

**Prova scritta di Matematica Finanziaria -Università di Bari**  
**a.a. 2022-2023 - 20 Dicembre 2023 - Traccia B**

---

PRIMO CFU

Un individuo deposita un capitale  $C$  in banca al tasso trimestrale  $i_{\frac{1}{4}}$  in regime di interesse semplice (RIS) per 10 trimestri. Determinare il tasso  $i_{\frac{1}{4}}$  per ottenere un montante pari a  $M_1 = 2C$ . Tale montante viene reinvestito in regime di interesse composto (RIC) al tasso trimestrale  $i_{\frac{1}{4}}$  ricavato precedentemente. Determinare dopo quanto tempo si ottiene un interesse  $I = 0.5C$ .

---

SECONDO CFU

Un individuo prende in prestito la somma  $S$  da restituire con quattro rate ai tempi  $t = 1, 2, 3, 4$  (tempo espresso in semestri). Sapendo che le rate sono:  $R_1 = 4250$ ;  $R_2 = 3500$ ;  $R_3 = \frac{R_1 + R_2}{2}$ ;  $R_4 = 2R_2$  e che il tasso annuale convertibile semestralmente è  $j(2) = 0.08$ , stilare il piano di ammortamento.

---

TERZO CFU

Un individuo dispone di due opportunità di finanziamento:

- 1) Riceve  $2.5x$  al tempo  $t = 0$  e paga  $1.5x$  al tempo  $t_1 = 2$  e  $3.5x$  al tempo  $t_2 = 4$  (tempo espresso in anni);
- 2) Riceve  $2.5x$  al tempo  $t = 0$  e paga  $2x$  al tempo  $t_1 = 2$  e  $2.5x$  al tempo  $t_2 = 4$  (tempo espresso in anni);

Determinare:

- Il tasso di valutazione  $j$  che rende le due operazioni indifferenti secondo il criterio del REA;
  - L'operazione più conveniente in base al criterio del TIR;
- 

QUARTO CFU da cambiare dati

Al tempo  $t = 0$  si osservano sul mercato i prezzi delle seguenti obbligazioni (di valore nominale 100 euro):

- 91 prezzo a pronti di un'obbligazione con scadenza  $t = 4$ ;
- 88 prezzo a pronti di un'obbligazione con scadenza  $t = 7$ ;
- 82 prezzo a termine di un'obbligazione con emissione al tempo  $t = 4$  e scadenza  $t = 7$ .

Calcolare i tassi di interesse  $i(0, 4)$ ,  $i(0, 7)$ ,  $i(4, 7)$ . Dire se, dall'osservazione di tali tassi, si può dedurre che è violato il principio di assenza di arbitraggio e in caso affermativo, costruire una strategia di arbitraggio e determinare il profitto finale, supponendo di potere effettuare vendite allo scoperto per un importo massimo di euro 10 000.

---

QUINTO CFU

Si consideri una operazione finanziaria  $A$  che prevede introiti di euro 300 euro al tempo  $t = 2$ , euro 200 al tempo  $t = 5$ , euro 700 al tempo  $t = 6$  (tempo espresso in anni). Calcolare la duration e la convessità di  $A$  utilizzando il tasso di interesse annuale  $i = 0.04$ . Determinare inoltre la variazione relativa (utilizzando il polinomio di Taylor di secondo ordine) sapendo che il tasso di interesse passa da  $i = 0.04$  a  $i' = 0.03$ .

---

SESTO CFU

Sia dato un mercato uniperiodale in cui siano disponibili soltanto due titoli rischiosi  $A$  e  $B$  caratterizzati da rendimento medio, scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a:

$$\mu_A = 0.25; \quad \sigma_A = 3; \quad \mu_B = 0.40; \quad \sigma_B = 5; \quad \rho_{AB} = 0.20$$

Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Con riferimento ad un individuo che vuole investire una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale nel titolo  $A$  ed una percentuale  $1 - \alpha$  nel titolo  $B$ :

1. rappresentare nel piano media-varianza l'insieme dei portafogli ammissibili e la frontiera efficiente;
  2. determinare le percentuali da investire nei due titoli per ottenere il portafoglