente un **interesse** di 300 euro, determinare C.

    Soluzione: $I_1 = 0.15C$; $I_2 = 0.3881C$; $I_1 + I_2 = 0.5381C = 300$; da cui $C = 557.51$

11. George investe la somma di $C = 1\,000$ in Regime di interesse composto al tasso annuo istantaneo di interesse $\delta = 0.08$ per 4 anni e 6 mesi. Il montante ricevuto viene reinvestito in Regime di interesse semplice (RIS) al tasso mensile di interesse $i_{\frac{1}{12}} = 0.02$. Determinare dopo quanti anni il montante finale é pari a $2C$.

    Soluzione: $M_1 = 1\,000e^{0.08 \cdot 4.5} = 1\,433.33$; $2\,000 = 1\,433.33(1 + 0.02 \cdot t) \Rightarrow t = 19.76$ mesi pari a 1.65 anni.

12. Goffredo dispone di una somma pari a 10 000 euro all'istante futuro t. Sapendo che il valore attuale di tale somma al tasso annuale $i = 0.05$ é di 6 120 euro, determinare l'istante t sia in Regime di interesse semplice (RIS) che in quello composto (RIC).

Soluzione: $t = 12.68$ anni in RIS; $\quad t = 10.08$ anni in RIC.

13. Zanardi ha investito per otto bimestri una capitale pari a C in RIS al tasso annuale $i = 0.08$ e per sei trimestri una somma pari a $2C$ in RIC al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.05$. Oggi ritira un montante complessivo pari a $M = 10\,000$ euro. Determinare gli importi C e $2C$.

    Soluzione: $C = 2\,922.34$.

14. Pietro ha un capitale C che impiega per 5 semestri in questo modo:

    - $\frac{2}{5}$ in Regime di Interesse Semplice (RIS) al tasso trimestrale $i_{\frac{1}{4}} = 0.02$;
    - $\frac{3}{5}$ in Regime di Interesse Composto (RIC) al tasso annuale $i = 0.07$;

    Determinare C sapendo che il secondo investimento produce un interesse in piú di 20 euro rispetto al primo investimento.

    Soluzione $I_1 = \frac{2}{5}C \cdot 10 \cdot 0.02 = 0.08C$; $\quad I_2 = \frac{3}{5}C[(1.07)^{2.5} - 1] = 0.1105C$; $\quad I_2 = I_1 + 20 \Rightarrow C = 655.73$

15. Fabrizio disponde di tre capitali: $C_1 = 5\,000$ euro al tempo $t = 3$; $C_2 = 7\,000$ in $t = 7$ e $C_3 = 3\,000$ in $t = 10$ (tempo espressi in semestri). Determinare il valore attuale sapendo che dall'istante $t = 0$ in $t = 5$ vige il regime RIS e il tasso annuale é $i = 0.06$ e successivamente si applica il RIC con un tasso trimestrale $i_{\frac{1}{4}} = 0.03$.

    Soluzione:
    Tassi equivalenti RIS e RIC: $i_{\frac{1}{2}} = 0.03$; $\quad i_{\frac{1}{2}} = 0.0609$; $\quad V_0 = \dfrac{5\,000}{(1 + 0.03 \cdot 3)} + \dfrac{7\,000(1.0609)^{-2}}{(1 + 0.03 \cdot 5)} + \dfrac{3\,000(1.0609)^{-5}}{(1 + 0.03 \cdot 5)} = 11\,936.45$

16. Brooke dispone al tempo $t = 10$ anni una somma V. Determinare il **tasso di interesse semestrale** da applicare sia in RIS che in RIC affinché il valore attuale in $t = 0$ sia pari a $\dfrac{2}{3}V$.

    Soluzione. Operazione RIC: $\dfrac{2}{3}V = V(1 + i_{\frac{1}{2}})^{-20} \Rightarrow i_{\frac{1}{2}} = 0.0204$; Operazione RIS: $\dfrac{2}{3}V = \dfrac{V}{(1 + 20 i_{\frac{1}{2}})} \Rightarrow i_{\frac{1}{2}} = 0.025$

17. Andrea dispone al tempo $t = 0$ di due capitali: $C_1 = 3\,000$ euro e $C_2 = 6\,000$ euro. Il capitale C_1 viene investito in RIS per 8 quadrimestri a tasso di interesse annuo $i = 0.03$ mentre il capitale C_2 viene impiegato in RIC per 32 mesi al tasso annuo j. Sapendo che alla fine riceve come montante complessivo la somma $M = 14\,500$ euro, determinare il tasso j.

Soluzione. $3\,000(1+0.03\cdot\frac{8}{3})+6\,000(1+j)^{\frac{32}{12}}=14\,500$ da cui $j=0.2662$

18. Puigdemont investe al tempo $t=0$ la somma di $C_1=13\,000$ euro in RIS per 15 mesi al tasso trimestrale $i_{\frac{1}{4}}=0.03$. Dal montante ottenuto preleva 5 000 euro e reinveste quello che resta in RIC al tasso istantaneo $\delta=0.045$ per due anni e otto mesi. Determinare il montante finale.

    Soluzione: $M_1=13\,000(1+0.03\cdot 5)=14\,950$; $\quad C_1=9\,950$; $\quad M_2=9\,950e^{0.045\cdot 2.66666}=11\,218.59$

19. Giovanni investe un capitale $C=10\,000$ euro al tempo $t=0$ in capitalizzazione semplice per 18 mesi al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}}$. Il montante ottenuto viene reinvestito per altri 3 anni al tasso semestrale $j_{\frac{1}{2}}=2i_{\frac{1}{2}}$ ancora in capitalizzazione semplice realizzando un montante finale di 20 000 euro. Calcolare $i_{\frac{1}{2}}$.

    Soluzione: $i_{\frac{1}{2}}=0.0584$

20. E' piú conveniente investire un capitale C in regime di interesse composto al tasso bimestrale $i_{\frac{1}{6}}=0.03$ per 5 anni oppure in regime di interesse semplice al tasso quadrimestrale $i_{\frac{1}{3}}=0.095$ per 5 anni?

    Soluzione: $M_{RIC}=2.427C$; $M_{RIS}=2.425C$. E' preferibile il RIC.

21. Al tempo $t=0$ il capitale di 12 000 euro viene investito in capitalizzazione composta, per 6 anni, al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}}=5\%$, generando un montante M. Determinare il capitale C che occorre investire per generare, al tasso annuo del 9% in capitalizzazione semplice e per 8 anni, il medesimo montante M.

    Soluzione: $C=12\,529.23$

22. Gerry ha effettuato i seguenti investimenti:
    a) due anni fa la somma di 800 euro in regime di interesse semplice al tasso semestrale del 3,5%;
    b) un anno e tre mesi fa la somma di 600 euro in capitalizzazione composta;
    Sapendo che egli riceve oggi la somma complessiva di 1549.73 euro, determinare a quale tasso annuo di interesse é stato effettuato il secondo investimento.

    Soluzione: $800(1+0.035\cdot 4)+600(1+i)^{1.25}=1549.73 \Rightarrow i=0.05$

Capitolo 2

Le rendite finanziarie e i Piani di ammortamento

2.1 Richiami di Matematica: la Serie Geometrica

Supponiamo di avere una successione di numeri reali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; costruiamo una nuava successione formata dalle somme parziali:
$s_1 = x_1$
$s_2 = x_1 + x_2$
$s_3 = x_1 + x_2 + x_3$
$\vdots$
$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n$
La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prende il nome di **successione delle somme parziali**.

Definizione 10 *Si chiama* ***serie*** *di termine generale x_n, la coppia ordinata di successioni $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ in cui la prima coordinata é la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mentre la seconda coordinata é la successione delle somme parziali.*

La serie di termine generico x_n si indica con il simbolo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots$$

e piú spesso con il simbolo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

Definizione 11 *Diremo che la serie di termine generale x_n é regolare se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é regolare, ossia ammette limite. Definiamo* ***somma*** *della serie il $\lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$.*
Quindi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_n s_n$$

Inoltre, se:

- $\lim_n s_n = s \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *la serie é* ***convergente****;*

- $\lim_n s_n = +\infty \Rightarrow$ *la serie é* ***divergente positivamente****;*
- $\lim_n s_n = -\infty \Rightarrow$ *la serie é* ***divergente negativamente****.*

2.1.1 Serie Geometrica

Si definisce serie geometrica di ragione r, la serie il cui termine generale é r^{n-1}.
La successione delle somme parziali é:

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots r^{n-1}$$

Se $r \neq 1$ abbiamo che:

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

Per conoscere il carattere ddella serie geometrica dobbiamo studiare il limite della successione delle somme parziali:

$$\lim_n s_n = \lim_n \frac{1-r^n}{1-r}$$

Poiché:

$$\lim_n r^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad r > 1 \\ 0 & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \nexists & \text{se} \quad r \leq -1 \end{cases}$$

si ha:

$$\lim_n s_n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad r > 1 \\ \dfrac{1}{1-r} & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \nexists & \text{se} \quad r \leq -1 \end{cases}$$

In particolare se $r = 1$ allora:
$s_n = 1 + 1 + 1 + \cdots 1 = n; \quad \lim_n s_n = +\infty \Rightarrow$
la serie geometrica diverge positivamente.

Riassumendo si ha che la serie geometrica di ragione r:

$$\begin{cases} \text{diverge positivamente} & \text{se } r \geq 1 \\ \text{converge a } \dfrac{1}{1-r} & \text{se } |r| < 1 \\ \text{non é regolare} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

2.2 Applicazioni Finanziarie: le Rendite

Definiamo **rendita una successione di capitali da riscuotere o da pagare a scadenze determinate**. Le **rate della rendita** sono i singoli capitali R_k esigibili o da pagare alle varie scadenze temporali t_k. In modo particolare le rendite si dicono *certe* nel caso in cui sono a priori fissate il numero, l'ammontare e gli istanti (o epoche) di pagamento. Una rendita può essere classificata come:

- **Periodica o Aperiodica.** La rendita è **periodica** quando le diverse rate sono equintervallate tra loro. Quindi l'intervallo o periodo tra una rata e la successiva è costante. Quindi parleremo di rendita *annuale, semestrale, mensile* quando il periodo tra una rata e l'altra è di un anno, semestre, mese, ecc. Nel caso contrario la rendita si definisce **aperiodica**.

- **Posticipata o Anticipata.** Se il pagamento delle rate avviene alla fine del periodo è posticipata altrimenti, se avviene all'inizio del periodo è anticipata.

- **Temporanea o perpetua.** Se la rendita è formata da un numero finito di rate si definisce temporanea altrimenti, se è formata da un numero infinito di rate si definisce perpetua.

- **Costante o variabile.** Una rendita costante si ha nel caso in cui le rate sono tutte dello stesso ammontare mentre una rendita è variabile nel caso contrario. In modo particolare, una **rendita unitaria** è una rendita costante le cui rate sono di importo unitario.

2.2.1 Valore di una Rendita

Per determinare il *valore di una rendita* di qualsiasi tipo, occorre determinare semplicemente la somma V che finanziarimente è **equivalente** alla rendita. Quindi si dovrà semplicemente *capitalizzare o attualizzare* ogni rata al tempo assegnato per la valutazione. Per fare tali operazioni occorre scegliere il regime da applicare: RIS oppure RIC.
Il vantaggio del RIC è nella scindibilità: ossia il valore di una rendita in un istante t può essere determinato o attualizzando/capitalizzando le rate, oppure riportando in t il valore di una rendita all'istante s.
Denotiamo con t_0 l'istante iniziale e t_n quello finale. Si definisce **montante della rendita** il valore di una rendita in t_n, ossia la somma dei montanti delle singole rate. Si definisce **valore attuale della rendita** il valore della rendita al tempo inziale t_0, che si ottiene attualizzando tutte le rate.
Una rendita è **differita** per un periodo t quando l'istante di valutazione t precede l'istante in cui è pagata la prima rata t_0, altrimenti si definisce **immediata**.

Esempio sul Valore di una Rendita

Supponiamo di avere una rendita formata dalle seguenti rate: $R_1 = 150$ € che scade tempo $t_1 = 2$ anni; $R_2 = 400$ € al tempo $t_2 = 4.5$ anni e $R_3 = 250$ € che scade tempo $t_3 = 6$ anni. Sapendo che i tasso di interesse annuo composto $i = 0.08$ (RIC), calcolare il valore della rendita al tempo $t_0 = 0$ e al tempo $t_3 = 6$ anni.

Per determinare il valore attuale della rendita $V(0)$, occorre attualizzare tutti gli importi:

$$V(0) = 150(1.08)^{-2} + 400(1.08)^{-4.5} + 250(1.08)^{-6} = 569.05$$

mentre il valore montante della rendita $V(6)$, occorre capitalizzare tutti gli importi:

$$V(6) = 150(1.08)^{4} + 400(1.08)^{1.5} + 250 = 903.02$$

o alternativamente nel RIC abbiamo:

$$V(6) = V(0)(1.08)^{6} = 903.01$$

2.2.2 Alcune formule per il calcolo del valore di una rendita

In questo paragrafo presenteremo alcune formule compatte per determinare il valore attuale e il montante di alcune rendite che presentano caratteristiche di regolarità.

Valore attuale di una rendita unitaria annua posticipata immediata di durata n anni.

Supponiamo di dover determinare il valore attuale di una rendita costante la cui rata è unitaria, posticipata, formata da n rate (vedi Fig.2.1).

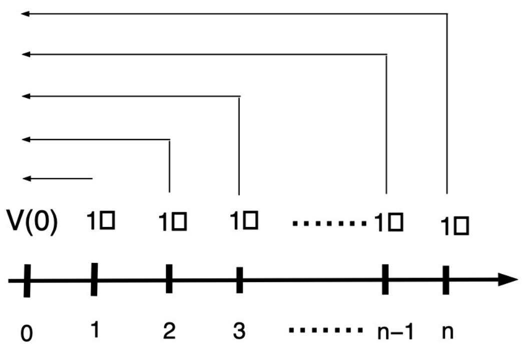


Figura 2.1: Valore attuale di una rendita unitaria annua posticipata immediata di durata n anni

Faremo tutte le operazioni di attualizzazioni nel regime RIC. Per determinare tale valore attuale, denotato con $V(0)$, dobbiamo semplicente attualizzare le n rate al tasso di interesse annuo i:

$$V(0) = 1€ \cdot (1+i)^{-1} + 1€ \cdot (1+i)^{-2} + \cdots + 1€ \cdot (1+i)^{-n}$$

Poichè $v = \frac{1}{(1+i)}$ possiamo riscrivere l'espressione precedente come:

$$V(0) = v + v^2 + v^3 + \cdots v^n$$

e mettendo in evidenza la v otteniamo:

$$V(0) = v(1 + v + v^2 + \cdots v^{n-1})$$

I termini in parentesi costituiscono una progressione geometrica di ragione v la cui somma è:

$$1 + v + v^2 + \cdots v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

e quindi complessivamente otteniamo che:

$$V(0) = v\frac{1-v^n}{1-v}$$

Con alcuni semplici passaggi possiamo riscrivere $\dfrac{v}{1-v} = \dfrac{1}{i}$ e quindi il valore attuale di questa rendita diventa:

$$V(0) = \frac{1-v^n}{i}$$

che denoteremo con il simbolo a figurato n al tasso i.
In conclusione, il **valore attuale di una rendita unitaria annua posticipata immediata di durata n anni** è:

$$a_{\overline{n}|\, i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2.1}$$

Se invece la stessa rendita non fosse unitaria ma costante di importo R, possiamo scrivere che:

$$V(0) = Rv + Rv^2 + Rv^3 + \cdots Rv^n = Rv(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots v^n) = Ra_{\overline{n}|\, i}$$

Valore attuale di una rendita unitaria annua anticipata immediata di durata n anni.

Nel caso di una rendita anticipata unitaria formata da n avremo che:

$$V(0) = 1€ + 1€ \cdot (1+i)^{-1} + 1€ \cdot (1+i)^{-2} + \cdots + 1€ \cdot (1+i)^{-(n-1)}$$

che possiamo riscrivere come:

$$V(0) = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

Denoteremo tale quantità con il simbolo $\ddot{a}_{\overline{n}|\, i}$, e quindi il valore attuale di una rendita anticipata unitaria formata da n rate è:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|\, i} = \frac{1-v^n}{1-v} \tag{2.2}$$

Montante di una rendita unitaria posticipata immediata di durata n anni

In questa situazione si procede a capitalizzare le rate fino all'istante finale n. La prima rata dovrà essere capitalizzata di $n-1$ anni, la seconda di $n-2$ anni, ecc (vedi Fig.2.2).

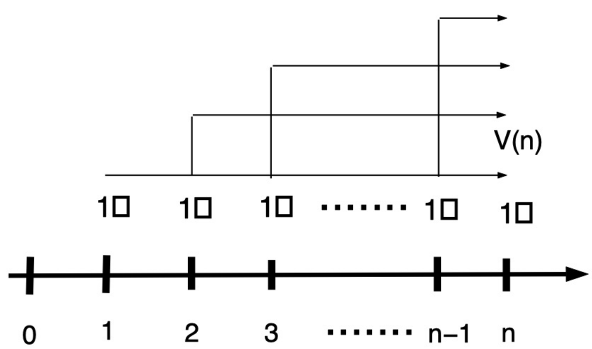


Figura 2.2: Valore montante di una rendita unitaria annua posticipata immediata di durata n anni

Quindi avremo:

$$V(n) = 1€ \cdot (1+i)^{n-1} + 1€ \cdot (1+i)^{n-2} + \cdots 1€ \cdot (1+i)^1 + 1€$$

Poichè $r = (1+i)$ possiamo riscrivere la formula precedente come:

$$V(n) = r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots r + 1$$

ossia:

$$V(n) = 1 + r + r^2 + \cdots r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

in quanto si tratta di una progressione geometrica di ragione r. Con semplici passaggi avremo che:

$$V(n) = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^n}{-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Denoteremo tale quantità con il simbolo s figurato n al tasso i e quindi:

$$s_{\overline{n}|\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.3}$$

rappresenta il montante di una rendita unitaria annua posticipata immediata di durata n anni. La stessa formula può ricavarsi semplicemente utilizzando la scindibilità del RIC e quindi capitalizzando fino all'istante n il valore attuale $a_{\overline{n}|\,i}$, quindi:

$$s_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^n \cdot a_{\overline{n}|\,i}$$

2.2.3 Rendite perpetue

Se il numero delle rate é infinito, allora abbiamo una rendita perpetua. Il valore attuale di tale rendita si ottiene come limite di quella temporanea formata da n di importo R. Quijndi nel caso posticipato avremo:

$$V(0) = Ra_{\overline{+\infty}|\,i} = \lim_{n\to+\infty} Ra_{\overline{n}|\,i} = \lim_{n\to+\infty} R\frac{1-v^n}{i} = \frac{R}{i}$$

Nel caso anticipato invece:

$$V(0) = R\ddot{a}_{\overline{+\infty}|\,i} = \lim_{n\to+\infty} R\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} = \lim_{n\to+\infty} R\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{R}{1-v} = R + \frac{R}{i}$$

2.2.4 Problemi inversi

Se in un problema di rendita occorre determinare il numero delle rate tale che si ottenga un dato valore attuale, allora occorre determinare il valore di n partendo dalla formula:

$$V(0) = Ra_{\overline{n}|\,i} = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \iff 1-(1+i)^{-n} = \frac{iV(0)}{R}$$

da cui si ottiene

$$(1+i)^{-n} = \frac{R - iV(0)}{R} \iff (1+i)^n = \frac{R}{R - iV(0)}$$

e quindi:

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{R}{R-iV(0)}\right)}{\ln(1+i)}$$

Si ricordi il numero delle rate n é un numero intero. Quindi, occorre prendere la parte intera. Per questo motivo, spesso, occorre considerate un versamento aggiuntivo finale per far in modo che il valore attuale della rendita coincida.

2.3 Applicazioni Finanziarie: I piani di Ammortamento

Le modalità con cui l'individuo potrà rimborsare il capitale S possono essere molteplici: ad esempio potrà rimborsare S in un'unica soluzione alla scadenza n; pagare con quote costanti; pagare poco all'inizio e verso la fine aumentare i suo pagamente; potrà fare pagamenti periodici o pagamenti aperiodici. Ovviamente, occorre considerare anche l'interesse calcolato in base al tasso i che supponiamo sia annuo.
Se l'accordo tra l'individuo e la banca non prevede alcun pagamento intermedio degli **interessi** e del **capitale**, alla scadenza l'operatore, in base al principio di equivalenza finanziaria, dovrà restituire il montante di S, ossia:

$$V(n) = S(1+i)^n$$

L'importo S al tempo $t = 0$ è **equivalente** a $V(n)$ al tempo n.
Supponiamo ora che l'individuo e la banca si accordino invece che il pagamento degli interessi avvenga con pagamenti periodici posticipati (ad esempio alla fine di ogni anno), mentre la somma S verrà restituita alla scadenza. Per calcolare gli interessi, occorre tener conto che **la quota interesse di un determinato periodo si calcola prendendo come riferimento l'ammontare del debito che risulta durante tale periodo**. In questo caso il debito rimane inalternato e pari ad S. Si tratta di un piano di rimborso di un *capitale rimborsabile interamente a scadenza con interessi pagati posticipatamente* alla fine di ogni periodo che analizzeremo nel paragrafo successivo.
Generalizzando, possiamo adesso stilare un piano di rimborso, detto anche piano di **ammortamento**, che sotto forma di una tabella descrive di anno in anno cosa paga l'individuo come **quota interessi**; quanta parte di capitale S restituisce, ossia la **quota capitale**; l'ammontare della **rata** che è la somma della quota capitale e della quota interesse e infine a quanto ammonta il suo **debito residuo**. Denoteremo quindi:

- $k = 1 \cdots n$ i periodi (anni, semestri, mesi);
- I_k la quota interesse pagata al periodo k;
- C_k la quota capitale pagata al periodo k;
- $R_k = C_k + I_k$ la rata pagata dall'individuo al periodo k;
- D_k il debito residuo.

2.3.1 Piano di ammortamento di un capitale S rimborsabile interamente a scadenza con interessi pagati posticipatamente

Ritornando all'esempio precedente, in questo caso l'individuo non resistituisce nulla alla banca della somma S (ossia in conto capitale), e il debito sarà sempre pari ad S e quindi gli interessi annui vengono corrisposti posticipatamente nella misura:

$$I = iS$$

e alla scadenza n restituirà l'intera somma S. Il piano di ammortamento è descritto nella Tabella (2.1).

Periodo k	Quota Interesse I_k	Quota Capitale C_k	Rata R_k	Debito residuo D_k
0	0	0	0	S
1	iS	0	iS	S
2	iS	0	iS	S
...				
$n-1$	iS	0	iS	S
n	iS	S	$S+iS$	0

Tabella 2.1: Piano di ammortamento di un capitale S rimborsabile interamente a scadenza con interessi pagati posticipatamente

Esempio sul piano di ammortmento di un capitale S rimborsabile interamente a scadenza con interessi pagati posticipatamente

Supponimo che un individuo prenda in prestito al tempo $t = 0$ la somma $S = 10\,000$ € da restituire al tempo $t = 4$ (tempo espresso in anni) e decida di pagare gli interessi posticipati calcolati al tasso di interesse annuo composto $i = 0.06$. Stilare il piano di ammortamento.

Risulta molto semplice stilare tale piano in quanto, gli interessi sono calcolati come $I = 0.06 \cdot 10\,000 = 600$ e il debito residuo rimane inalterato pari a 10 000 poichè non viene restituito nulla in conto capitale. Ovviamente nell'ultima rata l'individuo restitusce interamente il prestito di 10 000 e azzera il debito residuo:

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	600	0	600	10 000
2	600	0	600	10 000
3	600	0	600	10 000
4	600	10 000	10 600	0

2.3.2 Piano di ammortamento con rimborso graduale del capitale S e interessi pagati posticipatamente

Stiliamo ora un piano generico, in cui il pagamento degli interessi e delle quote capitali avviene alla fine di ogni periodo. Come visto prima, abbiamo denotato con C_k la **quota capitale** pagata all'istante k, ossia quanta parte del prestito S l'individuo restituisce al tempo k. Ovviamente la somma di tutte le quote capitali deve essere pari ad S e quindi:

$$S = C_1 + C_2 + \cdots C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \tag{2.4}$$

Naturalmente, per mezzo di questi pagamenti parziali "in conto capitale", l'ammontare del prestito S si riduce e quindi il debito residuo alla fine del primo anno sarà pari al debito complessivo S

meno la prima quota capitale:

$$D_1 = S - C_1$$

o alternativamente, poichè $S = \sum_{k=1}^{n} C_k$ possiamo riscrivere che

$$D_1 = \sum_{k=1}^{n} C_k - C_1 = C_2 + C_3 + \cdots C_n = \sum_{k=2}^{n} C_k$$

ossia il debito residuo è la somma delle quote capitali ancora da pagare.
Allo stesso modo, il debito residuo alla fine del secondo anno D_2 sarà pari al debito alla fine del primo anno D_1 meno la secondo quota capitale:

$$D_2 = D_1 - C_2 = S - C_1 - C_2$$

oppure

$$D_2 = C_3 + C_4 + \cdots C_n$$

Possiamo quindi generalizzare che:

$$D_k = D_{k-1} - C_k = S - C_1 - C_2 - \cdots - C_k \tag{2.5}$$

o in modo equivalente

$$D_k = C_{k+1} + C_{k+2} + \cdots + C_n \tag{2.6}$$

Ovviamente nell'ultimo istante n, il debito residuo sarà completamente restituito e quindi:

$$D_n = 0$$

Analizzata l'evoluzione del debito residuo, occorre calcolare in ogni periodo la **quota interessi**. Poichè gli interessi vengono pagati posticipatamente, la quota interessi I_k viene calcolato in base al debito residuo esistente all'inizio del periodo D_{k-1} e la tasso di interesse periodale. Ovviamente, la prima quota interessi $I_1 = iS$ in quanto ancora il debito residuo all'inzio del primo periodo è pari ad S e le successive quote interessi saranno $I_k = i\, D_{k-1}$.
Infine, per il principio di **equivalenzia finaziaria**, se l'individuo riceve al tempo $k = 0$ dalla banca la somma S, il valore attuale di tutti i suoi pagamenti (quota capitale e interessi), ossia delle n rate, valutate al tasso di interesse periodale i, deve essere pari ad S, e quindi:

$$S = R_1 v + R_2 v^2 + \cdots R_k v^k + \cdots R_n v^n = \sum_{k=1}^{n} R_k v^k \tag{2.7}$$

Questo principio si applica anche per il debito residuo, ossia il valore attuale di tutte le rate ancora da pagare all'istante k, calcolato al tasso di interesse periodale i, deve essere pari al debito residuo D_k:

$$D_k = R_{k+1} v + R_{k+2} v^2 + \cdots R_n v^{n-k} \tag{2.8}$$

Le formule (2.4)-(2.8) rappresentano la struttura finanziaria di ogni piano di ammortamento e scaturiscono dal principio di equivalenza finanziaria esposto precendemente. Inoltre, la Tabella (2.2) riassume gli elementi di un generico piano di ammortamento.

Periodo	Quota Interesse	Quota Capitale	Rata	Debito residuo
k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	S
1	iS	C_1	$C_1 + iS$	$S - C_1$
2	iD_1	C_2	$iD_1 + C_2$	$D_1 - C_2$
...				
k	iD_{k-1}	C_k	$iD_{k-1} + C_k$	$D_{k-1} - C_k$
...				
n	iD_{n-1}	C_n	$iD_{n-1} + C_n$	0

Tabella 2.2: Piano d'ammormento con rimborso graduale del capitale e interessi pagati posticipatamente

Esempio di un generico piano di ammortamento con rimborso graduale del capitale S e interesse pagati posticipatamente

Un individuo riceve in prestito la somma $S = 10\,000$ € da restituire con quattro rate posticipate semestrali. Sapendo che il tasso annuo convertibile semestralmente $j(2) = 0.10$ e che le quote capitali sono cosí formate:

$$C_1 = 1\,000; \quad C_2 = 3\,000; \quad C_3 = 2\,000; \quad C_4 = 4\,000$$

stilare il piano di ammortamento

Prima di tutto occorre determinare il tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}}$ poichè le rate sono semestrali. Quindi $i_{\frac{1}{2}} = \frac{j(2)}{2} = 0.05$. Le quote capitali soddisfano la formula (2.4), e quindi possiamo procedere a stilare il piano di ammortamento:

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	500	1 000	1 500	9 000
2	450	3 000	3 450	6 000
3	300	2 000	2 300	4 000
4	200	4 000	4 200	0

Per procedere correttamente, si calcola la prima quota interesse $I_1 = 0.05 \cdot 10\,000 = 500$, poi sommando la quota capitale e la quota interessi si ottiene la rata $R_1 = 500 + 1\,000 = 1\,500$ e infine si determina il debito residuo dopo aver pagato la prima rata $D_1 = 10\,000 - 1\,000 = 9\,000$ e si procede di conseguenza anche per il secondo periodo.
Possiamo notare da questo semplice esempio che l'equivalenza finanziaria è soddisfatta. Infatti se attualizziamo tutte le rate otteniamo il prestico complessivo S:

$$1500 \cdot (1.05)^{-1} + 3450 \cdot (1.05)^{-2} + 2300 \cdot (1.05)^{-3} + 4200 \cdot (1.05)^{-4} = 10\,000;$$

o anche il debito residuo $D_2 = 6\,000$ può essere determinato attualizzando le ultime due rate:

$$2300 \cdot (1.05)^{-1} + 4200 \cdot (1.05)^{-2} = 6\,000$$

2.3.3 Piano di Ammortamento con rate costanti (ammortamento Francesce)

Il piano di ammortamento con rate costanti, detto anche piano di ammortamento francese, è un particolare piano di ammortamento molto utilizzando in cui la rata R è costante e pagata posticipatamente alla fine di ogni periodo. Quindi la formula di equivalenza finanziaria (2.7) diventa:

$$S = Rv + Rv^2 + Rv^3 + \cdots Rv^n = Ra_{\overline{n}|\, i}$$

da cui segue facilmente che la rata R nel piano di ammortamento francese è:

$$R = \frac{S}{a_{\overline{n}|\, i}} = \frac{S}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{iS}{1-(1+i)^{-n}} \tag{2.9}$$

Dopo aver determinato la rata si può calcolare la prima quota interessi:

$$I_1 = iS = iRa_{\overline{n}|\, i} = iR\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R(1-v^n)$$

e la prima quota capitale C_1:

$$C_1 = R - I_1 = R - R(1-v^n) = Rv^n$$

Naturalmente il debito residuo, dopo aver pagato la prima rata, può essere visto come l'attualizzazione delle $n-1$ rate ancora da pagare, ossia:

$$D_1 = Ra_{\overline{n-1}|\, i}$$

Al secondo periodo, la quota interessi si calcola:

$$I_2 = iD_1 = iRa_{\overline{n-1}|\, i} = iR\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = R(1-v^{n-1})$$

mentre la seconda quota capitale C_2 diventa:

$$C_2 = R - I_2 = R - R(1-v^{n-1}) = Rv^{n-1}$$

e il debito residuo dopo aver pagato la seconda rata è:

$$D_2 = Ra_{\overline{n-2}|\, i}$$

Generalizzando possiamo quindi scrivere che:

$$I_k = R(1-v^{n-(k-1)}); \quad C_k = Rv^{n-(k-1)}; \quad D_k = Ra_{\overline{n-k}|\, i}$$

La Tabella (2.3) riassume gli elementi del Piano di Ammortamento Francese. Possiamo notare come l'evoluzione della quota interesse diminuisce mentre la quota capitale aumenta con il crescere del numero delle rate. Tale evoluzione segue una progressione geometrica.

Periodo k	Quota Interesse I_k	Quota Capitale C_k	Rata R_k	Debito residuo D_k
0	0	0	0	S
1	$R(1-v^n)$	Rv^n	R	$Ra_{\overline{n-1}\rvert i}$
2	$R(1-v^{n-1})$	Rv^{n-1}	R	$Ra_{\overline{n-2}\rvert i}$
...	...	...	...	...
k	$R(1-v^{n-(k-1)})$	$Rv^{n-(k-1)})$	R	$Ra_{\overline{n-k}\rvert i}$
...	...	...	...	...
n	$R(1-v)$	Rv	R	0

Tabella 2.3: Piano Ammortamento con Rate Costanti (Amm. Francese

Esempio di un piano di ammortamento con rate costanti (amm. francese).

Un individuo riceve in prestito una somma $S = 10\,000$ € da restituire con $n = 4$ rate annue costanti posticipate (amm. francese) al tasso di interesse annuo composto $i = 0.04$. Stilare il piano di ammortamento.

Applicando la formula (2.9), determiniamo la rata costante R:

$$R = \frac{10\,000}{a_{\overline{4}\rvert 0.04}} = \frac{10\,000}{3.6299} = 2754.89$$

Dalla rata possiamo agevolmente redigere il piano di ammortamento francese. Ci si calcola la prima quota interessi $I_1 = 0.04 \cdot 10\,000 = 400$ e la quota capitale $C_1 = R - I_1 = 2354.89$ e infine il debito residuo dopo aver pagato la prima rata $D_1 = S - C_1 = 7645.11$. E quindi con le stesse la modalità calcoliamo gli elementi del piano dei successivi anni.

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	400	2354.89	2754.89	7645.11
2	305.80	2449.09	2754.89	5196.02
3	207.84	2547.05	2754.89	2648.97
4	105.95	2648.94	2754.89	≈ 0

Tabella 2.4: Piano Amm. Francese

Anche in questo caso l'equivalenza finanziaria è soddisfatta. Infatti ad esempio, D_2 può essere considerato o come la somma delle quote capitali da pagare, ossia

$$D_2 = C_3 + C_4 = 2547.05 + 2648.94 = 5195.99$$

o come somma dei valori attuali delle rate ancora da pagare

$$D_2 = 2754.89 \cdot (1.04)^{-1} + 2754.89 \cdot (1.04)^{-2} = 5195.98$$

Periodo k	Quota Interesse I_k	Quota Capitale C_k	Rata R_k	Debito residuo D_k
0	0	0	0	S
1	$\frac{S}{n}$	iS	$\frac{S(1+ni)}{n}$	$\frac{S(n-1)}{n}$
2	$\frac{S}{n}$	$\frac{iS(n-1)}{n}$	$\frac{S[1+(n-1)i]}{n}$	$\frac{S(n-2)}{n}$
...	...	...	...	...
k	$\frac{S}{n}$	$\frac{iS(n-(k-1))}{n}$	$\frac{S[1+(n-(k-1))i]}{n}$	$\frac{S(n-k)}{n}$
...	...	...	...	...
n	$\frac{S}{n}$	$\frac{iS}{n}$	$\frac{S(1+i)}{n}$	0

Tabella 2.5: Piano Ammortamento con quote capitali costanti (Ammortamento Italiano)

2.3.4 Piano di Ammortamento con quote capitali costanti (ammortamento Italiano)

Nel piano di ammortamento italiano, ad essere costanti sono le quote capitali. Quindi:

$$C = \frac{S}{n} \tag{2.10}$$

Determinata la prima quota interessi, $I_1 = iS$, si determina anche la prima rata

$$R_1 = I_1 + C = iS + \frac{S}{n} = \frac{S(1+ni)}{n}$$

Ovviamente il debito residuo dopo aver pagato la prima rata diventa:

$$D_1 = S - C = S - \frac{S}{n} = \frac{S(n-1)}{n}$$

Procediamo ora con la seconda quota interessi:

$$I_2 = i\,D_1 = \frac{iS(n-1)}{n}$$

e la seconda rata

$$R_2 = I_2 + C = \frac{iS(n-1)}{n} + \frac{S}{n} = \frac{S[1+(n-1)i]}{n}$$

Ovviamente il debito residuo D_2 può essere analizzato come la somma delle $n-2$ quote capitali da pagare:

$$D_2 = (n-2)C = \frac{S(n-2)}{n}$$

Generalizzando abbiamo quindi:

$$I_k = \frac{iS(n-(k-1))}{n}; \quad R_k = \frac{S[1+(n-(k-1)i)]}{n}; \quad D_k = \frac{S(n-k)}{n};$$

La Tabella (2.5) riassume gli elementi del Piano di Ammortamento Italiano.

Esempio di un Piano di ammortamento con quote capitali costanti (ammortamento italiano)

Un individuo riceve in prestito una somma $S = 10\,000$ € da restituire con $n = 4$ rate al tasso di interesse annuo composto $i = 0.04$ secondo un piano di ammortamento a quote capitali costanti (ammortamento italiano). Stilare il piano di ammortamento.

Prima di tutto occorre determinare la quota capitale costante utilizzando la formula (2.10), e quindi $C = \frac{10\,000}{4} = 2\,500$ che resta costante per ogni rata. Dopo si calcola la prima quota interesse $I_1 = 0.04 \cdot 10\,000 = 400$ e di conseguenza la prima rata $R_1 = 400 + 2\,500 = 2\,900$. Il debito residuo dopo aver pagaro la prima rata è semplicemte $D_1 = 10\,000 - 2\,500 = 7\,500$. La tabella che segue riassume tutti gli elementi del piano.

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	400	2 500	2 900	7 500
2	300	2 500	2 800	5 000
3	200	2 500	2 700	2 500
4	100	2 500	2 600	0

Possiamo notare come in questo piano le rate sono inizialmente elevate e poi si riducono di valore. L'equivalenza finanziaria è inoltre soddisfatta. Ad esempio, se attualizziamo le quattro rate otteniamo il valore del prestito:

$$2900(1.04)^{-1} + 2800(1.04)^{-2} + 2700(1.04)^{-3} + 2600(1.04)^{-4} = 10\,000$$

2.3.5 Piano di ammortamento con quote di accumulazione (ammortamento Americano)

Questo piano richiede la presenza di tre soggetti. Supponomia che un individuo A ottenga in prestito da B (solitamento una banca) una somma di denaro S. L'individuo A si impegna a pagare periodicamente gli interessi I calcolati al tasso di interesse i, che chiameremo *tasso debitore* e a restituire l'intera somma S a scadenza, ossia dopo n periodi. Poiché il soggetto A non restituisce nulla al soggetto B in termini di quote capitali, il suo debito residuo rimane invariato, ossia S e quindi gli interessi $I = iS$ (fino ad ora si tratta di un piano con rimborso intero di S a scadenza e interessi pagati posticipatamente). Ma il soggetto A, per poter disporre della somma S alla scadenza n, decide di versare posticipatamente delle quote Q alla fine di ogni periodo presso un fondo (soggetto C), che remunera tale quote Q al tasso di interesse j, che chiameremo *tasso creditore*. Ovviamente per determinare l'ammontare di Q, occorre che il valore montante delle n quote Q sia pari ad S, ossia:

$$Q s_{\overline{n}|j} = S$$

da cui otteniamo che

$$Q = \frac{S}{s_{\overline{n}|j}} \tag{2.11}$$

Infine, alla scadenza n, il soggetto A preleva dal soggetto C (fondo) la somma S e la restituisce al soggetto B (banca). La Fig. (2.3) riassume quanto esposto.

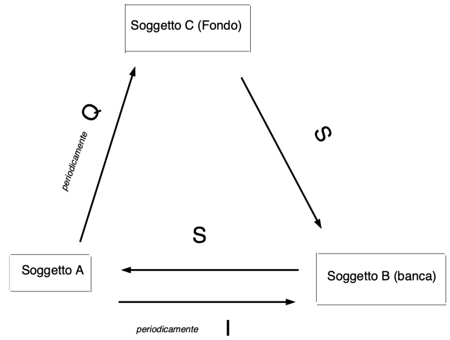


Figura 2.3: Struttura di un piano di ammortamento Americano

La rata che il soggetto A complessivamente paga è quindi:

$$R = I + Q = iS + \frac{S}{s_{\overline{n}|\,j}}$$

ma la quota interesse viene corrisposta al soggetto B, mentre la quota Q viene versata al fondo C.

Esempio di un piano di Ammortamento Americano

Un soggetto riceve in prestito una somma $S = 10\,000$ da restiture con un piano di ammortamento americano con $n = 4$ rate annuali in cui il tasso di interesse debitore $i = 0.04$, il tasso di interesse creditore $j = 0.07$. Stilare il piano di ammortamento.

La quota interesse $I = 0.04 \cdot 10\,000 = 400$ mentre la quota da versare al fondo, in base alla formula (2.11), è:

$$Q = \frac{10\,000}{s_{\overline{4}|\,0.07}} = \frac{10\,000}{\frac{(1.07)^4-1}{0.07}} = \frac{10\,000}{4.4399} = 2252.30$$

Segue che la rata complessiva che egli paga è:

$$R = 400 + 2252.30 = 2652.30$$

Osservazione 6 *La rata ovviamente sarà inferiore alla rata calcolata secondo il piano di ammortamento francese, proprio poichè il fondo mi attribuisce un rendimento maggiore del tasso di remunerazione del debito, ossia $i = 4\%$ e quindi posso versare una somma inferiore rispetto al piano di ammortamento francese per ottenere la somma S. Quindi l'ammortamento americano conviene quando il tasso creditore j è maggiore del tasso debitore i.*

Per redigere il piano di ammortamento americano, dobbiamo considerare gli aspetti finanziari che avvengono tra il soggetto A e la banca B che concede il prestito. Come detto, si tratta di un piano di ammortamento con rimborso globale del prestito.

2.4 Esercizi di Matematica Finanziaria

2.4.1 Esercizi di Riepilogo sulle Rendite

1. Due rendite sono così strutturate:

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	10 000
1	400	0	400	10 000
2	400	0	400	10 000
3	400	0	400	10 000
4	400	10 000	10 400	0

(a) La prima prevede il pagamento di una rata R ogni sei mesi per 5 anni;

(b) La seconda prevede il versamento di una rata annua di 1500 € per 4 anni.

Calcolare l'importo della rata R che rende equivalenti le due rendite nel caso in cui il tasso d'interesse annuo sia $i = 6\%$.

Soluzione
Conversione tasso: $i_{\frac{1}{2}} = (1.06)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0295$

$$Ra_{\overline{10}|\,0.0295} = 1\,500\, a_{\overline{4}|\,0.06}$$

da cui si ricava che $R = 670.77$

2. Mediante versamenti semestrali posticipati e costanti R in un fondo che viene remunerato al tasso annuo $i = 10\%$ e in regime di interesse composto, si vuole arrivare ad accumulare, dopo 10 anni, la somma di 20 000 €. Determinare l'ammontare dei versamenti R.

Soluzione
Conversione tasso: $i_{\frac{1}{2}} = (1.10)^{\frac{1}{2}} - 1$

$$Rs_{\overline{20}|\,0.0488} = 20\,000$$

da cui $R = 612.56$

3. Tizio si innamora follemente di una ragazza e le regala 12 rose alla fine di ogni mese, per un anno. Le rose vengono pagate con carta di credito, e Tizio si dimentica di far fronte ai suoi impegni nei confronti dell'azienda che gestisce i pagamenti. Tale dimenticanza gli costa un interesse mensile composto del 3%. Se ogni rosa costa 3 euro, a quanto ammonta a fine anno il debito di Tizio?

Soluzione

$$V_{12} = 36\, s_{\overline{12}|\,0.03} = 510.91$$

4. Un individuo riceve la somma annuale posticipata di 100 € per tre anni e successivamente, a partire dal quarto anno e fino al decimo anno, una somma annua di 200 € . Sapendo che il tasso di interesse annuo $i = 8\%$, determinare all'istante $t = 0$ il valore attuale di tale rendita utilizzando il regime dell'interesse composto.

Soluzione

$$V_0 = 100\, a_{\overline{3}|\,0.08} + 200\, a_{\overline{7}|\,0.08}\, (1.08)^{-3} = 1\,084.29$$

5. Un individuo riceve annualmente le somme $R_1 = 500$ € al tempo $t = 1$, $R_2 = 700$ € al tempo $t = 2$ e infine $R_3 = 1\,000$ € al tempo $t = 3$. Sapendo che il tasso di interesse annuo $i = 10\%$ dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$, e $j = 12\%$ dall'istante $t = 2$ all'istante $t = 3$, determinare il valore attuale di tale rendita utilizzando il regime dell'interesse composto.

Soluzione

$$V_0 = 500 \cdot (1.10)^{-1} + 700 \cdot (1.10)^{-2} + 1\,000 \cdot (1.12)^{-1}(1.10)^{-2} = 1\,770.95$$

2.4.2 Esercizi di Riepilogo sui piani di ammortamento

1. Un individuo riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 60.000$ da restituire con quattro rate semestrali posticipate R_1; R_2; R_3; R_4. Sapendo che il tasso di interesse annuo convertibile semestralmente è $j(2) = 0.10$ e che :

$$R_1 = 4.000, \quad \frac{R_{k+1}}{R_k} = 3 \quad k = 2, 3;$$

calcolare l'importo delle rate e stilare il piano di ammortamento.

Svolgimento

Tasso di interesse semestrale: $i_{\frac{1}{2}} = \dfrac{j(2)}{2} = \dfrac{0.10}{2} = 0.05$

Inoltre:

$$R_3 = 3R_2; \quad R_4 = 3R_3 = 3 \cdot 3R_2 = 9R_2;$$

Dalla formuala equivalenza finanziaria si ricava che

$$S = R_1 v + R_2 v^2 + R_3 v^3 + R_4 v^4$$

da cui otteniamo:

$$60\,000 = 4\,000(1.05)^{-1} + R_2(1.05)^{-2} + 3R_2(1.05)^{-3} + 9R_2(1.05)^{-4}$$

e quindi:

$$R_2 = 5153.73; R_3 = 3 \cdot 5153.73 = 15\,461.19; R_4 = 9 \cdot 5153.73 = 46\,383.57$$

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	60 000
1	3 000	1 000	4 000	59 000
2	2 950	2 203, 73	5153.73	56 796, 27
3	2 839, 81	12 621, 36	15 461.19	44 174, 91
4	2 208, 74	44 174, 83	46 383.57	≈ 0

2. Un individuo riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 200.000$ da restituire secondo un piano di ammortamento francese con venti rate annuali posticipate, al tasso di interesse annuo del 12%. Calcolare la rata R.
   Dopo aver pagato la decima rata, il debitore sospende il pagamento delle successive due rate agli istanti $t = 11$ e $t = 12$ e concorda con la banca che il debito residuo venga remunerato allo stesso tasso del 12% e in regime di capitalizzazione composta. Al tempo $t = 13$ riprende la restituzione del debito, con le medesime modalità, da concludersi entro il tempo $t = 20$. Calcolare l'importo W delle nuove rate.

   Svolgimento
   Calcolo della rata R:
   $$R = \frac{200\,000}{a_{\overline{20}|\,0.12}} = \frac{200\,000}{7.4694} = 26\,775.91$$
   Determiniamo il debito residuo dopo aver pagato la decima rata:
   $$D_{10} = Ra_{\overline{10}|\,0.12} = 26\,775.91 \cdot 5.6502 = 151\,289.24$$
   Al tempo $t = 11$ e $t = 12$ non paga nessuna rata e quindi il debito residuo in $t = 12$ è si ottiene capitalizzando per due anni il debito D_{10} al tasso $i = 0.12$:
   $$D_{12} = D_{10}(1.12)^2 = 189\,777,22$$
   Questo debito adesso viene nuovamente ammortizzato con $n = 8$ rate W al tasso $i = 0.12$. Si ottiene quindi:
   $$D_{12} = Wa_{\overline{8}|\,0.12} \Rightarrow W = \frac{D_{12}}{a_{\overline{8}|\,0.12}} = \frac{189\,777,22}{4.9676} = 38\,202.99$$

3. Un debito di 150 000 euro al tasso annuo del 10% è ammortizzato in $n = 12$ anni con rate annuali a quote capitale costanti (ammortamento italiano). Pagata la settima rata, il debitore sospende per tre anni i pagamenti sia in conto capitale che degli interessi. Il debitore riprende la restituzione del debito con un ammortamento francese al tasso annuo del 8%, mediante ventisei rate semestrali di importo R, con il pagamento della prima di tali rate al tempo $t = 11$. Determinare R.

   Svolgimento
   Determiniamo la quota capitale C costante:
   $$C = \frac{S}{n} = \frac{150\,000}{12} = 12\,500$$

e il debito residuo dopo aver pagato la settima rata come somma delle 5 quote capitali ancora da pagare:

$$D_7 = 5 \cdot 12\,500 = 62\,500$$

Il debitore per tre anni non paga nulla come interessi e quota capitale. Quindi, il debito al tempo $t = 10$ è il montante di D_7 per 3 anni, ossia:

$$D_{10} = 62\,500(1.10)^3 = 83\,187,50$$

Questo debito viene ammortizzato con 26 rate semestrali posticipate costanti (ammortamento francese). Il tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = (1.08)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0392$. La nuova rata R è:

$$D_{10} = Ra_{\overline{26|}\,0.0392} \Rightarrow R = \frac{83\,187,50}{16.1229} = 5\,159.58$$

4. Un individuo riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di $S = 200\,000$, da restituire secondo un piano di ammortamento francese con quindici rate semestrali posticipate, al tasso di interesse annuo del 10%. Calcolare la rata semestrale R.
Dopo aver pagato l'ottava rata, il debitore sospende il pagamento delle successive quattro quote capitali ($t = 9, 10, 11$ e $t = 12$) e concorda con la banca che per i successivi quattro semestri continui a pagare gli interessi semestrali al tasso annuo del 10%. Al tempo $t = 13$ riprende la restituzione del debito, secondo un piano di ammortamento a quote capitali costanti (ammortamento italiano) e al tasso annuo convertibile semestralmente del 8%, da concludersi entro il tempo $t = 15$. Calcolare l'importo R_{13}, R_{14} e R_{15} delle nuove rate.

Svolgimento

Tasso semestrale: $i_{\frac{1}{2}} = (1.10)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0488$.
Calcolo della rata:

$$R = \frac{S}{a_{\overline{15|}\,0.0488}} = \frac{200\,000}{10.4643} = 19\,112.60$$

Debito residuo dopo aver pagato l'ottava rata:

$$D_8 = Ra_{\overline{7|}\,0.0488} = 19\,112.60 \cdot 5.8116 = 111\,074.78$$

Calcolo degli interessi pagati dopo la sospensione in $t = 9, 10, 11,\ 12$:

$$I = 0.0488 \cdot 111\,074.78 = 5\,420.45$$

Il debito residuo non cambia in quanto vengono pagati gli interessi: $D_8 = D_{12}$. Il debito $D_{12} = 111\,074.78$ viene ammortizzato con un piano di ammortamento italiano formato da $n = 3$ rate pagate in $t = 13, 14, 15$. Il tasso di interesse semestrale è: $i_{\frac{1}{2}} = \frac{0.08}{2} = 0.04$.
La quota capitale costante C è: $C = \frac{D_{12}}{3} = \frac{111\,074.78}{3} = 37\,024.92$.

- Calcoliamo $I_{13} = 0.04 \cdot 111\,074.78 = 4\,442.99$. Quindi $R_{13} = C + I_{13} = 37\,024.92 + 4\,442.99 = 41\,467.91$. Il debito residuo $D_{13} = 111\,074.78 - 37\,024.92 = 74\,049.86$.

- Calcoliamo $I_{14} = 0.04 \cdot 74\,049.86 = 2\,961.99$. Quindi $R_{14} = C + I_{14} = 37\,024.92 + 2\,961.99 = 39\,986.91$. Il debito residuo $D_{14} = 74\,049.86 - 37\,024.92 = 37\,024.94$.

- Calcoliamo $I_{15} = 0.04 \cdot 37\,024.94 = 1\,480.99$. Quindi $R_{15} = C + I_{15} = 37\,024.92 + 1\,480.99 = 38\,505.91$

5. Un individuo riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 120.000$ da restituire secondo un piano di ammortamento americano con quattro rate annuali posticipate. Sapendo che il tasso annuo creditore é $j = 10\%$ mentre il tasso annuo debitore é $i = 20\%$, calcolare l'importo delle rate e stilare il piano di ammortamento.

Svolgimento

Calcolo della quota di accumulo Q versata al fondo:

$$Qs_{\overline{4}|\,0.10} = 120\,000 \Rightarrow Q = \frac{120\,000}{s_{\overline{4}|\,0.10}} = \frac{120\,000}{4.641} = 25\,856.49$$

Quota interessi versata al creditore:

$$I = 0.20 \cdot 120\,000 = 24\,000$$

Rata complessiva pagata dal debitore:

$$R = 25\,856.49 + 24\,000 = 49\,856.49$$

Piano di ammortamento (flussi tra debitore e creditore):

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	120 000
1	0	24 000	24 000	120 000
2	0	24 000	24 000	120 000
3	0	24 000	24 000	120 000
4	120 000	24 000	144 000	0

6. Un individuo riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 120.000$ da restituire con tre rate semestrali posticipate R_1; R_2; R_3. Sapendo che il tasso di interesse annuo convertibile semestralmente è $j(2) = 0.20$ e che :

$$R_2 = R_1; \quad C_3 = R_2;$$

calcolare l'importo delle rate e stilare il piano di ammortamento.

Svolgimento

Tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = \frac{0.20}{2} = 0.10$

- Primo metodo:
  Il debito residuo dopo aver pagato la seconda rata $D_2 = C_3$. Poichè $C_3 = R_2 = R_1$ allora $D_2 = R_1$. Quindi:
  $$I_3 = 0.10 \cdot D_2 = 0.10 \cdot R_1$$
  Poichè $R_3 = C_3 + I_3 = R_1 + 0.10R_1 = 1.1R_1$
  Possiamo ricavare l'incognita R_1 partendo dal fatto che S è la somma dei valori attuali della rate:
  $$S = R_1v + R_2v^2 + R_3v^3 = R_1(1.10)^{-1} + R_1(1.10)^{-2} + 1.1R_1(1.10)^{-3} \Rightarrow$$
  $$120\,000 = 2.561983R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{120\,000}{2.561983} = 46\,838.71$$
- Secondo metodo:
  $I_1 = 0.10 \cdot 120\,000 = 12\,000$. Quindi $C_1 = R_1 - I_1 = R_1 - 12\,000$. Il debito residuo $D_1 = 120\,000 - C_1 = 120\,000 - (R_1 - 12\,000) = 132\,000 - R_1$.
  $I_2 = 0.10 \cdot D_1 = 0.10 \cdot (132\,000 - R_1) = 13\,200 - 0.10R_1$. Quindi $C_2 = R_2 - I_2 = R_1 - (13\,200 - 0.10R_1) = 1.10R_1 - 13\,200$. Infine $C_3 = R_2 = R_1$. Per determinare l'incognita R_1 partiamo dal fatto che S è la somma delle quote capitali:
  $$S = C_1 + C_2 + C_2 \Rightarrow 120\,000 = (R_1 - 12\,000) + (1.10R_1 - 13\,200) + R_1$$
  Quindi:
  $$3.10R_1 - 25\,200 = 120\,000 \Rightarrow R_1 = \frac{145\,200}{3.10} = 46\,838.70$$

Piano di ammortamento:

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	120 000
1	12 000	34 838.70	46 838.70	85 161.30
2	8 516.13	38 322.57	46 838.70	46 838.73
3	4 683.87	46 838.73	51 522.60	0

7. Un individuo riceve al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 200\,000$ da restitutire secondo un piano di ammortamento a quote capitali costanti (italiano) con $n = 20$ rate semestrali. Sapendo che il tasso di interesse annuo $i = 20\%$, calcolare la quarta rata e il debito residuo dopo aver pagato la tredicesima rata.

Svolgimento

Calcolo del tasso semestrale: $i_{\frac{1}{2}} = (1.20)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0954$.
Calcolo della quota capitale costante: $C = \frac{S}{n} = \frac{200\,000}{20} = 10\,000$.
Calcolo di $R_4 = C + I_4$. Per calcolare $I_4 = 0.0954 \cdot D_3$. Ma $D_3 = 17 \cdot 10\,000 = 170\,000$. Quindi $I_4 = 0.0954 \cdot 170\,000 = 16\,218$. Quindi $R_4 = 10\,000 + 16\,218 = 26\,218$.
Infine $D_{13} = 7 \cdot 10\,000 = 70\,000$.

8. Un individuo riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 21\,000$ € da restituire con tre rate semestrali posticipate $R_1;\ R_2;\ R_3;$.
Sapendo che il tasso di interesse semestrale è $i_{\frac{1}{2}} = 0.08$ e che :

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = 2 \quad k = 1, 2;$$

stilare il piano di ammortamento.

Svolgimento

Ponendo $k = 1$ si ottiene: $\dfrac{C_2}{C_1} = 2 \Rightarrow C_2 = 2C_1;$
Ponendo $k = 2$ si ottiene: $\dfrac{C_3}{C_2} = 2 \Rightarrow C_3 = 2C_2 = 2 \cdot 2C_1 = 4C_1;$
Dalla formula: $S = C_1 + C_2 + C_3$ abbiamo:

$$S = C_1 + 2C_1 + 4C_1 \Rightarrow 21\,000 = 7C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{21\,000}{7} = 3\,000$$

e quindi $C_2 = 6\,000$ e $C_3 = 12\,000$. Piano Ammortamento:

k	I_k	C_k	R_k	D_k
0	0	0	0	21 000
1	1 680	3 000	4 680	18 000
2	1 440	6 000	7 440	12 000
3	960	12 000	12 960	0

Tabella 2.6: Piano Amm. Esercizio 8

9. Un individuo riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 100.000$ da restituire con dieci rate semestrali posticipate $R_k;\quad k = 1, ..., 10$, al tasso di interesse annuo convertibile semestralmente $j(2) = 0.08$. Sapendo che le prime quattro rate sono tutte dello stesso importo $2R$ e che le rate dalla quinta alla decima sono di importo R, calcolare l'importo delle rate.
Calcolare inoltre il debito residuo subito dopo aver pagato la seconda rata.

Svolgimento

Tasso di interesse semestrale: $i_{\frac{1}{2}} = \frac{0.08}{2} = 0.04$
La formula da applicare consiste nell'attualizzare tutte le rate al tempo $t = 0$ e perle pari ad S:

$$S = 2R \cdot a_{\overline{4|}\,0.04} + R \cdot a_{\overline{6|}\,0.04}\,(1.04)^{-4}$$

da cui:

$$100\,000 = 7.2597R + 4.4809R \Rightarrow R = \frac{100\,000}{11.7406} = 8\,517.45$$

Le prime quattro rate sono di importo $2R$ e quindi 17 034.90 mentre le ultime sei di importo $R = 8\,517.45$

Debito residuo dopo aver pagato la seconda rata:

$$D_2 = 17\,034.90 a_{\overline{2}|\,0.04} + 8\,517.45 a_{\overline{6}|\,0.04} (1.04)^{-2} = 73\,410.53$$

oppure:

$C_1 = R_1 - I_1 = 17\,034.90 - 4\,000 = 13\,034.90$; quindi $D_1 = 100\,000 - 13\,034.90 = 86\,965.10$; $I_2 = 0.04 \cdot 86\,965.10 = 3\,478.60$; da cui $C_2 = R_2 - I_2 = 17\,034.90 - 3\,478.60 = 13\,556.30$

Quindi

$$D_2 = S - C_1 - C_2 = 100\,000 - 13\,034.90 - 13\,556.30 = 73\,408.80$$

10. Un debito di 5 000 euro al tasso annuo del 10% é ammortizzato in $n = 7$ anni con quote capitale costanti (ammortamento italiano). Pagata la terza rata, il debitore sospende per due anni anni i pagamenti in conto capitale e versa solo gli interessi. Determinare le annualitá che dovrá pagare il sesto ed il settimo anno per completare il rimborso (ancora con quote capitale costanti) entro la data inizialmente prevista.

Svolgimento

Quota capitale: $C = \dfrac{S}{n} = \dfrac{5\,000}{7} = 714.28$

$$D_3 = 4 \cdot 714.28 = 2\,857.12$$

Pagando gli interessi al tempo $t = 4$ e $t = 5$, il debito residuo al tempo $t = 5$ è lo stesso dopo la terza rata:

$$D_5 = D_3 = 2\,857.12$$

Nuova quota capitale $C^* = \frac{D_5}{2} = 1\,428.56$;

Calcoliamo $I_6 = 0.10 \cdot D_5 = 0.10 \cdot 2\,857.12 = 285.71$

Quindi $R_6 = C^* + I_6 = 1\,428.56 + 285.71 = 1\,714.27$

Il debito residuo dopo aver pagato la sesta rata $D_6 = C^* = 1\,428.56$ (manca una sola quota capitale da pagare). Quindi $I_7 = 0.10 \cdot D_6 = 0.10 \cdot 1\,428.56 = 142.85$. In conclusione:

$$R_7 = I_7 + C^* = 142.85 + 1\,428.56 = 1\,571.41$$

11. Un individuo riceve, al tempo (espresso in semestri) $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 150\,000$ da restituire secondo un piano di ammortamento francese con venti rate semestrali, al tasso di interesse annuo del 12%. Calcolare la rata R. Dopo aver pagato la decima rata, il debitore ottiene di poter sospendere il pagamento delle quote capitale delle successive tre rate e paga soltanto gli interessi. Al tempo $t = 13$ restituisce un quarto della somma dovuta mentre la parte rimanente verrá restituita mediante un ammortamento americano con sette rate semestrali la prima delle quali verrá pagata al tempo $t = 14$. Calcolare la rata da pagare per la costituzione del capitale cosí come previsto per l'ammortamento americano e la quota interesse. Si utilizzino il tasso debitore semestrale del 7% ed il tasso creditore semestrale del 11%.

Soluzione

Conversione tasso: $i_{\frac{1}{2}} = (1.12)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0583$
Determinazione della rata: $R = \frac{S}{a_{\overline{20|}\,0.0583}} = \frac{150\,000}{11.6299} = 12\,897.78$
Debito residuo dopo aver pagato la decima rata:

$$D_{10} = Ra_{\overline{10|}\,0.0583} = 12\,897.78 \cdot 7.4197 = 95\,697.65$$

Poichè paga gli interessi nella misura di $I = 0.0583 \cdot 95\,697.65 = 5\,579.17$, il debito residuo dopo aver pagato la tredicesima rata è pari al debito dopo la decima:

$$D_{13} = D_{10}$$

L'individuo restituisce un quarto di D_{13} e quindi:

$$\frac{95\,697.65}{4} = 23\,924.41$$

Quindi il suo debito complessivo da ammortizzare secondo piano americano è: $D = 95\,697.65 - 23\,924.41 = 71\,773.24$
Quota interessi $I = 0.07 \cdot 71\,773.24 = 5\,024.12$
Quota capitali: $Qs_{\overline{7|}\,0.11} = 71\,773.24 \Rightarrow Q = \dfrac{71\,773.24}{\frac{(1.11)^7-1}{0.11}} = 7\,336.32$

12. Nell'ammortamento francese di un prestito di 14 anni il rapporto fra il debito residuo dopo il versamento della quarta rata ed il debito residuo dopo il versamento della nona rata é 5/3. Calcolare il tasso del prestito.

Svolgimento

$$\frac{D_4}{D_9} = \frac{Ra_{\overline{10|}i}}{Ra_{\overline{5|}i}} = \frac{\frac{1-v^{10}}{i}}{\frac{1-v^5}{i}} = \frac{1-v^{10}}{1-v^5} = \frac{5}{3}$$

Ponendo $v^5 = y$ si ottiene:

$$\frac{1-v^{10}}{1-v^5} = \frac{1-y^2}{1-y} = \frac{(1-y)(1+y)}{1-y} = 1 + y = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

Quindi:

$$v^5 = \frac{2}{3} \Rightarrow v = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = 0.9221 \Rightarrow i = \frac{1}{v} - 1 \Rightarrow i = \frac{1}{0.9221} - 1 = 0.0844$$

13.

14. Un individuo prende in prestito la somma S da restiture con quattro rate ai tempi $t = 2, 4, 6, 8$ (tempo espresso in semestri). Sapendo che $C_1 = 5\,000$; $C_2 = 10\,000$; $C_3 = 12\,000$; $C_4 = 8\,000$ e che in tasso annuale é $i = 0.05$, stilare il piano di ammortamento.

Soluzione

La somma $S = C_1+C_2+C_3+C_4 = 35\,000$ euro. Si puó facilmente convertire il tempo in anni e quindi utilizzare il tasso annuale ai tempi $1, 2, 3, 4$ (tempo espresso in anni). Quindi il P.A.:

k	I	C	R	D
0				35 000
1	1 750	5 000	6 750	30 000
2	1 500	10 000	11 500	20 000
3	1 000	12 000	13 000	8 000
4	400	8 000	8 400	0

15. Un individuo prende in prestisto una somma S da restituire secondo un piano di ammortamento francese formato da $n = 10$ rate annuale al tasso annuale $i > 0$. Sapendo che il rapporto tra il debito residuo dopo aver pagato la sesta rata e il debito residuo dopo aver pagato la seconda rata é pari a $\frac{8}{10}$, determinare il tasso annuale i.

Soluzione

$$\frac{D_6}{D_2} = \frac{Ra_{4|i}}{Ra_{8|i}} = \frac{1-(1+i)^{-4}}{1-(1+i)^{-8}} = \frac{1-v^4}{1-v^8} = \frac{8}{10} \to \frac{4v^8-5v^4+1}{5(1-v^8)} = 0$$

Poiché $i \neq 0$ allora risolviamo $4v^8 - 5v^4 + 1 = 0$. Ponendo $v^4 = y$ diventa $4y^2 - 5y + 1 = 0$ da cui si ottiene che $y_1 = 1$ e $y_2 = 0.25$. Quindi $v^4 = 1$ diventa $v = 1$ da cui $i = 0$ (da scartare poiché $i > 0$). Quindi $v^4 = 0.25$ diventa $v = 0.7071$ da cui $i = 0.4142$.
Alternativamente si poteva semplifare usando $1 - v^8 = (1 - v^4)(1 + v^4)$.

16. Un individuo prende in prestisto una somma $S = 80\,000$ da restituire secondo un piano di ammortamento francese formato da $n = 20$ rate semestrali al tasso annuale $i = 0.15$. Dopo aver pagato la quinta rata, sospende per il pagamento delle successive quattro rate semestrali. Al tempo $t = 10$ riprende a restituire il debito residuo secondo un piano di ammortamento italiano formato da sei rate semestrali. Stilare il piano di ammortamento italiano.

Soluzione:

$$R = 7686.95; \quad D_5 = 69006.24; \quad D_9 = D_5(1.0723)^4 = 91233.34; \quad C = \frac{91233.34}{6} = 15205.55$$

n	I	C	R	D
0				91 233.34
1	6 596.17	15 205.55	21 801.72	76 027.79
2	5 496.80	15 205.55	20 702.35	60 822.24
3	4 397.44	15 205.55	19 602.99	45 616.69
4	3 298.08	15 205.55	18 503.63	30 411.14
5	2 198.72	15 205.55	17 404.27	15 205.55
6	1 099.36	15 205.55	16 304.91	0

17. Melchiorre prende in prestito la somma di 50 000 euro al tempo $t = 0$, e lo restituisce con un piano di ammortamento pagato 4 rate al tempo $t = 3, 6, 8, 10$ (tempo espresso in anni). Le quattro quote capitale sono: $C_1 = 6\,000$; $C_2 = 10\,000$; $C_3 = 22\,000$; $C_4 = 12\,000$. Sapendo che il tasso di interesse annuo $i = 0.07$, stilare il piano di ammortamento.

    Soluzione:

    $I_1 = 11\,252.15$; $R_1 = 17\,252.15$; $I_2 = 9\,901.89$; $R_2 = 26\,926.60$; $I_3 = 4\,926.6$; $R_3 = 26\,926.6$; $I_4 = 1\,738.80$; $R_4 = 13\,738.80$.

18. Yoda riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 160\,000$ da restituire con $n = 20$ rate costanti trimestrali (piano ammortamento francese) al tasso interesse annuo $i = 0.16$. Determinare la quota capitale della seconda rata.
    Dopo aver pagato l'ottava rata, decide con la banca di rinegoziare la restituzione del debito con un piano di ammortamento italiano da restituire con $n = 3$ rate semestrali al tasso di interesse convertibile semestralmente $j(2) = 0.10$. Stilare il piano di ammortamento italiano.

    Soluzione:

    $i_{\frac{1}{4}} = 0.0378$; $R_F = 11\,544.87$; $C_2 = 5\,704.66$; $D_8 = 109\,745.78$; $i_{\frac{1}{2}} = 0.05$; $C_I = 36\,581.92$;

19. MARA riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 80\,000$ da restituire con $n = 3$ rate costanti pagate agli istanti $t = 2$,$t = 3$ e $t = 5$ (tempo espresso in anni). Sapendo che il tasso di interesse annuale é $i = 0.04$, stilare il piano di ammortamento.

    Soluzione: $R = 30\,355$; $I_2 = 6\,528$; $C_2 = 23\,827; D_2 = 56\,173$; $I_3 = 2\,246.92$; $C_3 = 28\,108.08$; $D_3 = 28\,064.92$; $I_5 = 2\,290.09$; $C_5 = 28\,064.92$;

20. M. Giordano riceve, al tempo $t = 0$, in prestito la somma di euro $S = 100\,000$ da restituire secondo un piano di ammortamento italiano con $n = 25$ rate annuale al tasso annuo $i = 0.05$. Determinare l'importo dell'ottava rata. Dopo aver pagato la quindicesima rata rinegozia il contratto e concorda con la banca che la restituzione del debito residuo avvenga con un piano di ammortamento americano formato da $n = 10$ rate annuali, tasso creditore annuale $j = 0.07$ e tasso debitore annuale $i = 0.05$. Determinare la composizione della rata complessiva versata (quota capitale e quota interesse).

    Soluzione:

    $R_8 = 7\,600$; $D_{15} = 40\,000$; $I = 2\,000$; $Q = 2\,895.10$; $R = 4\,895.10$.

21. Venusia riceve in prestito al tempo $t = 0$ la somma di 10 000 da restituire secondo un piano di ammortamento italiano con $n = 20$ rate semestrali al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.03$. Calcolare

la terza rata. Dopo aver pagato la quarta rata rinegozia il contratto e concorda con la banca che la restituzione del debito residuo avvenga con un piano di ammortamento francese la cui rata semestrale $R = 1\,139,65$. Determinare il numero della rate da versare sapendo che il tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.03$.

Soluzione: $R_3 = 770$; $D_4 = 8\,000$; $n = 8$;

22. Un prestito di 95 000 euro viene rimborsato con le seguenti modalitá: per 3 anni si pagano solo gli interessi annui, per altri 2 anni si pagano rate semetrali di 7 500 euro, infine altri 3 anni con rate costanti annue R. Sapendo che il tasso di interesse annuo é $i = 0.045$, determinare l'importo della rata R.

    Soluzione:

    $I = 4\,275$; $i_{\frac{1}{2}} = 0.0222$; $4275 \cdot a_{3|0.045} + 7500 \cdot a_{4|0.0222}(1.045)^{-3} + R \cdot a_{3|0.045}(1.045)^{-5} = 95\,000$; $R = 24225.06$

23. A quale tasso annuale i bisogna impiegare per ulteriori 10 anni il valore finale di una rendita annuale posticipata di $n = 10$ rate di importo R ciascuna per ottenere un montante uguale al valore attuale di una rendita perpetua posticipata di uguale rata R?

    Soluzione:
    $Rs_{n|10} \cdot (1+i)^{10} = \frac{R}{i}$ da cui $i = 0.0492$

24. Un individuo riceve un prestito $S = 50\,000$ da rimborsare in $n = 60$ rate mensili con un piano di ammortamento francese al tasso annuo convertibile mensilmente $j(12) = 0.15$. Determinare la rata. Dopo aver pagato la dodicesima rata, sospende il pagamento delle successive otto rate e concorda con la banca che il debito residuo sia remunerato al tasso mensile $i_{\frac{1}{12}} = 0.002$. Al tempo $t = 21$ riprendere a restituire il debito con una nuova rata mensile W da concludersi in $t = 40$ utilizzando un piano di ammortamento francese al tasso annuo convertibile mensilmente $j(12) = 0.15$. Determinare W.

    Soluzione:

    $R = 1\,189.49$; $D_{12} = 42\,740.13$; $D_{20} = 43\,428.77$; $W = 2\,467.63$

Capitolo 3

Valutazione di operazioni finanziaria in condizioni di certezza: REA E TIR

3.1 Richiami di Matematica: il Teorema degli Zeri.

Teorema 1 ***(degli zeri)***
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora:

$$\exists x_0 \in]a,b[\; t.c.\; f(x_0) = 0.$$

Sia $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ l'approssimazione cercata. Se si richiede un certo errore di ε, il numero delle iterazioni in modo tale che:

$$|x_0 - c_n| < c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

da cui si ottiene

$$2^{n+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$$

3.2 Applicazioni Finanzarie: il criterio del REA e del TIR

In questa sezione ci occuperemo di due criteri, il REA e il TIR, per scegliere quale operazione finanziaria sia la migliore in condizioni di certezza. La scelta fatta in condizione di certezza implica che l'operatore conosca con certezza sia il suo futuro flusso finanziario e sia l'istante in cui riceverà tali flussi. Ma diamo prima di tutto la definizione di *operazione finanziaria.*

Definizione 12 *Si definisce* ***operazione finanziaria*** *generica una successione di somme di denaro in entrata e in uscita, scadenzate nel tempo.*

Faremo la nostra analisi nel caso *discreto*, ossia i movimenti finanziari in entrata e in uscita avvengono in istanti ben determinati. Quindi un'operazione finanziaria può essere rappresentata come l'insieme delle coppie:

$$\{(Q_k, t_k)\}\,, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \cdots n \tag{3.1}$$

dove Q_k rappresenta l'importo in entrata se $Q_k > 0$ o in uscita $Q_k < 0$ se disponibile ovviamente al tempo t_k. Semplicemente, se Q_k è una quantità positiva, avremo che $+Q_k$ rappresenta un'entrata (ad esempio un finanziamento ricevuto, o le entrate derivanti da un investimento effettuato), mentre $-Q_k$ è un'uscita (dovuta ad esempio al rimborso di un prestito o le somme che vengono investite). Inoltre, risulta utile rappresentare in maniera grafica un'operazione finanziari denotando sia gli importi che i tempi (vedi Fig. 3.1).

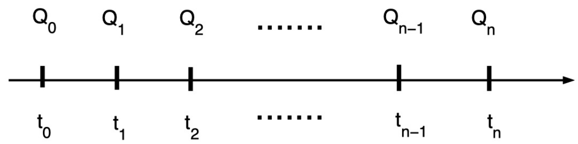


Figura 3.1: Operazione finanziaria

Le operazioni finanziarie possono essere operazioni di **investimento**, ossia quelle in cui tutte le uscite precedono le entrate, e operazioni di **finanziamento** in cui tutte le entrate precedono le uscite. Nelle nostre analisi ci concentremo su queste due operazioni finanziarie. Naturalmente, un'operazione in cui si alternano entrate e uscite non è né di investimento e né di finanziamento.

3.2.1 Criterio del Risultato Economico Attualizzato (REA)

Il primo criterio che analizzeremo è il criterio del REA, ossia criterio del Risultato Economico Attualizzato, denominato anche VAN (Valore Attuale Netto) e NPV (Net Present Value). Questo criterio si basa su un principio molto semplice: poichè le entrate e le uscite sono disponibili in epoche diverse, basta riportare tali importi finanziariamente (quindi attualizzandoli) all'istante iniziale t_0. Ovviamente per fare tale attualizzazione occorre "soltanto"scegliere il tasso di attualizzazione che denoteremo con j. Se supponiamo che l'istante inziale $t_0 = 0$, il REA dell'operazione $\{(Q_k, t_k)\}$ è:

$$REA(j) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(1+j)^{-t_k} \tag{3.2}$$

Esempio sul REA

Supponiamo che un individuo voglia investire in un progetto di investimento che preveda uscite di $10\,000$ € *all'istante* $t_0 = 0$ *e di* $15\,000$ € *all'istante* $t_1 = 2$ *e poi entrate di* $3\,000$ € *all'istante* $t_1 = 2$, $13\,000$ € *all'istante* $t_2 = 3$ *e infine* $16\,000$ € *all'istante* $t_3 = 5$ *(tempo espresso in anni). Calcolare il REA di tale operazione di investimento utilizzando prima il tasso* $j = 0.04$ *e poi* $j = 0.10$.

L'operazione finanziaria può essere descritta anche con i seguenti flussi finanziari netti:

$$\mathbf{Q} = \{-10,000, -12\,000, +13\,000, +16\,000\}$$

disponibile alle epoche:

$$\mathbf{t} = \{0, 2, 3, 5\}$$

o anche graficamente come illustrato nella Fig. (3.2).

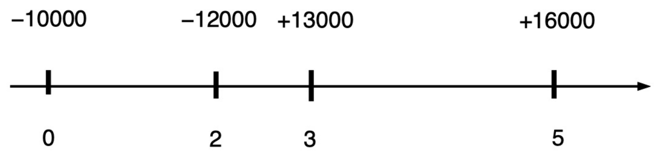


Figura 3.2: Operazione finanziaria di investimento

Possiamo calcolare i due REA come:

$$REA(0.04) = -10\,000 - 12\,000(1.04)^{-2} + 13\,000(1.04)^{-3} + 16\,000(1.04)^{-5} = 23613.11$$

$$REA(0.10) = -10\,000 - 12\,000(1.10)^{-2} + 13\,000(1.10)^{-3} + 16\,000(1.10)^{-5} = 19784.47$$

Osservazione 7 *Dall'esempio possiamo notare con la scelta del tasso non è del tutto indifferente, in quanto cambiando il tasso si può cambiare il valore dato all'operazione finanziaria e quindi anche invertire la scelta tra due operazioni finanziarie.*

Criticità del REA e criterio di scelta

Se analizziamo il REA di una singola operazione di investimento, un REA positivo significa che il guadagno complessivo che si ottiene da quell'operazione di investimento risulta essere maggiore a quello che si può realizzare investendo il capitale al tasso j in un investimento alternativo; viceversa, un REA negativo, denota una potenziale perdita, ossia che il ricavo complessivo che si ottiene da quell'operazione di investimento risulta essere inferiore di quello che si può realizzare investendo il capitale al tasso j. Quindi la scelta del tasso j deve essere effettuata in base alla rischisità dell'investimento in esame.
Naturalemente, se si analizza un'operazione di finanziamento, è normale che il REA sarà negativo, ossia che il valore attuale delle uscite sarà maggiore delle entrate ricevute in quanto le uscite considerano anche gli interessi da pagare al finanziatore. Quindi vale la seguente regola di scelta tra operazioni finanziarie: **nel confronto tra due progetti di investimento o di finanziamento, si sceglie l'operazione con REA maggiore.**
Come visto, quindi il REA presenta una importante criticità, ossia la **soggettività** nella scelta del tasso j che può cambiare la valutazione e la scelta tra due operazioni finanziarie. Per ovviare a tale criticità introduciamo il criterio del TIR.

3.2.2 Criterio del Tasso Interno di Rendimento (TIR)

Si definisce Tasso Interno di Rendimento (TIR) e si denota con j^* quel tasso, se esiste ed è unico, che rende nullo il Risultato Economico Attualizzato, ossia:

$$REA(j^*) = \sum_{k=0}^{n} Q_k (1 + j^*)^{-t_k} = 0 \tag{3.3}$$

Ovviamente trattandosi di un'equazione, la sua soluzione sarà oggettiva e quindi si elimina l'arbitrarietà del REA.

Esempio sul TIR

Un individuo riceve un prestito di 1 000 € all'istante $t_0 = 0$ da restituire con due rate: $R_1 = 700$ € all'istante $t_1 = 1$ e $R_2 = 500$ € all'istante $t_2 = 2$ (tempo espresso in anni). Calcolare il TIR dell'operazione di finanziamento.

Possiamo prima di tutto descrivere il flusso dell'operazione finanziaria:

$$\mathbf{Q} = \{+1\,000, -700, -500\}$$

e delle epoche

$$\mathbf{t} = \{0, 1, 2\}$$

Per determinare il TIR occorre applicare la formula (3.3), ossia determinare quel tasso che annulla il REA:

$$+1\,000 - 700 \cdot (1 + j^*)^{-1} - 500 \cdot (1 + j^*)^{-2} = 0$$

Per svolgere agevolmente questo calcolo, si può utilizzare come incognita il fattore di attualizzazione $v = \dfrac{1}{1+j}$ e quindi l'equazione di sopra diventa:

$$+1\,000 - 700v - 500v^2 = 0$$

che possiamo riscrivere come:

$$500v^2 + 700v - 1000 = 0$$

le cui soluzione sono $v_1 = 0.8779$ e $v_2 = -2.2779$. Ovviamente, poichè $v \in [0, 1]$, scartiamo la soluzione che finanziariamente non ci interessa, ossia $v_2 = -2.2779$ e consideriamo solo $v_1 = 0.8779$. Con brevi passaggi dalla formula $v = \dfrac{1}{1+j}$ otteniamo che:

$$j^* = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1}{0.8779} - 1 = 0.1390 = 13.90\%$$

Criticità del TIR e criterio di scelta

Come per il REA, anche il TIR presenta alcune criticità. La prima dipende dalla complessità dell'equazione da svolgere, il cui grado dipende dall'ultimo istante in cui vi è il flusso finanziario. Nel nostro esempio, poichè $t_2 = 2$, l'equazione è di secondo grado ed è facilmente risolvibile. In altri casi occorre utilizzare metodi di approssimazione o programmi computazionali.
La seconda criticità riguarda l'esistenza o meno del TIR in una operazione finanziaria. Se non esiste una soluzione $v \in [0, 1]$ oppure ne esistono diverse, allora l'operazione finanziare non è dotata di TIR. A tale proposito, per le operazioni di investimento e di finanziamento semplici, ossia quelle con una sola uscita o entrata all'istante inziale t_0, può essere fondamentale il seguente teorema.

Teorema 2 (di Norstrom) *Se un'operazione finanziaria $\{Q_k, t_k\}$ soddisfa le condizioni:*

1. $Q_0 < 0$;

2. $Q_k > 0$ *per* $k = 1, 2, \cdots, n$

3. $Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots Q_n > 0$

allora l'operazione (che è ovviamente di investimento), presenta un TIR positivo.
Il teorema si applica anche cambiando i segni e quindi analizzando l'operazione finanziaria semplice di finanziamento. Quindi, se un'operazione finanziaria $\{Q_k, t_k\}$ *soddisfa le condizioni:*

1. $Q_0 > 0$;
2. $Q_k < 0$ *per* $k = 1, 2, \cdots, n$
3. $Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots Q_n < 0$

allora l'operazione (che è ovviamente di finanziamento), presenta un TIR positivo.

Come detto, per le operazioni finanziarie che non rientrano tra quelle di investimento e di finanziamento semplici, l'esistenza del TIR non è assicurata, e questa è una importante criticità.
La terza criticità riguarda il fatto che le soluzioni di un'equazione non variano se vengono cambiati i segni degli importi. Ma in questo modo trasformiamo un'operazione da investimento a finanziamento. Ad esempio, consideriamo un'operazione di investimento in cui si investe 100 al tempo $t_0 = 0$ e si ricava 120 al tempo $t_1 = 1$. L'operazione è:

$$\mathbf{Q} = \{-100, +120\}; \quad \mathbf{t} = \{0, 1\}$$

Il TIR di questa operazione diventa:

$$-100 + 120v = 0 \to v = \frac{100}{120} = 0.8333 \to j^* = \frac{1}{0.8333} - 1 = 0.20$$

Se consideriamo l'operazione di finanziamento in cui si ricevono 100 al tempo $t_0 = 0$ e si pagano 120 al tempo $t_1 = 1$, l'operazione è:

$$\mathbf{Q} = \{+100, -120\}; \quad \mathbf{t} = \{0, 1\}$$

Il TIR di questa operazione di finanziamento ovviamente non cambia rispetto alla precendete:

$$+100 - 120v = 0 \to v = \frac{100}{120} = 0.8333 \to j^* = \frac{1}{0.8333} - 1 = 0.20$$

Alla luce di quanto visto, possiamo concludere affermando che: **tra due operazione di investimento si sceglie quella con il TIR maggiore, ossia il TIR viene interpretato come un "tasso di rendimento"; tra due operazione di finanziamento si sceglie quella con TIR minore, ossia il TIR viene interpretato come un "tasso di costo ".**

3.2.3 Il TAN e il TAEG

Il Tasso Annuo Effettivo Globale, denominato anche TAEG, ha come obiettivo quello di rappresentare nel modo più completo ed esatto possibile il costo di un finanziamento. Infatti, in base alla legge n.141 del 1991 stabilisce che negli annunci pubblicitari in cui vanga concesso un credito al consumo, è obbligatorio indicare il TAEG dell'operazione.
Il TAEG è definito come *il tasso che rende uguale, su base annua, la somma del valore attuale di tutti gli importi che compongono il finanziamento erogato dal creditore alla somma del valore*

attuale di tutte le rate di rimborso.
Si tratta in definitiva del TIR di un'operazione di finanziamento in cui vengono considerate anche le spese accessorie relative.
Oltre al TAEG, viene anche evidenziato il Tasso Annuo Netto, denominato TAN, che rappresenta il TAEG senza considerare le spese, e quindi è influenzato esclusivamente dal costo del finanziamento. Ovviamente il TAEG risulta essere maggiore del TAN.

Esempio sul TAN e TAEG

Un individuo decide di acquistare una poltrona presso un centro commerciale. Per tale acquisto riceve un finanziamento di 500 € al tempo $t_0 = 0$ da restituire con due comode rate di 300 € da pagare al tempo $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ (tempo espresso in anni). Inoltre per tale finanziamento paga le seguenti spese: 50 € al tempo $t_0 = 0$ per aprire la pratica; 15 € al tempo $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ per riscossione delle rate e infine 40 € al tempo $t_2 = 2$ per chiusura della pratica. Determinare il TAN e TAEG dell'operazione.

Per il calcolo del TAN occorre considerare esclusivamente il finanziamento senza le spese, e quindi il tasso a cui viene effettuato l'investimento ricorrendo al principio di equivalenza finanziaria:

$$500 = 300(1+i)^{-1} + 300(1+i)^{-2}$$

ovviamente portando tutto a sinistra del segno di uguaglianza avremo:

$$+500 - 300(1+i)^{-1} - 300(1+i)^{-2} = 0$$

ossia si tratta della determinazione del TIR di tale operazione. Sostituendo $v = \dfrac{1}{1+i}$ avremo:

$$+500 - 300v - 300v^2 = 0$$

da cui $v_1 = 0.8844$ e $v_2 = -1.8844$. Ovviamente si sceglie solo v_1 da cui si ottiene che il TAN è:

$$TAN = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1}{0.8844} - 1 = 0.1307 = 13.07\%$$

Mentre per il TAEG occorre considerare le spese sostenute e quindi:

$$(500 - 50) - (300 + 15)v + (300 + 15 + 40)v^2 = 0$$

da cui:

$$450 - 315v - 355v^2 = 0$$

le cui soluzioni sono $v_1 = 0.7664$ e $v_2 = -1.6538$. Ovviamente si sceglie anche in questo la soluzione finanziarmente accettabile, ossia quella compresa tra 0 e 1 e quindi:

$$TAEG = \frac{1}{0.7664} - 1 = 0.3048 = 30.48\%$$

Possiamo notare come il TAEG sia maggiore del TAN.

3.3 Esercizio di Riepilogo.

1. Un individuo compra una moto e per tale acquisto ottiene un finanziamento di 10 000 euro da restituire con $n = 36$ rate mensili posticipate di importo $R = 400$. Determinare il TAN del finanziamento utilizzando il teorema degli zeri con un errore inferiore a $\varepsilon = \frac{1}{100}$.
Svolgimento

Per determinare il TAN occorre che:

$$10\,000 = 400\, a_{\overline{36}|\, i_{\frac{1}{12}}} \iff 10\,000 - 500\, \frac{1 - (1 + i_{\frac{1}{12}})^{-36}}{i_{\frac{1}{12}}} = 0$$

$$\iff f(v) = 10\,000 - 500\, \frac{v[1 - (1 + v)^{36}]}{1 - v} = 0$$

Consideriamo i due valori di v che verificano il teorema degli zeri, ad esempio ossia $v = 0.5$ e $v = 0.99$, con l'errore $\varepsilon = \frac{1}{100}$ si ottiene un numero di iterazioni pari a $n = 5$.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	0.5	0.99	0.745	> 0	< 0	> 0
1	0.745	0.99	0.8675	> 0	< 0	> 0
2	0.8675	0.99	0.9287	> 0	< 0	> 0
3	0.9287	0.99	0.9593	> 0	< 0	> 0
4	0.9593	0.99	0.9746	> 0	< 0	< 0
5	0.9593	0.9746	0.9669			

Quindi una buona approssimazione dell'equazione é $v = 0.9669$ da cui si ottiene in tasso mensile $i_{\frac{1}{12}} = \dfrac{1}{v} - 1 = \dfrac{1}{0.9669} - 1 = 0.0342$ e quindi in TAN é $(1,0342)^{12} - 1 = 0.4971$

2. Un individuo riceve al tempo $t = 0$ un finanziamento di 50 000 euro da restituire con due rate $R_1 = 11\,000$ euro al tempo $t = 1$ e $R_2 = 45\,000$ euro al tempo $t = 2$. Inoltre egli deve pagare i seguenti importi: 400 euro al tempo $t = 0$ per spese di apertura pratica; 100 euro al tempo $t = 1$ e $t = 2$ per spese di riscossione rate. Calcolare il TAN e TAEG dell'operazione finanziaria.

Svolgimento

Calcolo del TAN:

$$+50\,000 - 11\,000v - 45\,000v^2 = 0$$

da cui si ottiene

$$45\,000v^2 + 11\,000v - 50\,000 = 0$$

le cui soluzione sono $v_1 = 0.9389$; $\quad v_2 = -1.18$. Consideriamo solo la soluzione finanziariamente valida, ossia v_1 poichè è tra 0 e 1. Possiamo quindi determinare il TAN:

$$TAN = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1}{0.9389} - 1 = 0.0650 = 6.50\%$$

Calcolo del TAEG:

$$(+50\,000 - 400) - (11\,000 + 100)v - (45\,000 - 100)v^2 = 0$$

da cui:

$$45\,100v^2 + 11\,100v - 49\,600 = 0$$

le cui soluzioni sono: $v_1 = 0.9328; \quad v_2 = -1.1789$. Considerando quella positiva abbiamo:

$$TAEG = \frac{1}{0.9328} - 1 = 0.072 = 7.20\%$$

3. Un individuo deve effettuare una scelta tra i seguenti due finanziamenti:

   - F_1 : Ottenere la somma di euro 200 000 al tempo $t = 0$ e restituire in cambio le somme di euro 20 000 al tempo $t = 1$, 60 000 al tempo $t = 2$, 180 000 al tempo $t = 3$.
   - F_2 Ottenere la somma di euro 200 000 al tempo $t = 0$ e restituire in cambio le somme di euro 160 000 al tempo $t = 1$, 40 000 al tempo $t = 2$, 20 000 al tempo $t = 3$.

   Dire per quali tassi di valutazione è più conveniente il finanziamento F_1 secondo il criterio del REA.

Svolgimento

$$REA_{F_1} = 200\,000 - 20\,000v - 60\,000v^2 - 180\,000v^3$$
$$REA_{F_2} = 200\,000 - 160\,000v - 40\,000v^2 - 20\,000v^3$$

Possiamo affermare che:

$$F_1 \succ F_2 \iff REA_{F_1} > REA_{F_2}$$

ossia F_1 è preferibile a F_2 se il REA di F_1 è maggiore di F_2. Quindi:

$$200\,000 - 20\,000v - 60\,000v^2 - 180\,000v^3 > 200\,000 - 160\,000v - 40\,000v^2 - 20\,000v^3$$

da cui:

$$160\,000v^3 + 20\,000v^2 - 140\,000v < 0$$

ossia:

$$v(8v^2 + v - 7) < 0 \Rightarrow v \in]0, 0.875[$$

(come al solito a noi interessa cosa succede nell'intervallo $[0, 1]$.) Quindi:

$$v < 0.875 \Rightarrow \frac{1}{1+i} < 0.875 \Rightarrow i > 0.1428$$

4. Un individuo riceve al tempo $t = 0$ un finanziamento di 40 000 euro da restituire con due rate R_1 al tempo $t = 1$ e $R_2 = 2R_1$ al tempo $t = 2$. Inoltre egli deve pagare i seguenti importi: 140 euro al tempo $t = 0$ per spese di apertura pratica; 50 euro al tempo $t = 1$ e $t = 2$ per spese di riscossione rate. Inoltre, al tempo $t = 2$ egli deve pagare l'importo di 30 euro per spese di chiusura pratica. Sapendo che il TAEG è del 15%, calcolare R_1 ed R_2 e il

TAN dell'operazione finanziaria.

Svolgimento

Calcoliamo R_1 sapendo che il TAEG è del 15%:

$$(40\,000 - 140) - (R_1 + 50)(1.15)^{-1} - (2R_1 + 80)(1.15)^{-2} = 0$$

da cui si ottiene:

$$2.3817R_1 = 39\,756.04 \Rightarrow R_1 = 16\,691.59$$

Calcolo del TAN:

$$40\,000 - 16\,691.59v - 33\,383.18v^2 = 0$$

da cui:

$$33\,383.18v^2 + 16\,691.59v - 40\,000 = 0 \Rightarrow v_1 = 0.8728$$

e quindi:

$$TAN = \frac{1}{0.8728} - 1 = 0.1457$$

5. Determinare il tasso di valutazione j che rende il REA della seguente operazione finanziaria pari a $+3\,000$ euro: $R_0 = -10\,000$ al tempo $t = 0$, $R_1 = +7\,000$ al tempo $t = 1$ e $R_2 = +7\,000$ al tempo $t = 2$ (tempo espresso in anni).

   Svolgimento

   L'operazione finanziaria è:

$$\mathbf{R} = \{-10\,000, +7\,000, +7\,000\}; \quad \mathbf{t} = \{0, 1, 2\}$$

   da cui:

$$-10\,000 + 7\,000v + 7\,000v^2 = +3\,000$$

   ossia:

$$7v^2 + 7v - 13 = 0 \Rightarrow v_1 = 0.9514 \Rightarrow j = \frac{1}{0.9514} - 1 = 0.0510$$

6. Un individuo dispone di due opportunitá per la quali deve investire la somma di 60 000 € al tempo $t = 0$ e che conferiscono le seguenti entrate annue:

   (a) $A_1 = 30\,000$ € al tempo $t = 1$, $A_2 = 40\,000$ € al tempo $t = 2$ e $A_3 = 25\,000$€ al tempo $t = 4$;

   (b) $B_1 = 23\,000$ € al tempo $t = 1$, $B_2 = 50\,000$ € al tempo $t = 2$ e B_3 al tempo $t = 4$.

   Determinare per quali valori B_3 l'opportunitá 1 sia preferibile alla 2 in base al criterio del rendimento economico attualizzato (REA) al tasso annuo $j = 15\%$.

   Svolgimento

Calcoliamo i REA delle due operazioni:

$$REA_1 = -60\,000 + 30\,000(1.15)^{-1} + 40\,000(1.15)^{-2} + 25\,000(1.15)^{-4} = 10\,626.53$$

$$REA_2 = -60\,000 + 23\,000(1.15)^{-1} + 50\,000(1.15)^{-2} + B_3(1.15)^{-4} = -2\,192.81 + 0.5717B_3$$

Quinid:

$$1 \succ 2 \iff REA_1 > REA_2 \iff 10\,626.53 > -2\,192.81 + 0.5717B_3$$

e quindi

$$B_3 < 22\,423.17$$

7. Un individuo riceve al tempo $t = 0$ un finanziamento di 100 000 euro da restituire con una delle seguenti modalità:

   (a) pagamento di due rate $R_1 = 110\,000$ euro al tempo $t = 1$ e $R_2 = 50\,000$ euro al tempo $t = 2$;

   (b) pagamento di due rate $R_1 = 30\,000$ euro al tempo $t = 1$ e $R_2 = 150\,000$ euro al tempo $t = 2$.

   Dire:

   - quale delle due modalità di restituzione del prestito è preferibile utilizzando il criterio del tasso interno di rendimento (TIR);
   - quale delle due modalità di restituzione del prestito è preferibile utilizzando il criterio del rendimento economico attualizzato (REA) al tasso di valutazione del 40%.

Svolgimento

Calcoliamo i due TIR:

$$+100\,000 - 110\,000v - 50\,000v^2 = 0 \Rightarrow v_a^* = 0.6916 \Rightarrow TIR_a = 0.4452;$$

$$+100\,000 - 30\,000v - 150\,000v^2 = 0 \Rightarrow v_b^* = 0.7225 \Rightarrow TIR_b = 0.3840;$$

Poichè si tratta di un'operazione di finanziamento si sceglie l'operazione con il TIR minore e quindi l'operazione (b).

Calcoliamo i due REA al tasso $j = 0.40$:

$$REA_a = +100\,000 - 110\,000(1.40)^{-1} - 50\,000(1.40)^{-2} = -4\,081.63$$
$$REA_b = +100\,000 - 30\,000(1.40)^{-1} - 150\,000(1.40)^{-2} = -2\,040.81$$

Poichè $REA_b > REA_a$ allora è preferibile l'operazione (b).

8. Un'operazione di investimento prevede un'uscita di 2 000 € in $t = 0$ ed entrate di 1 000 € in $t = 1$ e R in $t = 2$. Determinare R tale per cui il TIR dell'operazione sia del 5%.

   Svolgimento

   Occorre impostare che l'operazione di investimento abbia un TIR pari al 5%:

$$-2\,000 + 1\,000(1.05)^{-1} + R(1.05)^{-2} = 0$$

   da cui si ottiene che:

$$R = \frac{1\,047.61}{0.9070} = 1\,155.02$$

9. Un individuo deve effettuare una scelta tra i seguenti due investimenti:

   - I_1 Investire la somma di euro 100 000 al tempo $t = 0$ e incassare in cambio la somma di euro 250 000 al tempo $t = 3$.
   - I_2 Investire la somma di euro 100 000 al tempo $t = 0$ e incassare in cambio le somme di euro 80 000 al tempo $t = 1$, 100 000 al tempo $t = 2$, 10 000 al tempo $t = 3$.

   Dire per quali tassi di valutazione le due alternative sono indifferenti secondo il criterio del REA.

   Svolgimento

   Calcolo dei due REA:

$$REA_{I_1} = -100\,000 + 250\,000v^3;$$

$$REA_{I_1} = -100\,000 + 80\,000v + 100\,000v^2 + 10\,000v^3$$

   Affinchè i due REA siano indifferenti occorre porre la condizione che $REA_{I_1} = REA_{I_2}$ e quindi:

$$-100\,000 + 250\,000v^3 = -100\,000 + 80\,000v + 100\,000v^2 + 10\,000v^3$$

   da cui si ottiene:

$$240\,000v^3 - 100\,000v^2 - 80\,000v = 0$$

   ossia:

$$v(12v^2 - 5v - 4) = 0$$

   da cui le tre soluzione sono:

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 0.8221; v_3 = -0.4054$$

   Ovviamente $v = 0 \iff i = +\infty$ e questa soluzione la scartiamo. L'altra implica che:

$$i = \frac{1}{0.8221} - 1 = 0.2163$$

   e quindi con il tasso $i = 0.2163$ le due alternative sono indifferenti secondo il criterio del REA.

10. Un individuo riceve al tempo $t = 0$ (tempo espresso in anni) un finanziamento di 150 000 € da restituire con una delle seguenti modalità:

(a) pagare $R_1 = 100\,000$ € al tempo $t = 1$ e $R_2 = 80\,000$ € al tempo $t = 2$;

(b) pagare $R_1 = 80\,000$ € al tempo $t = 1$ e $R_2 = 110\,000$ € al tempo $t = 2$.

Dire quale delle due modalità è preferibile sia secondo il criterio del TIR e sia secondo il criterio del REA sapendo che il tasso di interesse annuo $i = 5,75\%$.

Soluzione

Calcoliamo il TIR delle due operazioni:

$$TIR_a \Rightarrow 150\,000 - 100\,000v - 80\,000v^2 = 0 \Rightarrow 8v^2 + 10v - 15 = 0$$

da cui si ottiene che:

$$v = 0.8801 \Rightarrow TIR_a = \frac{1}{0.8801} - 1 = 0.1362$$

$$TIR_b \Rightarrow 150\,000 - 80\,000v - 110\,000v^2 = 0 \Rightarrow 11v^2 + 8v - 15 = 0$$

da cui si ottiene che:

$$v = 0.8594 \Rightarrow TIR_a = \frac{1}{0.8594} - 1 = 0.1636$$

Trattandosi di un'operazione di finanziamento si sceglie quella con il TIR minore e quindi è preferibile l'opportunità (a).
Calcoliamo i due REA al tasso $i = 0.0575$.

$$REA_a = +150\,000 - 100\,000(1.0575)^{-1} - 80\,000(1.0575)^{-2} = -16\,099.40$$
$$REA_b = +150\,000 - 80\,000(1.0575)^{-1} - 110\,000(1.0575)^{-2} = -24\,013.15$$

Tra le due operazione scegliamo sempre quella con il REA maggiore, e quindi l'opportunità (a) è preferibile a (b).

11. Un individuo riceve al tempo $t = 0$ un finanziamento di 120 000 euro da restituire con una delle seguenti modalità:

(a) pagamento di due rate $R_1 = 100\,000$ euro al tempo $t = 1$ e $R_2 = 60\,000$ euro al tempo $t = 2$;

(b) pagamento di due rate $R_1 = 20\,000$ euro al tempo $t = 1$ e $R_2 = 160\,000$ euro al tempo $t = 2$.

Dire:

- quale delle due modalità di restituzione del prestito è preferibile utilizzando il criterio del tasso interno di rendimento (TIR);
- a quale tasso di valutazione le due modalità di restituzione sono indifferenti secondo il criterio del (REA).

Svolgimento

Calcoliamo il TIR delle due operazioni:

$$TIR_a \Rightarrow 120\,000 - 100\,000v - 60\,000v^2 = 0 \Rightarrow 3v^2 + 5v - 6 = 0$$

da cui si ottiene che:

$$v = 0.8081 \Rightarrow TIR_a = \frac{1}{0.8081} - 1 = 0.2374$$

$$TIR_b \Rightarrow 120\,000 - 20\,000v - 160\,000v^2 = 0 \Rightarrow 8v^2 + v - 6 = 0$$

da cui si ottiene che:

$$v = 0.8057 \Rightarrow TIR_a = \frac{1}{0.8057} - 1 = 0.2411$$

Trattandosi di un'operazione di finanziamento si sceglie quella con il TIR minore e quindi è preferibile l'opportunità (a).
Calcoliamo il REA della due operazioni:

$$REA_a = 120\,000 - 100\,000v - 60\,000v^2$$

$$REA_b = 120\,000 - 20\,000v - 160\,000v^2$$

Per determinare il tasso che rende indifferenti le due alternative poniamo:

$$REA_a = REA_b \iff 120\,000 - 100\,000v - 60\,000v^2 = 120\,000 - 20\,000v - 160\,000v^2$$

che dopo alcuni passaggi otteniamo la soluzione significativa da un punto di vista finanziario:

$$10v^2 - 8v = 0 \Rightarrow v(10v - 8) = 0 \Rightarrow v = 0.80 \Rightarrow i^* = \frac{1}{0.80} - 1 = 0.25$$

12. Un individuo riceve al tempo $t = 0$ un finanziamento di 50 000 euro da restituire con due rate $R_1 = 20\,000$ euro al tempo $t = 1$ e $R_2 = 35\,000$ euro al tempo $t = 2$. Inoltre egli deve pagare i seguenti importi: $4z$ al tempo $t = 0$ per spese di apertura pratica; z al tempo $t = 1$ e $t = 2$ per spese di riscossione rate. Inoltre, al tempo $t = 2$ egli deve pagare l'importo di $3z$ euro per spese di chiusura pratica. Sapendo che il TAEG è pari ai $\frac{5}{4}$ del TAN, calcore z.
Svolgimento

Calcolo del TAN:

$$+50\,000 - 20\,000v - 35\,000v^2 = 0$$

da cui:

$$35v^2 + 20v - 50 = 0 \Rightarrow v_1 = 0.9431 \Rightarrow TAN = \frac{1}{0.9431} - 1 = 0.0603$$

Calcolo del TAEG:

$$TAEG = \frac{5}{4} \cdot TAN = 0.0753$$

Calcolo di z:

$$(+50\,000 - 4z) - (20\,000 + z)(1.0753)^{-1} - (35\,000 + z + 3z)(1.0753)^{-2} = 0$$

da cui si ottiene:

$$1130.8 - 8.3892z = 0 \Rightarrow z = 134.79$$

13. Un individuo acquista al prezzo $P = 100$ un BTP che eroga sei cedole annuali posticipate di importo $I = 7$. Sapendo che il rimporso del capitale a scadenza é alla pari, ossia $C = 100$, determinare il TIR dell'investimento.

    Soluzione

    $-100+7a_{6|i}+100(1+i)^{-6} = 0$ da cui $7\dfrac{1-v^6}{i}-100(1-v^6) = 0$ e quindi $(1-v^6)(7-100i) = 0$ con $i \neq 0$. La soluzione finanziaria é $i^* = \frac{7}{100} = 0.07$.

14. Un individuo dispone di di due operazioni di finanziamento (tempo espresso in anni):

    (a) -200 in $t = 0$, 600 in $t = 1$ e 10 in $t = 2$;

    (b) -100 in $t = 0$ e 500 in $t = 1$.

    Determinare il tasso di valutazione i che rende indifferenti le due operazioni secondo il criterio del REA.

    Soluzione

    $$-200 + 600v + 10v^2 = -100 + 500v \rightarrow -100 + 100v + 10v^2 = 0 \rightarrow v^2 + 10v - 10 = 0$$

    da cui:

    $$v = 0.9160 \rightarrow i = 0.0917$$

15. Un individuo dispone di una operazione finanziaria (tempo espresso in anni): $+1\,000$ in $t = 0$, $-R$ in $t = 2$ e $-2R$ in $t = 4$.
    Sapendo che il tasso di interesse $i = 0.05$, determinare

    (a) R tale che il REA sia pari a $-4\,000$

    (b) Il TAEG nel caso in cui $R = 2\,000$ e le spese in $t = 0$ sono di 50 euro, in $t = 2$ sono di 200 euro e in $t = 4$ sono pari a 100.

    Soluzione:

    $$1\,000 - R(1.05)^{-2} - 2R(1.05)^{-4} = -4\,000 \rightarrow R = 1958.91$$

    $$1\,000 - 50 - (2\,000 + 200)v^2 - (4\,000 + 100)v^4 = 0 \rightarrow 950 - 2200y - 4100y^2 = 0$$

    da cui

    $$y_1 = 0.2827 \rightarrow v_1 = 0.5316 \rightarrow TAEG = \frac{1}{v_1} - 1 = 88.07\%$$

16. Giuseppe dispone di un progetto per la sua falegnameria per il quale investe al tempo $t = 0$ la somma C e riceve al tempo $t = 1$ la somma pari a $0.5C$ e la somma $0.7C$ al tempo $t = 2$. Determinare: il TIR di tale operazione e inoltre la somma C affinché il REA sia pari a $1\,000$ con tasso di valutazione annuo $i = 0.02$.

    Soluzione: $TIR = 12.32\%$; $\quad C = 6\,138.73$

17. Chewbecca riceve in $t = 0$ (tempo espresso in anni) un finanziamento di 1 000 euro che puó restituire con due modalitá:

    (a) pagare X euro al tempo $t = 1$ e 700 euro in $t = 2$;

    (b) pagare 800 euro al tempo $t = 1$ e 400 euro in $t = 2$;

    Determinare:

    - l'importo X tale che la prima modalitá abbia un TIR del 2%;
    - per quali importi X la seconda modalitá sia preferibile alla prima in base al criterio del REA utilizzando i tasso istantaneo annuo $\delta = 0.10$.

    Soluzione:

    $X = 333\,75$; $\quad REA_1 = 1\,000 - Xe^{-0.10} - 700e^{-0.20}$; $\quad REA_2 = 1\,000 - 800e^{-0.10} - 400e^{-0.20}$; $\quad REA_2 > REA_1 \iff X > 528.57$

18. R. Poggi riceve un finanziamento in $t = 0$ pari a 500 euro che dovrá restituire pagando due rate di importo $3R$ in $t = 1$ e $2R + 200$ in $t = 2$. Determinare

    (a) I valori di R affinché l'operazione finanziaria abbia un TIR positivo (applicando il Teorema di Norstrom);

    (b) Il TAEG nel caso in cui $R = 75$, le spese di apertura pratica in $t = 0$ sono di 50 euro e quelle di riscossione delle rate in $t = 1$ e $t = 2$ sono di 20 euro.

    Soluzione:

    Trattandosi di un finanziamento occorre che $-2R < 0 \iff R > 0$; $\quad -2R - 200 < 0 \iff R > -100$; $\quad 500 - 3R - 2R - 200 < 0 \iff R > 60$ quindi $R > 60$. TAEG=21.89%.

19. Dire quale delle due operazioni é preferibile in base al criterio del REA con $i = 0.05$. Determinare inoltre il tasso di interesse che rende le due operazioni indifferenti secondo il criterio del REA.

    Soluzione:

    $REA_1 = -71,81$; $\quad REA2 = 30,11$. Quindi é preferibile la seconda opportunitá. Inoltre $i = 11,80\%$ rende indifferenti le due alternative.

20. Un soggetto riceve un finanziamento di 10 000 euro in $t = 0$ e restituisce 5 000 euro in $t = 2$ e 8 000 euro in $t = 4$. Inoltre sostiene spese di apertura pratica 500 in $t = 0$ e di spese di riscossione rate di 50 euro in $t = 2$ e $t = 4$. Determinare il TAN e il TAEG dell'operazione.

    Soluzione:

    $v^* = 0.9210$; $\quad TAN = 0.0856$; $\quad v^* = 0.9039$; $\quad TAEG = 0.1063$

21. Un soggetto riceve un finanziamento di 10 000 euro in $t = 0$ e restituisce 8 000 euro in $t = 1$ e 3 000 euro in $t = 2$. Inoltre sostiene spese di apertura pratica 300 in $t = 0$ e di spese di riscossione rate di 100 euro in $t = 1$ e $t = 2$ e spese di chiusura di 200 euro in $t = 2$. Determinare il TAN e il TAEG dell'operazione.

    Soluzione:
    $TAN = 0.0782; \quad TAEG = 0.1348$

22. Un individuo riceve in $t = 0$ (tempo espresso in anni) un finanziamento di 5 000 euro che puó restituire con due modalitá:

    (a) pagare X euro al tempo $t = 2$ e 2 000 euro in $t = 4$;

    (b) pagare 3 000 euro al tempo $t = 1$ e 2 400 euro in $t = 4$;

    Determinare:

    - l'importo X tale che la prima modalitá abbia un TAN del 5%;
    - per quali importi X la seconda modalitá sia preferibile alla prima in base al criterio del REA utilizzando un tasso di interesse annuo $i = 0.10$.

    Soluzione:

    $X = 3\,698.55; \quad X > 3\,630.78$

Capitolo 4

Approssimazione di una funzione mendiante polinomi: Duration e Convessitá.

4.1 Richiami di Matematica: Calcolo differenziale e integrale.

Sia $f : X \to \mathbb{R}\,;\quad x_0 \in X;\quad x_0$ punto di accumulazione per X.
Si denota con:

1) $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ l'incremento della funzione nel punto x_0;

2) $\Delta x_0 = x - x_0$ l'incremento della variabile x nel punto x_0;

3) $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ il rapporto incrementale della funzione f relativo a x_0.

Definizione 13 *Si definisce* ***derivata della funzione*** f ***nel punto*** x_0 *il limite del rapporto incrementale:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e si denota con: $f'(x_0);\quad D(f(x_0));\quad \dfrac{d\,f(x_0)}{dx}$

Definizione 14 *La funzione* f *si dice* ***derivabile in*** x_0 *se la derivata di* f *in* x_0 *esiste ed è finita, ossia:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

La funzione f *dicesi* ***derivabile in*** X *se è derivabile in ogni punto di* X

Sia $f : X \to \mathbb{R}\,;\ X$ intervallo.
La funzione f si dice **derivabile in** X se è derivabile in ogni punto di X, ossia:

$$\forall x \in X :\ \exists\, f'(x) \in \mathbb{R}$$

Quindi, se la f è derivabile in X, si può determinare una nuova funzione che ad ogni $x \in X$ associa $f'(x)$. Tale funzione si definisce **funzione derivata prima o di ordine uno** e si denota con uno dei seguenti simboli: $D\,f,\ f',\ f^1$, ossia:

$$f' : x \in X \to f'(x) \in \mathbb{R}$$

Definizione 15 *Si definisce come* ***derivata seconda*** *di f in x_0 il limite, se esiste, del rapporto incrementale della funzione f' relativo al punto x_0 per x che tende a x_0, o equivalentemente, la derivata, se esiste, della funzione f' in x_0, e si denota con $f''(x_0), D^2 f(x_0)$. Quindi:*

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Definizione 16 *Una funzione f è derivabile due volte in x_0 se la derivata seconda è finita, ossia:*

$$f''(x_0) \in \mathbb{R}$$

Definizione 17 *Si definisce come* ***derivata ennesima*** *di f in x_0 il limte, se esiste, del rapporto incrementale della funzione f^{n-1} relativo al punto x_0 per x che tende a x_0, o equivalentemente, la derivata, se esiste, della funzione f^{n-1} in x_0:*

$$f^n(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_0)}{x - x_0}$$

Definizione 18 *Una funzione f* ***è derivabile*** *n* ***volte in*** *x_0 se la derivata ennesima è finita, ossia:*

$$f^n(x_0) \in \mathbb{R}$$

Derivate delle funzioni elementari

1) **La funzione potenza**: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}, f$ é derivabile nel suo dominio e si ha:

$$D\,x^n = nx^{n-1}$$

2)**La funzione logaritmo**: $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ é derivabile nel suo dominio e si ha:

$$D\,\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$$

Osservazione 8 *Se $a = e$ allora $D \ln x = \frac{1}{x}$*

3) **La funzione esponenziale**: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ é derivabile nel suo dominio e si ha:

$$Da^x = a^x \ln a$$

Osservazione 9 *Se $a = e$ allora $De^x = e^x$*

Derivate di funzioni composte

1) $D\, f(x)^n \;=\; n\, f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

2) $D\, \log_a f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, \log_a e$

2 Bis) $D\, \ln f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

3) $D\, a^{f(x)} \;=\; a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$

3 Bis) $D\, e^{f(x)} \;=\; e^{f(x)} \cdot f'(x)$

Approssimazione di una funzione con un polinomio

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$.
Diremo che g approssima f a meno di ϵ se $|g(x) - f(x)| \leq \epsilon$, $\forall x \in X$.

Teorema 3 ***(di Taylor)***
Sia $f : X \to \mathbb{R}$; X intervallo, f derivabile $(n+1)$ volte in X e siano $x_0, x \in X$.
Allora $\exists\, c \in I(x_0, x)$ tale che:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \\ \cdots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{f^{n+1}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

*Questa espressione va sotto il nome di **Formula di Taylor** di ordine n, di punto iniziale x_0, relativo alla funzione f.*
*In particolare si chiama **Polinomio di Taylor**:*

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$$

mentre si chiama Resto $n-esimo$:

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{n+1}(c)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

*Nel caso in cui $x_0 = 0$, la formula di Taylor prende il nome di **Formula di Mac Laurin***

Definizione 19 *Sia $F : X \to \mathbb{R}$, X intervallo, F continua e derivabile in X. Si dice che F é una **primitiva** della funzione f se:*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$

Integrali Indefiniti Notevoli Immediati.

1) $\int k\,dx = kx + c, \quad k \in \mathbb{R}$

2) $\int x^p\,dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c \quad \forall\, p \neq -1$

3) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

4) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad \forall\, a > 0,\, a \neq 1$

4 bis) $\int e^x\,dx = e^x + c$

Integrali Indefiniti quasi immediati.

1) $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

2) $\int f(x)^p f'(x)\,dx = \dfrac{f(x)^{p+1}}{p+1} + c$

3) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

4) $\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$

4 bis) $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

4.2 Applicazioni Finanziarie: Duration e Convessitá

n questo capitolo ci occuperemo di misurare la sensibilitá di un titolo obbligazionario o di un portafoglio formato da titolo che garantisce pagamenti nel tempo al variare del tasso di interesse. Per questo scopo abbiamo bisogno di introdurre il concetto di **durata media finanziaria** detta anche **duration**.
Supponiamo di disporre di un generico titolo (principalmente obbligazionario) $B = \{Q_k, t_k\}$ che garantisce flussi finanziari alle diverse epoche. Si definisce **durata media finanziaria** o **duration** al tempo t del titolo $B = \{Q_k, t_k\}$, semplicemente **la media ponderata** delle scadenze $(t_k - t)$ (ovviamente si considerano le scadenze t_k dopo l'istante di valutazione t) prendendo come pesi gli importi Q_k disponibili alle diverse scadenze attualizzati. Supponomia di disporre del tasso di interesse i, quindi la duration al tempo t è:

$$dur_B(t;i) = \frac{\sum (t_k - t) \cdot Q_k (1+i)^{-(t_k - t)}}{\sum Q_k (1+i)^{-(t_k - t)}} \tag{4.1}$$

Dalla formula (4.1), risulta evidente che il denominatore della duration è il valore del titolo B al tempo t utilizzando il tasso di valutazione i e quindi possiamo riscrivere la formula (4.1) come:

$$dur_B(t;i) = \frac{\sum (t_k - t) \cdot Q_k (1+i)^{-(t_k - t)}}{A(t,i)} \tag{4.2}$$

Possiamo riscrivere l'espressioni (4.1) e (4.2) prendendo come tasso di valutazione il tasso istantaneo di interesse $\delta = \ln(1+i)$ e quindi ricorrendo alla attualizzazione esponenziale:

$$dur_B(t;\delta) = \frac{\sum (t_k - t) \cdot Q_k\, e^{-\delta(t_k - t)}}{\sum Q_k\, e^{-\delta(t_k - t)}} = \frac{\sum (t_k - t) \cdot Q_k\, e^{-\delta(t_k - t)}}{A(t;\delta)} \tag{4.3}$$

Si definisce invece **convessitá** del titolo $B = \{Q_k, t_k\}$ in t rispetto a δ la media delle scadenze al quadrato:

$$conv_B(t;\delta) = \frac{\sum (t_k - t)^2 \cdot Q_k\, e^{-\delta(t_k - t)}}{\sum Q_k\, e^{-\delta(t_k - t)}} = \frac{\sum (t_k - t)^2 \cdot Q_k\, e^{-\delta(t_k - t)}}{A(t;\delta)} \tag{4.4}$$

Esempio sulla Duration

Supponiamo che un titolo obbligazionario paghi 100 *euro al tempo* $t_1 = 1$, 150 *al tempo* $t_2 = 4$ *e* 500 *al tempo* $t_3 = 5$ *(tempo espresso in anni). Determinare la duration al tempo* $t = 0$ *sia nel caso il cui il tasso di valutazione è* $i = 0.05$ *e nel caso in cui* $\delta = 0.08$*.*

Possiamo applicare la formule (4.1) e quindi:

$$dur(0;0.05) = \frac{\mathbf{1} \cdot 100 \cdot (1.05)^{-1} + \mathbf{4} \cdot 150 \cdot (1.05)^{-4} + \mathbf{5} \cdot 500 \cdot (1.05)^{-5}}{100 \cdot (1.05)^{-1} + 150 \cdot (1.05)^{-4} + 500 \cdot (1.05)^{-5}} = 4.17$$

mentre applicando la (4.3) otteniamo:

$$dur(0;0.08) = \frac{\mathbf{1} \cdot 100 \cdot e^{-0.08 \cdot 1} + \mathbf{4} \cdot 150 \cdot e^{-0.08 \cdot 4} + \mathbf{5} \cdot 500 \cdot e^{-0.08 \cdot 5}}{100 \cdot e^{-0.08 \cdot 1} + 150 \cdot e^{-0.08 \cdot 4} + 500 \cdot e^{-0.08 \cdot 5}} = 4.10$$

Quindi con il primo tasso, la durata media del titolo è 4.17 anni mentre con il secondo tasso la durata media è 4.10 anni.

4.2.1 La durata media finanziaria come misura della volatilità

La durata media finanziaria è un indice temporale che può indicarci come varia il corso di un titolo al variare del tasso di valutazione. Per semplicità, consideriamo il caso in cui l'istante di valutazione $t = 0$ omettendo tale istante sia nella formula della duration che nel valore del titolo, e utilizziamo il tasso istanteneo di interesse δ. Quindi possimo riscrivere la formula (4.3) come:

$$dur_B(\delta) = \frac{\sum t_k \cdot Q_k\, e^{-\delta t_k}}{\sum Q_k\, e^{-\delta t_k}} = \frac{\sum t_k \cdot Q_k\, e^{-\delta t_k}}{A(\delta)} \tag{4.5}$$

dove $dur_B(0;\delta) = dur_B(\delta)$ e $A(0;\delta) = A(\delta)$. Se calcoliamo la derivata prima di $A(\delta)$ rispetto a δ otteniamo:

$$A'(\delta) = \sum -t_k \cdot Q_k\, e^{-\delta t_k} \tag{4.6}$$

e quindi possiamo riscrivere la duration della formula (4.5) come:

$$dur_B(\delta) = -\frac{A'(\delta)}{A(\delta)} \tag{4.7}$$

Allo stesso modo, ponendo $t = 0$ possiamo riscrivere l'Eq.(4.4) come:

$$conv_B(\delta) = \frac{\sum (t_k)^2 \cdot Q_k\, e^{-\delta(t_k)}}{\sum Q_k\, e^{-\delta(t_k)}} = \frac{\sum (t_k)^2 \cdot Q_k\, e^{-\delta(t_k)}}{A(\delta)} \tag{4.8}$$

Se calcoliamo la derivata seconda di $A(\delta)$ rispetto a δ osserviamo:

$$A''(\delta) = \sum t_k^2 \cdot Q_k\, e^{-\delta t_k} \tag{4.9}$$

per cui:

$$conv_B(\delta) = \frac{A''(\delta)}{A(\delta)} \tag{4.10}$$

Ora supponiamo che sul mercato avvengo uno shock dei tassi di interessi, quindi il nuovo tasso ora diventi $\delta' = \delta + d\delta$ dove $d\delta$ può essere posivitivo o negativo. Quale sarà la variazione assoluta del corso del titolo dovuta alla variazione dei tassi di interessi? Semplicemente la differenza:

$$A(\delta + d\delta) - A(\delta)$$

mentre una variazione relativa (che denoteremo con la sigla *var*), si può considerare come il rapporto tra la variazione e il valore del corso iniziale:

$$var(d\delta) = \frac{A(\delta + d\delta) - A(\delta)}{A(\delta)} \tag{4.11}$$

Osservazione 10 *Una funzione $f(x)$ può essere approssimata nel punto iniziale x_0 attraverso il polinomio di Taylor di grado $n = 1$ nel seguente modo:*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}$$

e portando $f(x_0)$ a sinistra e dividendo tutto per $f(x_0)$ otteniamo:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{f(x_0)}\frac{(x - x_0)^2}{2} \tag{4.12}$$

Con un semplice cambio di variabile, ossia denotando la funzione $f = A$ come il corso del titolo; il punto iniziale $x_0 = \delta$ come il vecchio tasso; la variabile $x = \delta + d\delta$ come il nuovo tasso e quindi di conseguenza $x - x_0 = d\delta$ la variazione. Possiamo sviluppare la variazione relativa indicata nella formula (4.11) utilizzando l'espressione (4.12) e quindi:

$$var_B(d\delta) = \frac{A(\delta + d\delta) - A(\delta)}{A(\delta)} \approx \frac{A'(\delta)}{A(\delta)}d\delta + \frac{A''(\delta)}{A(\delta)}\frac{d\delta^2}{2} \tag{4.13}$$

Sostituendo l'espressioni della formule (4.7) e (4.10) nella formula(4.13) otteniamo quindi:

$$var_B(d\delta) \approx -dur_B(\delta)\, d\delta + \frac{1}{2} \cdot conv_B(\delta) \cdot (d\delta)^2 \tag{4.14}$$

L'espressione (4.14) esprime la sensibilitá di un titolo (di un portafoglio finanziario) alla variazione del tasso di interesse. Se si analizza sono il primo termine, essa ci dice che la varazione del corso di un titolo dipende non solo dalla variazione del tasso di interesse ma anche dalla sua duration: maggiore sarà la duration e tanto più elevata sarà l'oscillazione sul corso di un titolo. In conclusione, un aumento dei tassi di interesse implica una riduzione del corso dei titolo in funzione della sua duration. Questo sembra ovvio in quanto, se i tassi aumentano, chi vuole vendere i titoli obbligazionari con tassi vecchi più bassi, deve necessariamente ridurre il loro prezzo per renderli appetibili sul mercato in modo che che li acquista possa compensare i tassi più bassi con un maggior guadagno in conto capitale (la differenza tra il valore di rimborso e il prezzo di acquisto). Inoltre il contributo della convessitá é meno rilevante della duration (poiché $(d\delta)^2$) ed é sempre positivo qualunque sia il segno della variazione $d\delta$. Quindi un titolo é piú sensibile alle variazioni in diminuzione di $d\delta$ e meno sensibile alle variazioni in aumento di $d\delta$.

Esercizi di Riepilogo sulla Duration

1. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 20.000 al tempo $t = 1$, euro 40.000 al tempo $t = 4$, euro 200.000 al tempo $t = 5$. Calcolare la duration di F al tempo $t = 0$ utilizzando il tasso di valutazione $i = 13\%$ (tempo espresso in anni).
   Dire di quanto varia in percentuale il valore attuale di F se si passa dal tasso di valutazione del 13%al tasso di valutazione del 10%. Utilizzare per tale calcolo l'approssimazione della volatilitá ottenuta approssimando con il polinomio di Taylor di primo grado.

   Svolgimento Calcoliamo la duration al tempo $t = 0$ utilizzando il tasso annuo $i = 0.13$:

   $$dur(0; 0.13) = \frac{\mathbf{1} \cdot 20\,000(1.13)^{-1} + \mathbf{4} \cdot 40\,000(1.13)^{-4} + \mathbf{5} \cdot 200\,000(1.13)^{-5}}{20\,000(1.13)^{-1} + 40\,000(1.13)^{-4} + 200\,000(1.13)^{-5}} = 4.36$$

   Per calcoloare la variazione relativa abbiamo bisogno di calcolare $d\,\delta$, ossia dobbiamo calcolare i tassi istantei corrispondenti ai tassi $i = 0.13$ e $i = 0.10$:

   $$\delta = \ln(1.13) = 0.1222; \quad \delta' = \ln(1.10) = 0.0953; \quad d\delta = \delta' - \delta = -0.0269$$

   Quindi:

   $$var \approx -dur(0; 0.13) \cdot d\delta = -4.36 \cdot -0.0269 = +0.1172 = +11.72\%$$

   Significa che una diminuzione del tasso di interesse al 10% comporta un aumento del valore del titolo finanziario del 11.72%.

2. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di 12 000 euro al tempo $t = 0$, 18000 euro al tempo $t = 4$ e x al tempo $t = 7$. Sapendo la duration di F calcolata in $t = 0$ al tasso di valutazione $i = 7\%$ é $dur_F(0; 0.07) = 4.5$ anni, determinare l'importo x.

   Svolgimento

   Scriviamo la formula della duration e la poniamo pari a 4.5:

   $$dur(0; 0.07) = \frac{\mathbf{0} \cdot 12\,000 + \mathbf{4} \cdot 18\,000(1.07)^{-4} + \mathbf{7} \cdot x(1.07)^{-7}}{12\,000 + \cdot 18\,000(1.07)^{-4} + x(1.07)^{-7}} = 4.5$$

da cui si ottiene:

$$1.5568x = 60\,866.05 \Rightarrow x = 39\,096.89$$

3. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di $50\,000$ € al tempo $t = 1$, $30\,000$ € al tempo $t = 4$ e $80\,000$ € al tempo $t = 6$. Calcolare la duration di F al tempo $t = 0$ sapendo che il tasso istantaneo di interesse $\delta = 0.10$. Determinare inoltre, attraverso l'approssimazione di Taylor di primo grado, la variazione relativa sapendo che il tasso istantaneo di interesse passa da $\delta = 0.10$ a $\delta' = 0.13$.

   Svolgimento

   Calcoliamo la duration:

$$dur_F(0; 0.10) = \frac{\mathbf{1} \cdot 50\,000e^{-0.10 \cdot 1} + \mathbf{4} \cdot 30\,000e^{-0.10 \cdot 4} + \mathbf{6} \cdot 80\,000e^{-0.10 \cdot 6}}{50\,000e^{-0.10 \cdot 1} + 30\,000e^{-0.10 \cdot 4} + 80\,000e^{-0.10 \cdot 6}} = 3.56$$

   Calcoliamo la variazione relativa, dove la variazione del tasso $\delta = \delta' - \delta = +0.03$:

$$var_F(0.03) \approx -dur_F(0; 0.10) \cdot d\delta = -3.56 \cdot 0.03 = -0.1068 = -10.68\%$$

4. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 10.000 al tempo $t = 0$, euro 40.000 al tempo $t = 6$, euro 15.000 al tempo $t = 9$. Calcolare la duration di F utilizzando il tasso di valutazione $\delta = 0.09$.

   Svolgimento

   Calcoliamo la duration:

$$dur_F(0; 0.09) = \frac{\mathbf{0} \cdot 10\,000 + \mathbf{6} \cdot 40\,000e^{-0.09 \cdot 6} + \mathbf{9} \cdot 15\,000e^{-0.09 \cdot 9}}{10\,000 + 40\,000e^{-0.09 \cdot 6} + 15\,000e^{-0.09 \cdot 9}} = 5$$

5. Si consideri una rendita semestrale immediata posticipata di importo R formata da $n = 3$ rate. Calcolare la duration di tale rendita al tempo $t = 0$ sapendo che il tasso di interesse semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 5\%$.

   Svolgimento

   Calcoliamo la duration:

$$dur(0; 0.05) = \frac{\mathbf{1} \cdot R(1.05)^{-1} + \mathbf{2} \cdot R(1.05)^{-2} + \mathbf{3} \cdot R(1.05)^{-3}}{R_{\overline{3|}\,0.05}} = \frac{5.3579R}{2.7232\,R} = 1.96$$

   Quindi la duration dell'operazione finanziaria corrisponde a 1.96 semestri.

6. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 10.000 al tempo $t = 0$, euro 20.000 al tempo $t = 3$, euro 50.000 al tempo $t = 10$. Calcolare la duration di F utilizzando il tasso istantaneo $\delta = 0.15$.
   Sapendo che se si passa dal tasso istantaneo $\delta = 0.15$ al tasso di valutazione δ', il valore

attuale di F diminuisce del 10%, calcolare δ'. Utilizzare per tale calcolo l'approssimazione della volatilitá ottenuta approssimando con il polinomio di Taylor di primo grado.

Svolgimento

Calcoliamo la duration:

$$dur_F(0;0.15) = \frac{\mathbf{0}\cdot 10\,000 + \mathbf{3}\cdot 20\,000e^{-0.15\cdot 3} + \mathbf{10}\cdot 50\,000e^{-0.15\cdot 10}}{10\,000 + 20\,000e^{-0.15\cdot 3} + 50\,000e^{-0.15\cdot 10}} = 4.41$$

Per calcolare la variazione del tasso $d\delta$ imponiamo che la variazione relativa $var_F(d\delta)$ sia pari a -0.10:

$$var_F(d\delta) = -0.10 \Rightarrow -dur_F(0;0.15)\cdot d\delta = -0.10 \Rightarrow -4.41\cdot d\delta = -0.10$$

Da cui si ottiene che: $d\delta = +0.0226$
e il nuovo tasso

$$\delta' = \delta + d\delta = 0.15 + 0.0226 = 0.1726$$

7. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di 25 000 € al tempo $t = 0$, 15 000 € al tempo $t = 3$ e x al tempo $t = 5$. Sapendo la duration di F calcolata in $t = 0$ al tasso di valutazione $i = 8\%$ é $dur_F(0;0,08) = 4$ anni, determinare l'importo x.

Svolgimento

Scriviamo la formula della duration e la poniamo pari a 4 anni:

$$dur(0;0.08) = \frac{\mathbf{0}\cdot 25\,000 + \mathbf{3}\cdot 15\,000(1.08)^{-3} + \mathbf{5}\cdot x(1.08)^{-5}}{25\,000 + \cdot 15\,000(1.08)^{-3} + x(1.08)^{-5}} = 4$$

da cui si ottiene:

$$0.6809x = 111\,907.48 \Rightarrow x = 164\,352.48$$

4.2.2 Immunizzazione Finanziaria

Supponiamo che, al tempo $t = 0$, un individuo preveda di dover pagare al tempo futuro T una somma U. Potrebbe acquistare una quantitá di TCN che scadono in T che gli garantiscono di poter pagare U senza che variazioni dei tassi di interesse possano variare il capitale (valore di rimborso) che egli avrá diritto a riscuotere.
Tuttavia si puó verificare che il mercato non disponga del TCN con scandenza T, ma titoli con o senza cedole, che scadono ai tempi $t_1, t_2, \cdots t_n$. Quindi l'operatore potrà acquistare un portafoglio P composto da diverse quantità dei vari titoli. Disporre di un portafoglio P significa che avrà a disposizione di un flusso in entrata $\{Q_k, t_k\}$ con $(k = 1\cdots m)$ tra cedole e rimborsi di capitali; inoltre, le entrate che precedono T dovranno, appena disponibili, essere reinvestite. Il valore di tale portafoglio P al tempo $t = 0$ dipende dalla *struttura a termine dei tassi* vigente:

$$A(0) = \sum_{k=1}^{m} Q_k v(0,t_k) \tag{4.15}$$

dove $v(0,t_k) = \dfrac{1}{r(0,t_k)}$. Mentre se volessi conoscere il valore al tempo T di tale portafoglio posso o capitalizzare $A(0)$ fino a T attraverso il suo fattore di capitalizzazione $r(0,T)$:

$$A(T) = A(0) \cdot r(0,T) \tag{4.16}$$

oppure capitalizzando e attualizzando tutte le somme erogate dal portafoglio P prime e dopo T, rispettivamente:

$$A(T) = \sum_{t_k<T} Q_k r(t_k,T) + \sum_{t_k>T} Q_k v(T,t_k) \tag{4.17}$$

Ovviamente il portafoglio P dovrá essere costruito sempre rispettando la condizione che il suo valore il T sia pari all'uscita programmata U, e quindi:

$$A(T) = U \tag{4.18}$$

Tuttavia, la sola condizione (4.18) non garantisce che alla scadenza T il portafoglio possa valere esattamente U, poiché la struttura a termine dei tassi di interesse potrebbe cambiare. Infatti, se ci poniamo in $t = 0$, se il tasso a termine $r(t_k,T)$ al quale si prevede di investire il flusso Q_k quando sará disponibile in t_k non dovesse coicidere con il tasso spot che si verificherá sul mercato $r(0,T-t_k)$ (ad esempio il tasso a termine $r(2,5)$ determinato in $t = 0$ differisce dal tasso a pronti $r(0,3)$ che si verifica all'istante $t = 2$), il valore del portafoglio P potrebbe differire da U.
Ció nonostante, gli effetti si compensano tra di loro in quanto ad esempio, una diminuzione dei tassi porterebbe ad un impiego meno redditizio delle somme via via disponibili, ma ad una rivalutazione dei titoli in portafoglio. A questo punto, scriviamo la duration del portafoglio P in un istante s data una struttura a termine dei tassi piatta δ_0 (non dipende dalla durata dell'investimento):

$$dur_P(s;\delta_0) = \frac{\sum (t_k - s) Q_k e^{-\delta_0(t_k-s)}}{\sum Q_k e^{-\delta_0(t_k-s)}} \tag{4.19}$$

Allora possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 4 (di Fisher e Weil) *Sia P un portafoglio costruito secondo la condizione (4.18). Se in un istante s si verifica una variazione del tasso istanteo di interesse, ossia $\delta_\varepsilon = \delta_0 + \varepsilon$ e se vale la condizione:*

$$dur_P(s,\delta_0) = T - s \tag{4.20}$$

allora per ogni valore reale ε (ossia variazione del tasso istantaneo di interesse) si ha:

$$A(T,\delta_\varepsilon) \leq A(T,\delta_0) \tag{4.21}$$

Quindi questo significa che se sul mercato avvengono degli shock additivi, allora l'operatore avrà sempre a disposizione la somma di denaro che non potrà scendere al di sotto di U, a condizione che il suo portafoglio sia strutturato in modo tale che la sua duration sia pari a $T - s$. Tale portafoglio allora si dice **immunizzato**, ossia protetto da variazioni di tassi di interesse.

Esempio di Immunizzazione

Un individuo prevede di effettuare un esborso di $U = 200$ € per il tempo $T = 1.5$ (tempo espresso in anni) e sono disponibili sul mercato due TCN: il primo scade in $t_1 = 1$, denotato con TCN(1) *e il secondo in $t_2 = 2$, denotato con TCN(2). Se il tasso di mercato istantaneo è $\delta_0 = 0.125$, determinare le quantità a e b da investire nei due TCN per ottenere un portafoglio immunizzato.*

Prima di tutto occorre costruire il portafoglio P tenendo conto che il suo valore al tempo $T = 1.5$ deve essere pari all'esborso $U = 200$ e quindi:

$$A(1.5; 0.125) = a \cdot e^{0.125 \cdot 0.5} + b \cdot e^{-0.125 \cdot 0.5} = 200 \tag{4.22}$$

Il primo TCN(1) che scade in t_1 deve essere capitalizzato per 0.5 anni mentre il secondo TCN(2) che scade in t_2 deve essere attualizzato di 0.5 anni. Ovviamente tale equazione ha infinite soluzioni. Possiamo però imporre la condizione (4.20) che al tempo $s = 0$ la duration di P sia pari a 1.5, ossia:

$$dur_P(0; 0.125) = \frac{1 \cdot a \cdot e^{-0.125 \cdot 1} + 2 \cdot b \cdot e^{-0.125 \cdot 2}}{a \cdot e^{-0.125 \cdot 1} + \cdot b \cdot e^{-0.125 \cdot 2}} = 1.5 \tag{4.23}$$

Il sistema formato dalle equazioni (4.22) e (4.23) ammette come unica soluzione il portafoglio P formato da $a = 93.94$ quantità del TCN che scade in t_1 e da $b = 106.45$ quantità del TCN che scade in t_2. Tale portafoglio risulta immunizzato.
Per verificare che sia immunizzato, supponiamo che in un istante $t = 0.66$ il tasso di mercato cambi in $\delta_\varepsilon = 0.2$. Il valore previsto in T del portafoglio P costruito precedentemente diventa:

$$A(1.5; 0.20) = 93.94 \cdot e^{0.2 \cdot 0.5} + 106.45 \cdot e^{-0.2 \cdot 0.5} = 200.14$$

4.2.3 Forza di interesse

Supponiamo che si disponga di un capitale C al tempo $t_0 = 0$. L'interesse che matura nell'intervallo temporale $[t; t + \Delta t]$ sará:

$$I(t; t + \Delta t) = Cr(t + \Delta t) - Cr(t)$$

e di conseguenza il tasso di intersse sará:

$$i(t, t + \Delta t) = \frac{I(t; t + \Delta t)}{Cr(t)} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{r(t)}$$

. L'obiettivo é adesso di misurare l'intensitá dell'interesse nell'intervanno $[t, t + \Delta t]$:

$$\frac{i(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{I(t; t + \Delta t)}{Cr(t)} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r(t)}$$

. Di definisce forza di interesse o intensitá di interesse in t, la velocitá di accrescimento del capitale accumulato in t, ossia:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{i(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{d}{dt} \ln(r(t))$$

Risultat immediato che allora:

$$\int_0^T \delta(t)\, dt = \int_0^T \frac{d}{dt} \ln r(t) = [\ln r(t)]_0^T = \ln r(T) - \ln r(0) = \ln r(T)$$

poiché $r(0) = 1$ e quindi $\ln 1 = 0$. Quindi abbiamo come risultato che:

$$\ln r(T) = \int_0^T \delta(t)\, dt \to r(T) = e^{\int_0^T \delta(t)\, dt}$$

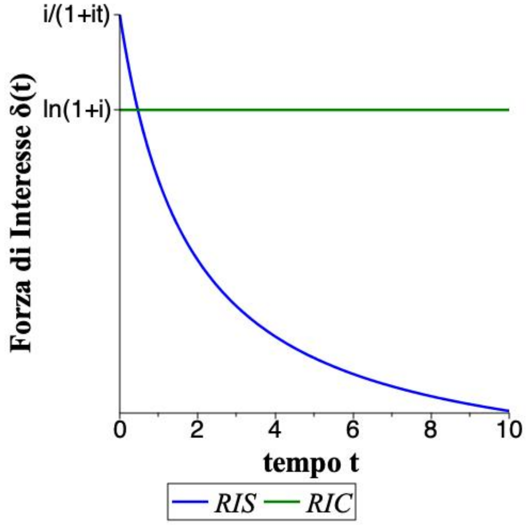


Figura 4.1: Confronto della Forza di interesse nei regimi RIS e RIC

RIC

Possiamo calcolare facilmente che:

$$r(t) = (1+i)^t; \quad r'(t) = (1+i)^t \ln(1+i); \quad \delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \ln(1+i)$$

Poiché $\delta(t)$ non dipende dal tempo allora possiamo scrivere che in RIC

$$\delta = \ln(1+i)$$

e ne consegue che:

$$M = Cr(T) = Ce^{\int_0^T \delta(t)\,dt} = Ce^{\int_0^T \delta\,dt} = Ce^{\delta T}$$

RIS

Possiamo calcolare facilmente che:

$$r(t) = (1+it); \quad r'(t) = i; \quad \delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{i}{1+it}$$

4.3 Esercizi di Riepilogo

1. Un individuo possiede un portafoglio formato da $n_1 = 50$ BTP e $n_2 = 70$ BOT. Ogni BTP paga cedole semestrali per due anni al tasso di interesse convertibile semestralmente $j(2) = 0.10$, valore nominale $C = 100$ e valore di rimborso a scadenza pari a 110. Ogni BOT scade tra 1 anno e rimborsa un capitale pari a 115. Calcolare la duration e la convessità del portafglio sapendo che il tasso istantaneo di valutazione é $\delta = 0.03$. Calcolare inotre la variazione relativa utilizzando il polinomio di Taylor di secondo ordine se si passa da $\delta = 0.03$ a $\delta' = 0.045$.

Soluzione

$$dur(0.03) = \frac{0.5 \cdot 250e^{-0.5 \cdot 0.03} + 1 \cdot 8300e^{-1 \cdot 0.03} + 1.5 \cdot 250e^{-1.5 \cdot 0.03} + 2 \cdot 5\,750e^{-2 \cdot 0.03}}{250e^{-0.5 \cdot 0.03} + 8300e^{-1 \cdot 0.03} + 250e^{-1.5 \cdot 0.03} + 5\,750e^{-2 \cdot 0.03}} = 1.3877\text{anni}$$

$$conv(0.03) = \frac{0.5^2 \cdot 250e^{-0.5 \cdot 0.03} + 1^2 \cdot 8300e^{-1 \cdot 0.03} + 1.5^2 \cdot 250e^{-1.5 \cdot 0.03} + 2^2 \cdot 5\,750e^{-2 \cdot 0.03}}{250e^{-0.5 \cdot 0.03} + 8300e^{-1 \cdot 0.03} + 250e^{-1.5 \cdot 0.03} + 5\,750e^{-2 \cdot 0.03}} = 2.1722\text{anni}$$

$$var(+0.015) = -1.3877 \cdot 0.015 + \frac{1}{2} \cdot 2.1722 \cdot 0.015^2 = -0.0207$$

2. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 100 euro al tempo $t = 1$, euro 400 al tempo $t = 3$, euro 300 al tempo $t = 7$ (tempo espresso in anni). Calcolare la duration di F utilizzando il tasso di interesse annuale $i = 0.05$. Determinare inoltre la variazione relativa (utilizzando il polinomio di Taylor di primo ordine) sapendo che il tasso di interesse passa da $i = 0.05$ a $i' = 0.06$.

   Soluzione
   $dur(0, 0.05) = 4.012$ (anni). Inoltre $\delta = \ln(1.05) = 0.0487$; $\delta' = \ln(1.06) = 0.0582$ $d\delta = 0.0095$. Pertanto

   $$var(0.0095) \approx -4.012 \cdot 0.0095 = -0.0381$$

3. Un individuo possiede una rendita posticipata formata da 4 rate annuali di importo R. Determinare la duration e la convessitá sapendo che il tasso di interesse annuo é $i = 0.0488$. Determinare inoltre la variazione relativa attraverso il polinomio di Taylor di secondo ordine se il tasso passa da $i = 0.0488$ a $i' = 0.06$.

   Soluzione:

   $$i_{\frac{1}{2}} = 0.0488$$

   $$dur(0.0488) = \frac{1 \cdot R(1.0488)^{-1} + 2 \cdot R(1.0488)^{-2} + 3 \cdot R(1.0488)^{-3} + 4 \cdot R(1.0488)^{-4}}{Ra_{4|0.0488}} = 2.44$$

   $$conv(0.0488) = \frac{1^2 \cdot R(1.0488)^{-1} + 2^2 \cdot R(1.0488)^{-2} + 3^2 \cdot R(1.0488)^{-3} + 4^2 \cdot R(1.0488)^{-4}}{Ra_{4|0.0488}} = 7.20$$

   $$\delta = \ln(1.0488); \delta' = \ln(1.06) = d\delta = 0.0106$$

   $$var(0.0106) = -2.44 \cdot 0.0106 + \frac{1}{2} \cdot 7.20 \cdot (0.0106)^2 = -0.0254$$

4. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 100 euro al tempo $t = 2$, euro 200 al tempo $t = 4$, euro 300 al tempo $t = 6$ (tempo espresso in anni). Calcolare la duration di F utilizzando il tasso istantaneo di valutazione $\delta = 0.08$. Determinare inoltre la variazione relativa sapendo che la variazione del tasso $d\delta = -0.02$.

   Soluzione: $dur_F(0.08) = 4.4827$; $var_F(-0.02) = +0.0896$

5. Conte possiede una rendita posticipata formata da 4 rate trimestrali di importo $R = 800$. Determinare la duration in $t = 0$ sapendo che il tasso di interesse annuo é $i = 0.10$. Determinare inoltre la variazione relativa attraverso il polinomio di Taylor di primo ordine se il tasso passa da $i = 0.10$ a $i' = 0.11$.
   Soluzione: $i_{\frac{1}{4}} = 0.0241; dur(0, 0.0241) = 2.4702$ trimestri, ossia 0.61755 anni; $\delta_1 = \ln(1.10) = 0.0953$; $\quad \delta_2 = \ln(1.11) = 0.1043$; $\quad var \approx -0.61755 \cdot 0.009 = -0.0055$

6. ZARA possiede un portafoglio formato da $n = 20$ titoli a cedola nulla (valore nominale di ognuno 80 euro) con scadenza $t = 2$ (tempo espresso in anni), e 30 BTP con scadenza $t = 3$ (valore nominale di ognuno 100 euro) che paga cedole annuali posticipate al tasso $i = 0.07$ e valore di rimborso pari a 110. Determinare la duration di tale portafoglio utilizzando il tasso istantaneo $\delta = 0.05$.
   Soluzione: $dur(0.05) = \frac{1 \cdot 210 \cdot e^{-0.05} + 2 \cdot 1810 \cdot e^{-0.10} + 3 \cdot 3\,510 \cdot e^{-0.15}}{210 \cdot e^{-0.05} + 1810 \cdot e^{-0.10} + 3\,510 \cdot e^{-0.15}} = 2.58$ anni.

7. R. Poggi riceve un finanziamento in $t = 0$ pari a 500 euro che dovrá restituire pagando due rate di importo $3R$ in $t = 1$ e $2R + 200$ in $t = 2$. Determinare
   (a) I valori di R affinché l'operazione finanziaria abbia un TIR positivo (applicando il Teorema di Norstrom);
   (b) Il TAEG nel caso in cui $R = 75$, le spese di apertura pratica in $t = 0$ sono di 50 euro e quelle di riscossione delle rate in $t = 1$ e $t = 2$ sono di 20 euro.

   Soluzione: Trattandosi di un finanziamento occorre che $-2R < 0 \iff R > 0$; $-2R - 200 < 0 \iff R > -100$; $500 - 3R - 2R - 200 < 0 \iff R > 60$ quindi $R > 60$. TAEG=21.89%.

8. Nero possiede una rendita posticipata formata da 5 rate semestrali di importo $R = 500$. Determinare la duration sapendo che il tasso di interesse annuo é $i = 0.12$. Determinare inoltre la variazione relativa attraverso il polinomio di Taylor di primo ordine se il tasso passa da $i = 0.12$ a $i' = 0.10$.

   Soluzione: $dur = 1.44$ anni; $var = +0.0259$.

9. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 300 euro al tempo $t = 1$, euro 600 al tempo $t = 4$, euro 100 al tempo $t = 5$ (tempo espresso in anni). Calcolare la duration di F utilizzando il tasso istantaneo di valutazione $\delta = 0.05$. Determinare inoltre la variazione relativa sapendo che la variazione del tasso $d\delta = -0.01$.

   Soluzione: $dur(0; 0.05) = 3.08$; $\quad var(-0.01) \approx +0.0308$

10. Un individuo possiede nel suo portafoglio F formato in questo modo: $n_1 = 20$ BOT che scadono tra 6 mesi il cui valore di rimborso unitario é 90; $n_2 = 50$ BOT che scadono tra

12 mesi il cui valore di rimborso unitario é 95; $n_3 = 40$ BOT che scadono tra 18 mesi il cui valore di rimborso unitario é 105. Calcolare la duration di F utilizzando il tasso annuo istantaneo di valutazione $\delta = 0.07$. Determinare inoltre la variazione relativa sapendo che la variazione del tasso $d\delta = +0.02$.
Soluzione: $dur(0; 0.07) = 1.10$ anni; $var(+0.02) \approx -0.022$

11. Si consideri una operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 100 euro al tempo $t = 2$, euro 200 al tempo $t = 4$, euro 300 al tempo $t = 6$ (tempo espresso in anni). Calcolare la duration di F utilizzando il tasso istantaneo di valutazione $\delta = 0.08$. Determinare inoltre la variazione relativa sapendo che la variazione del tasso $d\delta = -0.02$.
Soluzione: $dur_F(0.08) = 4.4827; \quad var_F(-0.02) = +0.0896$

Capitolo 5

Teoria del portafoglio finanziario

5.1 Richiami di Probabilitá

Definizione 20 *Sia Ω un insieme non vuoto detto **spazio campionario**, ossia l'insieme degli stadi della natura di un fenomeno. Sia inoltre $\mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di Ω (**eventi**).*
Diremo che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é una σ-algebra o una tribú su Ω se:

1. *$\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$;*
2. *$\forall\, B \in \mathcal{A}$ allora $\bar{B} \in \mathcal{A}$ con $\bar{B}$ complementare di B rispetto a Ω;*
3. *Per ogni successione $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots \in \mathcal{A}$, allora:*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}; \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A};$$

La coppia $(\Omega, \mathcal{A})$ si definisce **spazio misurabile**.

Definizione 21 *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Una probabilitá P é una funzione che ad ogni elemento di mathcalA (evento) associo un numero tra $[0, 1]$:*

$$P : \mathcal{A} \to [0, 1] \tag{5.1}$$

tale che:

1. *$P(\Omega) = 1$ (probabilitá dell'evento certo);*
2. *$\forall\, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, ossia $B_i \cap B_j = \emptyset$ con $i \neq j$, allora:*

$$P\left(\bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n)$$

Definizione 22 *La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si definisce **spazio di probabilitá.***

Definizione 23 (Evento unione)
Siano $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ *con* $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ *(disgiunti) allora:*

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$$

altrimenti, se $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$*, allora:*

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$$

Definizione 24 (Probabilitá condizionata)
Siano $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$*. Si definisce probabilitá condizionata di* B_1 *al verificarsi di* B_2*:*

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} \rightarrow P(B_1 \cap B_2) = P(B_1|B_2) \cdot P(B_2)$$

Definizione 25 (Eventi indipendenti)
Siano $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$*. Diremo che* B_1 *e* B_2 *sono indipendenti se:*

$$P(B_1|B_2) = P(B_1)$$

e quindi avremo che:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2)$$

5.1.1 Variabili aleatorie finite

Definizione 26 (Variabile aleatorie) *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *uno spazio di probabilitá. Si definisce* X ***variabile aleatoria*** *una fuzione che:*

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$*, l'insieme* $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}$

Osservazione 11 *Possiamo osservare che se* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$*, allora ogni funzione*

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

é una variabile aleatoria.

Definizione 27 (Variabile aleatorie discreta)
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *uno spazio di probabilitá. Diremo che una variabille aleatoria é finita se:*

$$X(\Omega)$$

é un insieme finito. Sia X *una variabile aleatoria finita e sia* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$*.*
Una variabile aleatorio si dice ***discreta*** *se assume un numero finito o infinitamente numerabile di determinazioni e indicheremo con*

$$p_k = P(X = x_k) = P(\omega; X(\omega) = x_k)$$

La variabile aleatoria discreta si puó quindi indicare come $X = \{(x_k, p_k)\}$ o anche come:

$$X = \begin{cases} x_1 & p_1 \\ x_2 & p_2 \\ ... & .. \\ x_n & p_n \end{cases}$$

Definizione 28 (Funzione di ripartizione)
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilitá. Sia X una variabile aleatorioa. La funzione:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

tale che

$$F_X(t) = P\{X \leq t\}; \quad \forall\, t \, \in \mathbb{R}$$

*si chiama **funzione di ripartizione** di X.*

Ogni funzione di ripartizione di una variabile aleatorio discreta presente le seguenti proprietá:

- Crescente;
- $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0; \quad \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$
- Continua a destra: $\lim_{t \to x_i^+} F_X(t) = F_X(x_i)$

5.1.2 Valore atteso, Varianza e coefficiente di correlazione

Definizione 29 (Valore atteso)
Sia X una variabile aleatoria discreta. Si definisce valore atteso di X e si indica con $E[X]$ la quantitá:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

Proposizione 1 *Siano X, Y due variabili aleatorio e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:*

- *$E[aX] = aE[X]$;*
- *$E[a] = a$;*
- *$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$*

Definizione 30 (Variabili aleatorio indipendenti) .
Siano X e Y due variabili aleatorio. Diremo che X e Y sono indipendenti se per ogni S_1 e S_2 sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ si ha:

$$P(X \, \in \, S_1, Y \, \in \, S_2) = P(X \, \in \, S_1) \cdot P(Y \, \in \, S_s)$$

Proposizione 2 *Siano X e Y due variabili aleatorio indipendenti. Allora:*

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Definizione 31 (Varianza e scarto quadratico medio)
*Sia X una variabile aleatorio. Sia $\mu = E[X]$. Si definisce **varianza** di X e si denota con $var[X]$ o σ_X^2, la media degli scarti al quadrato dal valor medio μ, ossia:*

$$\sigma_X^2 = var[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2 p_k$$

*Si chiama **scarto quadratico medio** o deviazione standard di X la quantitá:*

$$\sigma_X = \sqrt{var[X]}$$

Osservazione 12 *Si puó dimostrare che*

$$var[X] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Infatti, applicando la definizione di varianza si ottiene:

$$\begin{aligned} var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Definizione 32 (Covarianza e coefficiente di correlazione)
Siano X e Y due variabili aleatorie. Sia $\mu_X = E[X]$ e $\mu_Y = E[Y]$. Si definisce covarianza di X e Y e si denota con $Cov[X, Y]$ il valore atteso del prodotto degli scarti rispetto ai valor medi ossia la quantitá:

$$E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Si definisce coefficiente di correlazione di X e Y e si indica con $\rho_{X,Y}$ la quantitá:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Proposizione 3 *Siano X e Y due variabili aleatorie. Allora*

$$\rho_{X,Y} \in [-1, +1]$$

Inoltre, se X e Y sono indipendenti, allora

$$\rho_{X,Y} = 0$$

Osservazione 13 *Siano X e Y due variabili aleatorie. Allora:*

$$var[X] = Cov[X, X]$$

Proposizione 4 *Siano X e Y due variabili aleatorie e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora*

1.
$$var[aX] = a^2 var[X];$$

2.
$$var[X+Y] = var[X] + var[Y] + 2Cov[X,Y];$$

3.
$$Cov[aX, bY] = a\,b\,Cov[X,Y]$$

ossia
$$var[X+Y] = var[X] + var[Y] + 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y;$$

4.
$$var[aX+bY] = a^2 var[X] + b^2 var[Y] + 2ab\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y;$$

Infatti per la 4)

$$var[aX+bY] = Cov[aX+bY, aX+bY] = Cov[aX, aX] + Cov[bY, bY] + 2Cov[aX, bY]$$

da cui si ottiene che:

$$\begin{aligned} var[aX+bY] &= a^2 Cov[X,X] + b^2 Cov[Y,Y] + 2abCov[X,Y] \\ &= a^2 var[X] + b^2 var[Y] + 2ab\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y \end{aligned}$$

5.2 Applicazioni alla Finanza: Teoria del portafoglio finanziario con due titoli rischiosi

Supponiamo che il mercato sia strutturato su un periodo unitario (ad esempio anno), definito anche mercato uniperiodale con due titoli rischiosi A e B. Indichiamo con π_0^A e π_0^B i prezzi delle azioni A e B all'istante iniziale $t_0 = 0$ e con X_1^A e X_1^B i prezzi all'istante finale $t_1 = 1$. Poichè tali prezzi non sono noti all'istante inziale, allora X_1^A e X_1^B rappresenta una variabile aleatoria con diverse quotazioni con una distribuzione di probabilità:

$$X_1^A = \begin{cases} \pi_1^A & p_1 \\ \pi_2^A & p_2 \\ \dots & \\ \pi_n^A & p_n \end{cases} ; \qquad X_1^B = \begin{cases} \pi_1^B & p_1 \\ \pi_2^B & p_2 \\ \dots & \\ \pi_n^B & p_n \end{cases}$$

La differenza $X_1^A - \pi_0^A$ e $X_1^B - \pi_0^B$ rappresentano l'incremento aleatorio ottenuto acquistando le azioni e il rapporto con i prezzi iniziali rappresentano i rendimento aletori che denoteremo con I_A e I_B:

$$I_A = \frac{X_1^A - \pi_0^A}{\pi_0^A} = \begin{cases} r_1^A = \frac{\pi_1^A - \pi_0^A}{\pi_0^A} & p_1 \\ r_2^A = \frac{\pi_2^A - \pi_0^A}{\pi_0^A} & p_2 \\ \dots & \\ r_n^A = \frac{\pi_n^A - \pi_0^A}{\pi_0^A} & p_n \end{cases} ; \quad I_B = \frac{X_1^B - \pi_0^B}{\pi_0^B} = \begin{cases} r_1^B = \frac{\pi_1^B - \pi_0^B}{\pi_0^A} & p_1 \\ r_2^B = \frac{\pi_2^B - \pi_0^B}{\pi_0^A} & p_2 \\ \dots & \\ r_n^B = \frac{\pi_n^B - \pi_0^B}{\pi_0^A} & p_n \end{cases}$$

Quindi, per il titoli azionari A e B possiamo costruirci due variabili aleatorie I_A e I_B che denotano i possibili rendimenti con una distribuzione di probabilià. Di queste variabili aleatorie I_A e I_B possiamo calcolare due indici fondamentali:

- il **valore medio** che denoteremo con μ_A e μ_B (rispettivamente) che esprime il rendimento medio atteso, ossia

$$\mu_A = E[I_A] = \sum_{k=1}^{n} r_k^A \cdot p_k; \quad \mu_B = E[I_B] = \sum_{k=1}^{n} r_k^B \cdot p_k;$$

- la **varianza** (che denoteremo con σ_A^2 e σ_B^2) oppure lo **scarto quadratico medio** (che denoteremo con σ_A) che esprime la rischiosità del titolo azionario A e B, ossia

$$\sigma_A^2 = var[I_A] = \sum_{k=1}^{n} (r_k^A - \mu_A)^2 \cdot p_k; \quad \sigma_A = \sqrt{var[I_A]}$$

$$\sigma_B^2 = var[I_B] = \sum_{k=1}^{n} (r_k^B - \mu_B)^2 \cdot p_k; \quad \sigma_B = \sqrt{var[I_B]}$$

Supponiamo che l'individuo disponga di un capitale C pari a 1 € e denotiamo con α la quantità del capitale investita in A e simmetricamente, con $1 - \alpha$ la quantità investita in B. Denotiamo con μ_a e μ_B i rendimenti attesi di A e B rispettivamente, e con σ_A e σ_B lo scarto quadratico medio sempre di A e B. Inoltre, per dare significatività al modello suppiamo che ad un rendimento atteso più alto sia associata una rischiosità più elevata e quindi supponiamo che esista tra i titoli A e B la seguente relazione:

$$\mu_A < \mu_B; \quad \sigma_A < \sigma_B \tag{5.2}$$

Supponiamo che l'investitore disponga di un capitale unitario da investire. Denoteremo con α la quantità del capitale investita in A e simmetricamente, con $1 - \alpha$ la quantità investita in B. A questo punto possiamo analizzare due casi:

1. **Sul mercato non si possono effettuare vendite allo scoperto:** in questa ipotesi, l'investitore non potrà vendere titoli azionari di cui non dispone e quindi α deve essere necessariamente compresa tra 0 e 1, ossia $\alpha \in [0, 1]$. Nel caso particolare in cui $\alpha = 0$ significa che l'investitore non acquista nulla del titolo A ma investe tutto il suo capitale in B, ossia $1 - \alpha = 1$. Reciprocamente, se $\alpha = 1$ investe tutto in A e nulla in B. Nei casi intermedi $\alpha \in]0, 1[$ investe sia in A che in B.

2. **Sul mercato si possono effettuare vendite allo scoperto:** in questa situazione, l'investitore potrà vendere allo scoperto il titolo A, ossia finanziarsi con la vendita di A che significa detenere quantità negativa di A ($\alpha < 0$), con lo scopo di investire in B una ricchezza maggiore di uno, ossia $1 - \alpha > 1$. Reciprocamente, se $\alpha > 1$ significa che $1 - \alpha < 0$ e quindi si vende allo scoperto B per acquistare una quantità di A maggiore di uno.

Dopo avere analizzato queste due situazioni, supponiamo che sul mercato venga creato un portafoglio P formato da una percentuale α dell'azione A e una percentuale $1-\alpha$ di B:

$$P = \alpha A + (1-\alpha)B \tag{5.3}$$

e il suo rendimento sará una variabile aleatoria formata dai rendimenti di A e B:

$$I_P = \alpha I_A + (1-\alpha)I_B$$

Per il portafoglio P possiamo calcolare il rendimento atteso:

$$\begin{aligned} \mu_p = E[I_P] &= E[\alpha I_A + (1-\alpha)I_B] \\ &= \alpha E[I_A] + (1-\alpha)E[I_B] \\ &= \alpha\mu_A + (1-\alpha)\mu_B \end{aligned} \tag{5.4}$$

L'operatore potrebbe voler conoscere come varia il rendimento del portafoglio al variare di α. Raggruppando l'equazione (5.4) in funzione di α otteniamo che il rendimento atteso è una funzione lineare di α:

$$\mu_P = \alpha(\mu_A - \mu_B) + \mu_B \tag{5.5}$$

dove $\mu_A - \mu_B < 0$ dalla condizione (5.2).

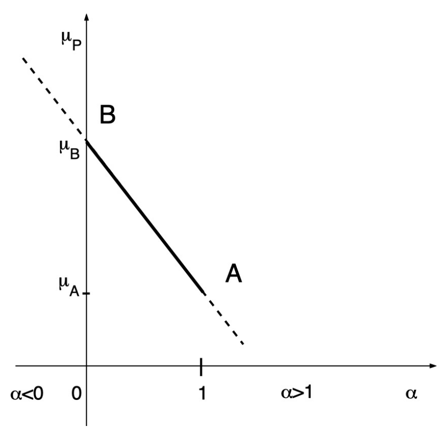


Figura 5.1: Rendimento portafoglio P

Possiamo notare dalla Fig. (5.1) come, nell'ipotesi in cui non siano ammissibili vendite allo scoperto, il massimo rendimento si ottiene investendo tutto il capitale nel titolo B, ossia per $\alpha = 1$ mentre il minimo rendimento si ottiene investendo tutto in A e quindi $\alpha = 0$. Ovviamente, se sono ammissibili le vendite allo scoperto, l'investitore può aumentare il rendimento atteso oltre μ_B vendendo allo scoperto il titolo A, e quindi $\alpha < 0$, trovandosi nella linea trattegiata sinistra.
Lo scarto quadratico medio del portafoglio P si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = Var[P] &= Var[\alpha I_A + (1-\alpha)I_B] \\ &= \alpha^2 Var[I_A] + (1-\alpha)^2 Var[I_B] + 2\alpha(1-\alpha)Cov[I_A, I_B] \\ &= \alpha^2\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_A\sigma_A \end{aligned} \tag{5.6}$$

dove $\rho \in [-1, +1]$ rappresenta il coefficiente di correlazione definito come il rapporto tra la covarianza e il prodotto degli scarti quadratici medi:

$$\rho = \frac{Cov[I_A, I_B]}{\sigma_A\sigma_B}$$

e la covarianza è il valor medio del prodotto degli scarti rispetto alla media:

$$Cov[I_A, I_B] = E[(I_A - \mu_A)(I_B - \mu_B)]$$

Se abbiamo due titoli azionari con $Cov[I_A, I_B] > 0$ significa che le quotazioni dei due titoli si muovono nella stessa direzione, ossia se la quotazione di uno aumenta anche l'altra tende ad aumentare e viceversa. Mentre se la $Cov[I_A, I_B] < 0$, implica che ad un aumento della quotazione di un titolo si ha una diminuzione dell'altro titolo.
Possiamo sviluppare l'equazione (5.6) e raggrupparla rispetto ad α:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B)\alpha^2 + (2\rho\sigma_A\sigma_B - 2\sigma_B^2)\alpha + \sigma_B^2 \tag{5.7}$$

che possiamo riscrivere come:

$$\sigma_P^2 = a\alpha^2 + b\alpha + c \tag{5.8}$$

dove

$$a = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B; \quad b = 2\rho\sigma_A\sigma_B - 2\sigma_B^2; \quad c = \sigma_B^2$$

Nel piano (α, σ^2), l'espressione (5.8) rappresenta l'equazione di una parabola. Possiamo notare come il coefficiente a è dato dalla somma di due quantità positive, ossia σ_A^2 e σ_B^2 e da una quantità che può essere negativa se $\rho > 0$. In particolare, a raggiunge il suo minimo quando $\rho = +1$ (si osservi che $\rho \in [-1, +1]$). Quindi, nel caso in cui $\rho = +1$, il coefficiente a diventa:

$$a = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B = (\sigma_B - \sigma_A)^2 > 0$$

e possiamo affermare che a è sempre positivo e quindi la parabola ha la concavità verso l'alto.
L'investitore potrebbe essere interessato a determinare la quantità α^* da investire nei due titoli A e B per **minimizzare la varianza, ossia il rischio**. Il minimo si ottiene ponendo pari a zero la derivata prima della funzione (5.8) (diventa condizione sufficiente in quanto la funzione ha la concavità verso l'alto):

$$\frac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = 2a\alpha + b = 0$$

da cui

$$\alpha^* = -\frac{b}{2a} = \frac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B} \tag{5.9}$$

Si osservi che $\alpha^* = -\dfrac{b}{2a}$ è anche il vertice della parabola che corrisponde al punto di minimo. Possiamo notare che

$$\alpha^* \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B} \geq 0 \Leftrightarrow (\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \leq \frac{\sigma_B}{\sigma_A}$$

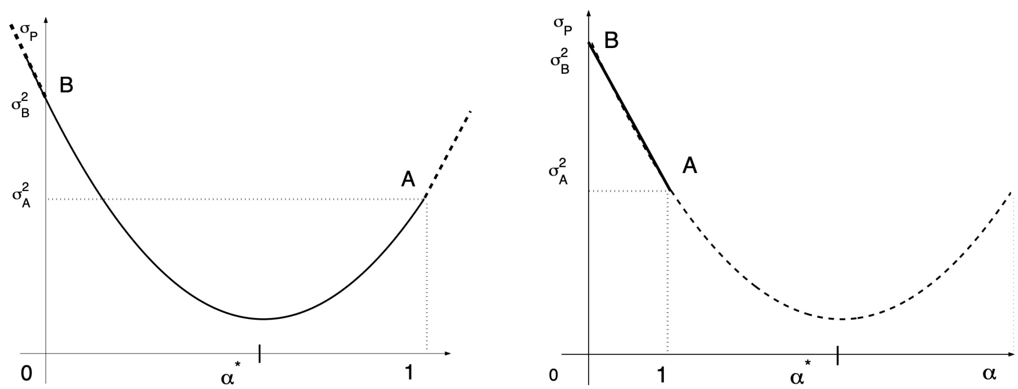
in quanto in denominatore di α^*, ossia a è sempre positivo. Osserviamo come, poichè per ipotesi $\sigma_A < \sigma_B$ avremo che $\frac{\sigma_B}{\sigma_A} > 1$, quindi ρ sarà sempre minore di $\frac{\sigma_B}{\sigma_A}$ e possiamo affermare che l'ipotesi $\alpha^* \geq 0$ è sempre vera.
Possiamo inoltre osservare come:

$$\alpha^* \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_A^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B)} \geq 0 \Leftrightarrow \rho \leq \frac{\sigma_A}{\sigma_B}$$

dove $\dfrac{\sigma_A}{\sigma_B} \in]0, 1[$. Quindi possiamo distinguere due casi per individuare la composizione del portafoglio di minima varianza α^*:

1. Caso $\rho \leq \dfrac{\sigma_A}{\sigma_B}$: in questa situazione abbiamo che $\alpha^* \in [0,1]$ e quindi il portafoglio di minima varianza si ottiene senza effettuare vendite allo scoperto, ed occorre investire una percentuale α^* nel titolo A e una percentuale $1-\alpha^*$ in B. Da un punto di vista geometrico, il vertice della parabola si trova tra i titoli A e B, come illustrato nella Fig. 5.2(a). Quindi è sempre possibile costruire portafogli diversificati, ossia contenenti sia il titolo A che B che sono meno rischiosi di quanto si otterrebbe detenendo uno solo dei due titoli. La copertura del rischio dipende dal coefficiente di correlazione ρ. Infatti nel caso $\rho = -1$ (che verrá analizzato successivamente) si riesce ad ottenere un portafoglio con rischio nulla e quindi una copertura totale del rischio.

2. Caso $\rho > \dfrac{\sigma_A}{\sigma_B}$. In questo caso risulta che $\alpha^* > 1$ e quindi il portafoglio di minimia varianza si ottiene attraverso le vendite allo scoperto, ossia si vende allo scoperto il titolo più rischioso B e si investe in A un capitale $\alpha^* > 1$. In questa situazione, è possibile costruire un portafoglio la cui varianza è inferiore a quella che si otterrebbe detenendo solo uno dei due titoli, come illustrato nella Fig. 5.2(b). Se invece nel mercato non sono ammissibili vendite allo scoperto, allora poichè α deve appartenere tra 0 e 1, il portafoglio di minima varianza si ottiene con $\alpha^* = 1$, ossia investendo tutto in A.



(a) Caso $\rho \leq \frac{\sigma_A}{\sigma_B}$ (b) Case $\rho > \frac{\sigma_A}{\sigma_B}$

Figura 5.2: Varianza del portafoglio P

Dopo aver determinato α^*, si può sostituire tale valore nella formula (5.5) per determinare il rendimento atteso del portafoglio di minima varianza, ossia μ_P^* e nell'espressione (5.6) per determinare la varianza minima $(\sigma_P^2)^*$.
Possiamo riassumere quindi che:

$$\alpha^* = \min_{\alpha} \sigma_P^2 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho\sigma_A\sigma_B} & \text{se} \quad \rho \leq \dfrac{\sigma_A}{\sigma_B} \quad \text{con o senza vendite allo scoperto} \\[2ex] \dfrac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho\sigma_A\sigma_B} & \text{se} \quad \rho > \dfrac{\sigma_A}{\sigma_B} \quad \text{con vendite allo scoperto} \\[2ex] 1 & \text{se} \quad \rho > \dfrac{\sigma_A}{\sigma_B} \quad \text{senza vendite allo scoperto} \end{cases}$$

5.2.1 Casi particolari

Ovviamente, le caratteristiche del portafoglio P dipendono dal valore del coefficiente di correlazione. In questo paragrafo, analizzeremo alcuni casi particolari in base al valore di $\rho = 0$, $\rho = -1$ e $\rho = +1$.

Titoli non correlati $\rho = 0$

Se la covarianza tra il rendimento del titolo A e B è nulla, abbiamo che $\rho = 0$ e quindi l'ipotesi $\rho \leq \frac{\sigma_A}{\sigma_B}$ è sempre verificata. In modo particolare otteniamo che:

$$\alpha^* = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}; \quad 1 - \alpha^* = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

e quindi sostituendo tali espressioni nella formula (5.6) otteniamo la varianza minima:

$$(\sigma_P^2)^* = \left(\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}\right)^2 \sigma_B^2 = \frac{\sigma_A^2 \sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

Titoli perfettamente correlati positivamente $\rho = +1$.

In questo caso abbiamo che $\rho = +1$ e quindi ci troviamo nella situazione $\rho > \dfrac{\sigma_A}{\sigma_B}$. Per determinare il portafoglio di minima varianza occorre fare attenzione se sul mercato sono o meno ammissibili vendite allo scoperto. Quando $\rho = +1$ otteniamo che:

$$\alpha^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B} = \frac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A} > 1$$

poichè $\sigma_B > \sigma_B - \sigma_A$ e la formula (5.6) della varianza, nel caso in cui $\rho = +1$ diventa:

$$\sigma_P^2 = [\alpha\sigma_A + (1-\alpha)\sigma_B]^2$$

In modo particolare

$$\sigma_P^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\sigma_A + (1-\alpha)\sigma_B = 0 \Leftrightarrow \alpha^* = \frac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A}$$

In conclusione, se il mercato consente le vendite allo scoperto, si acquista la quantità $\alpha^* = \dfrac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A} > 1$ e si ottiene un portafoglio con varianza nulla, ossia $(\sigma_P^2)^* = 0$. Se non si possono fare vendite allo scoperto allora $\alpha^* = 1$, si investe tutto nel titolo A, e quindi la varianza del portafoglio sará $(\sigma_P^2)^* = \sigma_A^2$.

Titoli perfettamente correlati negativamente $\rho = -1$.

In questo caso $\rho = -1$ e quindi ci troviamo nel caso $\rho \leq \dfrac{\sigma_A}{\sigma_B}$. La quantità che minimizza la varianza α^* diventa:

$$\alpha^* = \frac{\sigma_B^2 + \sigma_A\sigma_B}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B)} = \frac{\sigma_B}{\sigma_B + \sigma_A}$$

e la quantità $\alpha \in [0,1]$. Inoltre, la formula (5.6) della varianza, nel caso in cui $\rho = -1$ diventa:

$$\sigma_P^2 = \alpha^2\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_A\sigma_B = [\alpha\sigma_A - (1-\alpha)\sigma_B]^2$$

In modo particolare, avremo che:

$$\sigma_P^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\sigma_A - (1-\alpha)\sigma_B \Leftrightarrow \alpha^* = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

In conclusione possiamo affarmare che, quando $\rho = -1$, è possibile comporre un portafoglio con rischio nullo senza effettuare vendite allo scoperto. Infine, la Fig. (5.3) riassume graficamente i tre casi che abbiamo analizzato.

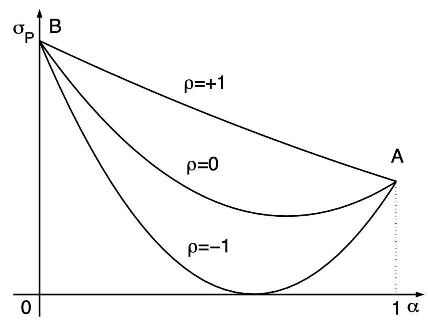


Figura 5.3: Rendimento portafoglio P

5.2.2 Portafoglio ammissibili e portafogli efficienti

Le analisi condotte sulla varianza del portafoglio sono utili per poter determinare i portafoglio efficienti. Infatti, dall'equazione (5.4), possiamo ottenere α in funzione del rendimento μ_P:

$$\alpha = \frac{\mu_P - \mu_B}{\mu_A - \mu_B} \tag{5.10}$$

e sostituire l'espressione (5.10) nella formula della varianza (5.6), in modo da ottenere una espressione della varianza in funzione del rendimento. Tale espressione può essere rappresentata nel piano Media-Varianza (μ, σ^2) come una parabola con concavità verso l'alto, come illustrata nella Fig. (5.4). La parabola rappresenta l'insieme di tutti i portafoglio ottenibili in questo mercato elementare formato da due titoli rischiosi A e B e rappresenta quindi l'insieme delle opportunità. Naturalmente, se non sono ammissibili vendite allo scoperto, occorrerà considerare solo la parabola compresa tra il titolo A e B mentre, se sono ammissibili vendite allo scoperto, si può tenere conto di tutta la parabola, ossia della parte tratteggiata. Infine, la **frontiera efficiente** è composta dal ramo destro della parte di parabola che parte dal suo vertice (μ_P^*, σ_P^2*) ed è composta da portafogli che hanno un rendimento atteso maggiore di μ_P^*, ossia del rendimento del portafoglio di minima varianza. Quindi, fissato un livello di rischio σ^2, la frontiera efficiente è formata dai portafogli P che hanno un rendimento maggiore, e di conseguenza di trovano sul ramo destro della parabola.

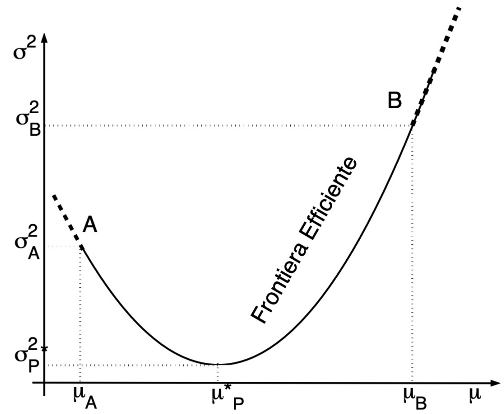


Figura 5.4: Portafogli ammissibili e Frontiere Efficiente

5.3 Esercizi di Riepilogo

1. *Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da rendimento medio, scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari ripettivamente a:* $\mu_A = 0.2, \quad \sigma_A = 1, \quad \mu_B = 0.4, \quad \sigma_B = 4, \quad \rho = -0.4$. *Si supponga che non sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale nel titolo A ed una percentuale $1-\alpha$ nel titolo B:*

   (a) *rappresentare nel piano media-varianza l'insieme dei portafogli ammissibili e la frontiera efficiente;*

   (b) *determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza;*

   (c) *determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di massimo rendimento.*

   Soluzione

   Il portafoglio P si ottiene ripartendo il proprio capitale tra i due titoli ed in particolar modo investendo un capitale pari ad α nel titolo A ed un capitale pari a $(1-\alpha)$ nel titolo B. Quindi:

   $$P = \alpha A + (1-\alpha)B$$

   Inoltre, poichè non sono ammesse vendite allo scoperto occorre che:

   $$0 \leq \alpha \leq 1$$

   Il rendimento medio μ_P del portafoglio P si ottiene calcolando il valor medio:

   $$\mu_P = E[I_P] = \alpha E[I_A] + (1-\alpha)E[I_B] = \alpha\mu_A + (1-\alpha)\mu_B \tag{5.11}$$

   Applicando i dati dell'esercizio all'equazione (5.11) si ottiene:

   $$\mu_P = 0.4 - 0.2\alpha$$

da cui si ottiene che:

$$\alpha = 2 - 5\mu_P \tag{5.12}$$

La varianza σ_P^2 del portafoglio P invece si ottiene:

$$\sigma_P^2 = Var[I_P] = \alpha^2\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B\rho\alpha(1-\alpha) \tag{5.13}$$

Applicando i dati dell'esercizio all'equazione (5.13) si ottiene che:

$$\sigma_P^2 = 20.2\alpha^2 - 35.2\alpha + 16 \tag{5.14}$$

Sostituendo l'espressione (5.12) nella (5.14) si ottiene la curva delle opportunitá, ossia l'insieme dei portafogli ammissibili:

$$\sigma_P^2 = 505\mu_P^2 - 228\mu_P + 26.4 \tag{5.15}$$

Per determinare le quantità da investire nei due titoli al fine di ottenere il portafoglio di minima varianza, si osservi che l'espressione (5.15) è l'equazione di una parabola con la concavità verso l'alto. Ponendo pari a zero la derivata prima di σ_P^2 rispetto a μ_P, otteniamo il rendimento μ_P^* del portafoglio di minima varianza:

$$\mu_P^* = \min_{\mu_P} \sigma_P^2 = \frac{d\sigma_P^2}{d\mu_P} = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 505\mu_P - 228 = 0 \Rightarrow \mu_P^* = \frac{228}{2\cdot 505} = 0.2257$$

Sostituendo il valore di $\mu_P^* = 0.2257$ nell'espressione (5.12) e (5.15) si ottengono rispettivamente la quantità α^* da investire per minimizzare la varianza e il valore della varianza minima $(\sigma_P^2)^*$:

$$\alpha^* = 2 - 5\cdot 0.2257 = 0.8715; \qquad (\sigma_P^2)^* = 0.6653$$

Dalla figura (5.5) si può notare come l'insieme dei **portafogli ammissibili** sia compreso nel tratto $A - B$ della parabola in quanto non sono ammesse vendite allo scoperto, mentre la **frontiera efficiente** è rappresentata dal tratto $V - B$.
Infine, per determinare il massimo rendimento, si tratta di determinare il massimo della retta $\mu_P = 0.4 - 0.2\alpha$. E' evidente che il massimo di tale retta si ha per $\alpha = 0$, quindi investendo tutto il capitale nel titolo B.

Osservazione 14 *La ricerca delle quantità da investire per minimizzare la varianza si può determinare anche utilizzando direttamente l'espressione (5.14) che rappresenta il legame tra la varianza e le quantità. Infatti, ponendo pari a zero la derivata prima di σ_P^2 rispetto a α, si ottiene che:*

$$\alpha^* = \min_{\alpha} \sigma_P^2 = \frac{d\sigma_P^2}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 20.2\alpha^* - 35.2 = 0 \Rightarrow \alpha^* = \frac{35.2}{2\cdot 20.2} = 0.8712$$

2. Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari ripettivamente a:

$$\sigma_A = 4, \quad \sigma_B = 9, \quad \rho = 0.7.$$

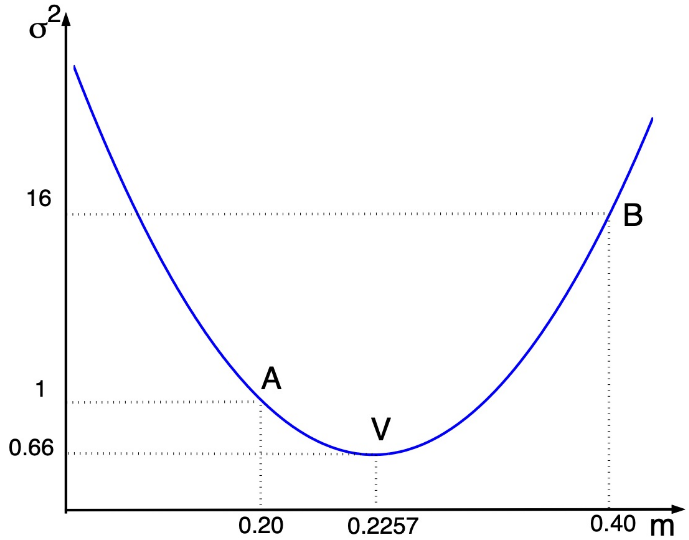


Figura 5.5: *Portafogli ammissibili e frontiera efficiente*

Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale nel titolo A ed una percentuale $1-\alpha$ nel titolo B, determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza. Considerare il caso in cui siano ammesse vendite allo scoperto.

Soluzione

La varianza del portafoglio si determina:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \cdot 16 + (1-\alpha)^2 \cdot 81 + 2\alpha(1-\alpha)4 \cdot 9 \cdot 0.7$$

Da cui si ottiene:

$$\sigma_p^2 = 46.6\alpha^2 - 111.6\alpha + 81$$

Poiché si tratta di una parabola con concavità verso l'alto, per determinare la quantità da investire per determinare la varianza minima occorre porre la derivata prima pari a zero:

$$\min_{\alpha} \sigma_p^2 = \frac{d\sigma_p^2}{d\alpha} = 93.2\alpha - 111.6 = 0 \Rightarrow \alpha^* = 1.1974$$

Quindi per miniminizzare la varianza occorre investire in A una quantità $\alpha^* = 1.1974$ e vendere allo scoperto B per una quantità $1-\alpha^* = -0.1974$.
Se si vuole ricavare la minima varianza $(\sigma_p^2)^*$ di tale portafoglio occorre sostiture il valore $\alpha^* = 1.80$ nella formula della varianza σ_p^2:

$$(\sigma_p^2)^* = 46.6 \cdot (1.1974)^2 - 111.6 \cdot (1.1974) + 81 = 14.18$$

Quindi investendo in A una quantità $\alpha^* = 1.19740$ si può ottenere un portafoglio con rischio $\sigma_p = \sqrt{14.18} = 3.76$. Si osservi che la rischiosità del portafoglio è inferiore ai titoli di partenza A e B.

Osservazione 15 *Se invece non fosse stato possibile fare vendite allo scoperto, allora* $\alpha^* = 1$ *e quindi investendo tutto in* A *la varianza minima sarebbe stata* $(\sigma_p^2)^* = \sigma_A^2 = 16$.

3. Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari ripettivamente a $\sigma_A = 2; \sigma_B = 3; \rho_{AB} = \rho$. Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale nel titolo A ed una percentuale $1 - \alpha$ nel titolo B determinare, al variare di $\rho \in [-1; 1]$, le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza. Si discuta poi in particolare il caso $\rho = -0.5$.

Svolgimento

La varianza del portafoglio è:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \cdot 4 + (1-\alpha)^2 \cdot 9 + 2\alpha(1-\alpha)2 \cdot 3 \cdot \rho$$

da cui si ottiene che:

$$\sigma_p^2 = (13 - 12\rho)\alpha^2 + (12\rho - 18)\alpha + 9$$

il cui punto di minimo è:

$$\alpha^* = \min_{\alpha} \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_p^2}{d\alpha} = 2\alpha(13 - 12\rho) + (12\rho - 18) = 0$$

da cui si ottiene

$$\alpha^* = \frac{18 - 12\rho}{2(13 - 12\rho)} = \frac{9 - 6\rho}{13 - 12\rho}$$

Poichè è possibile fare vendite allo scoperto allora non abbiamo nessuna limitazione su α^*. Nel caso particolare in cui $\rho = -0.5$ risulta che:

$$\alpha^* = \frac{9 - 6(\cdot - 0.5)}{13 - 12 \cdot (-0.5)} = \frac{12}{19} = 0.6315$$

e la varianza minima è:

$$(\sigma_p^2)^* = (13 - 12 \cdot -0.5)(0.6315)^2 + (12 \cdot (-0.5) - 18) \cdot 0.6315 + 9 = 1.42$$

Osservazione 16 *Se invece non fosse stato possibile fare vendite allo scoperto allora bisognava imporre che* $\alpha^* \in [0, 1]$ *e quindi, poichè il denominatore* $13 - 12\rho$ *è strettamente positivo per ogni valore di* $\rho \in [-1, 1]$ *risulta:*

$$\alpha^* \geq 0 \iff \frac{9 - 6\rho}{13 - 12\rho} \geq 0 \iff 9 - 6\rho \geq 0 \iff \rho \leq 1.5$$

Poichè $\rho \in [-1, 1]$ *allora* $\rho \leq 1.5$ *è sempre vera e quindi* $\alpha^* \geq 0$
Viceversa:

$$\alpha^* \leq 1 \iff \frac{9 - 6\rho}{13 - 12\rho} \leq 1 \iff \frac{6\rho - 4}{13 - 12\rho} \leq 0 \iff \rho \leq 0.\bar{6}$$

e quindi in conclusione affermiamo che $\alpha^* \in [0, 1] \iff \rho \in [-1, 0.\bar{6}]$

4. Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da rendimento medio, scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari ripettivamente a:

$$\mu_A = 0.1, \quad \sigma_A = 1, \quad \mu_B = 0.4, \quad \sigma_B = 2, \quad \rho = 0.5.$$

Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto.
Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale nel titolo A ed una percentuale $1-\alpha$ nel titolo B:

(a) rappresentare nel piano media-varianza l'insieme dei portafogli ammissibili e la frontiera efficiente;

(b) determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza;

(c) determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere un portafoglio di varianza 3.

Svolgimento

Determiniamo prima di tutto il rendimento atteso a la varianza del portafoglio in funzione di α:

$$\mu_p = 0.1\alpha + 0.4(1-\alpha) = 0.40 - 0.30\alpha$$

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 + 4(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\cdot 2\cdot 0.5 = 3\alpha^2 - 6\alpha + 4$$

Dal rendimento possiamo ricavare α in funzione di μ_p

$$\mu_p = 0.40 - 0.30\alpha \Rightarrow \alpha = 1.\bar{3} - 3.\bar{3}\mu_p$$

e sostituirla nella formula della varianza in modo da avere la relazione tra rischio e rendimento:

$$\sigma_p^2 = 3\alpha^2 - 6\alpha + 4 = 3(1.\bar{3} - 3.\bar{3}\mu_p)^2 - 6(1.\bar{3} - 3.\bar{3}\mu_p) + 4$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_p^2 = 33.\bar{3}\mu_p^2 - 6.\bar{6}\mu_p + 1.\bar{3}$$

Per disegnare tale parabola deteminiamo il punto di minimo, ossia:

$$\mu_p^* = \min_{\mu_p} \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_p^2}{d\mu_p} = 66.\bar{6}\mu - 6.\bar{6} = 0 \Rightarrow \mu_p^* = 0.1$$

Per determinare la quantità da investire sostituiamo μ_p^* nella formula:

$$\alpha = 1.\bar{3} - 3.\bar{3}\mu_p \Rightarrow \alpha^* = 1.\bar{3} - 3.\bar{3}\cdot 0.10 = 1$$

Quindi si investe tutto in A per minimizzare la varianza. Per determinare il valore della varianza minima (conicinde con $\sigma_A^2 = 1$ poichè si investe tutto in A) ottieniamo:

$$(\sigma_p^2)^* = 33.\bar{3}\cdot(0.10)^2 - 6.\bar{6}\cdot 0.10 + 1.\bar{3} = 1$$

L'insieme dei portafogli ammissibili è rappresentata da tutta la parabola (si possono fare vendite allo scoperto), mentre la frontiera efficiente parte dal vertice della parabola.
Per determinare la quantità da investire per ottenere un portafoglio di varianza $\sigma_p^2 = 3$ occorre risolvere la seguente equazione:

$$\sigma_p^2 = 4 \Rightarrow 3\alpha^2 - 6\alpha + 4 = 3 \Rightarrow 3\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $\alpha_1 = 0.1835$ ed $\alpha_2 = 1.8164$. Ovviamente entrambe le quantità hanno una varianza pari a 3, ma solo α_1 si trova sulla frontiera efficiente. Infatti i rendimenti saranno:

$$\mu_1 = 0.40 - 0.30 \cdot 0.1835 = 0.3449; \quad \mu_2 = 0.40 - 0.30 \cdot 1.8164 = -0.1449$$

e a parità di rischio si sceglie il portafoglio con rendimento maggiore.

5. Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da rendimento medio, scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari ripettivamente a:

$$\mu_A = 0.10; \quad \sigma_A = 1; \quad \mu_B = 0.20; \quad \sigma_B = 4; \rho_{AB} = -0.80$$

Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto.
Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale nel titolo A ed una percentuale $1 - \alpha$ nel titolo B:

(a) rappresentare nel piano media-varianza l'insieme dei portafogli ammissibili e la frontiera efficiente;

(b) determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza;

(c) determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere un portafoglio di rendimento medio del 28%.

Svolgimento

Determiniamo prima di tutto il rendimento atteso a la varianza del portafoglio in funzione di α:

$$\mu_p = 0.10\alpha + 0.20(1 - \alpha) = 0.20 - 0.10\alpha$$

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 + 16(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \cdot 4 \cdot -0.8 = 23.4\alpha^2 - 38.4\alpha + 16$$

Dal rendimento possiamo ricavare α in funzione di μ_p

$$\mu_p = 0.20 - 0.10\alpha \Rightarrow \alpha = 2 - 10\mu_p$$

e sostituirla nella formula della varianza in modo da avere la relazione tra rischio e rendimento:

$$\sigma_p^2 = 23.4\alpha^2 - 38.4\alpha + 16 = 23.4(2 - 10\mu_p)^2 - 38.4(2 - 10\mu_p) + 16$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_p^2 = 2340\mu_p^2 - 552\mu_p + 32.8$$

Per disegnare tale parabola deteminiamo il punto di minimo, ossia:

$$\mu_p^* = \min_{\mu_p} \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_p^2}{d\mu_p} = 4680\mu_p - 552 = 0 \Rightarrow \mu_p^* = 0.1179$$

Per determinare la quantità da investire sostituiamo μ_p^* nella formula:

$$\alpha = 2 - 10\mu_p \Rightarrow \alpha^* = 2 - 10 \cdot 0.1179 = 0.8210$$

Per determinare il valore della varianza minima, si sostituisce il valore $\mu_p^* = 0.8210$ ottenendo:

$$(\sigma_p^2)^* = 2340 \cdot (0.1179)^2 - 552 \cdot (0.1179) + 32.8 = 0.2461$$

L'insieme dei portafogli ammissibili è rappresentata da tutta la parabola (si possono fare vendite allo scoperto), mentre la frontiera efficiente parte dal vertice della parabola.
Per determinare la percentuale da investire per ottenere $\mu_p = 0.28$, occorre imporre che il rendimento del portafoglio sia pari a 0.28 e quindi:

$$\mu_p = 0.28 \iff 0.20 - 0.10\alpha = 0.28 \Rightarrow \alpha = 2 - 10 \cdot 0.28 = -0.8$$

Poichè sono ammissibili le vendite allo scoperto, occorre vendere allo scoperto il titolo A per un importo di -0.80 e investire in B una quantità pari a 1.80.

6. Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da rendimento medio, scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari ripettivamente a:

$$\mu_A = 0.10; \quad \sigma_A = 1; \quad \mu_B = 0.15; \quad \sigma_B = 2; \quad \rho_{AB} = \rho.$$

Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale nel titolo A ed una percentuale $1 - \alpha$ nel titolo B, determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza al variare di ρ.
Rappresentare nel piano media-varianza l'insieme dei portafogli ammissibili e la frontiera efficiente nel caso in cui $\rho = 0.3$;

Svolgimento

Determiniamo la varianza del portafoglio:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 + 4(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho \cdot 1 \cdot 2$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_p^2 = (5 - 4\rho)\alpha^2 + (4\rho - 8)\alpha + 4$$

e la quantità α^* che minimizza la varianza è:

$$\alpha^* = \min_{\alpha} \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_p^2}{d\alpha} = 2(5 - 4\rho)\alpha + (4\rho - 8) = 0$$

da cui:

$$\alpha^* = \frac{8 - 4\rho}{2(5 - 4\rho)} = \frac{4 - 2\rho}{5 - 4\rho}$$

Poichè non è possibile fare vendite allo scoperto, allora non abbiamo nessuna limitazione su α^*.

Nel caso in cui $\rho = 0.30$, dobbiamo disegnare nel piano media-varianza l'insieme dei portafogli efficienti. Quindi:

$$\mu_p = \alpha\mu_A + (1 - \alpha)\mu_B = 0.10\alpha + 0.15(1 - \alpha) = 0.15 - 0.05\alpha$$

Da questa formula possiamo ricavare l'espressione di α in funzione di μ_p, ossia:

$$\mu_p = 0.15 - 0.05\alpha \Rightarrow \alpha = 3 - 20\mu_p$$

mentre la varianza è:

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 + 4(1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \cdot 0.3 \cdot 1 \cdot 2$$

che dopo alcuni passaggi possiamo scrivere come:

$$\sigma_p^2 = 3.8\alpha^2 - 6.8\alpha + 4$$

e sostituendo l'espressi di $\alpha = 3 - 20\mu_p$ nella formula della varianza otteniamo:

$$\sigma_p^2 = 3.8(3 - 20\mu_p)^2 - 6.8(3 - 20\mu_p) + 4$$

ossia

$$\sigma_p^2 = 1520\mu_p^2 - 320\mu_p + 17.8$$

Determiniamo il rendimento del portafoglio di minima varianza:

$$\mu_p^* = \min_{\mu_p} \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_p^2}{d\mu_p} = 3040\mu_p - 320 = 0$$

da cui si ottiene che:

$$\mu_p^* = 0.1052$$

e sostituendo tale espressione nella formula della varianza si ottiene la varianza minima:

$$(\sigma_p^2)^* = 1520 \cdot (0.1052)^2 - 320 \cdot 0.1052 + 17.8 = 0.9579$$

La quantità da investire è:

$$\alpha^* = 3 - 20 \cdot 0.1052 = 0.896$$

o in maniera analoga sostituendo $\rho = 0.30$ in $\alpha^* = \dfrac{4 - 2\rho}{5 - 4\rho} = 0.8947$ (a meno di qualche approssimazione).

7. Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a $\sigma_A = 2$, $\sigma_B = 4$, $\rho_{AB} = \rho$. Si supponga che non sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale nel titolo A ed una percentuale $1 - \alpha$ nel titolo B, determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza al variare di ρ.

Svolgimento

Determiniamo la varianza del portafoglio:

$$\sigma_p^2 = 4\alpha^2 + 16(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho \cdot 2 \cdot 4$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_p^2 = (20 - 16\rho)\alpha^2 + (16\rho - 32)\alpha + 16$$

e la quantità α^* che minimizza la varianza è:

$$\alpha^* = \min_\alpha \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_p^2}{d\alpha} = 2(20 - 16\rho)\alpha + (16\rho - 32) = 0$$

da cui:

$$\alpha^* = \frac{32 - 16\rho}{2(20 - 16\rho)} = \frac{4 - 2\rho}{5 - 4\rho}$$

Poichè non è possibile fare vendite allo scoperto, bisogna porre che $\alpha^* \in [0, 1]$. Si osservi che il denominatore $5 - 4\rho$ è sempre positivo $\forall\, \rho \in [-1, +1]$ e quindi ossia:

$$\alpha^* \geq 0 \iff \frac{4 - 2\rho}{5 - 4\rho} \geq 0 \iff 4 - 2\rho \geq 0 \iff \rho \leq 2$$

Poichè $\rho \in [-1, +1]$ allora $\alpha^* \geq 0$. Inoltre:

$$\alpha^* \leq 1 \iff \frac{4 - 2\rho}{5 - 4\rho} - 1 \leq 0 \iff \frac{2\rho - 1}{5 - 4\rho} \leq 0 \iff \rho \leq \frac{1}{2}$$

Conclusione abbiamo che:

$$\alpha^* = \min_\alpha \sigma_p^2 = \begin{cases} \dfrac{4 - 2\rho}{5 - 4\rho} & \text{se} \quad \rho \leq \frac{1}{2} \\ \\ 1 & \text{se} \quad \rho > \frac{1}{2} \end{cases}$$

8. Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi A e B caratterizzati da rendimento medio, scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a:$\sigma_A = 2$; $\sigma_B = 5$; $\rho_{AB} = \rho$. Si supponga che non sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale α del proprio capitale C nel titolo A ed una percentuale $1 - \alpha$ nel titolo B dire per quale valore del coefficiente di correlazione si ottiene il portafoglio di minima varianza investendo $\frac{9}{10}$ nel titolo A e $\frac{1}{10}$ nel titolo B.

Svolgimento

Determiniamo la varianza del portafoglio:

$$\sigma_p^2 = 4\alpha^2 + 25(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho \cdot 2 \cdot 5$$

da cui si ottiene:

$$\sigma_p^2 = (29 - 20\rho)\alpha^2 + (20\rho - 50)\alpha + 25$$

e la quantità α^* che minimizza la varianza è:

$$\alpha^* = \min_{\alpha} \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_p^2}{d\alpha} = 2\alpha(29 - 20\rho) + (20\rho - 50) = 0$$

da cui:

$$\alpha^* = \frac{50 - 20\rho}{2(29 - 20\rho)} = \frac{25 - 10\rho}{29 - 20\rho}$$

Poichè la quantità che minimizza la varianza $\alpha^* = \frac{9}{10}$, sostituendo tale valore nella formula precedente otteniamo il valore del coefficiente di correlazione richiesto:

$$0.90 = \frac{25 - 10\rho}{29 - 20\rho} \Rightarrow \frac{8\rho - 11}{29 - 20\rho} = 0 \Rightarrow \rho = 0.1375$$

Quindi quando $\rho = 0.1375$ si ottiene un portafoglio di minima varianza investendo $\alpha^* = 0.90$ nel titolo A e la varianza minima è $(\sigma_p^2)^* = 3.7375$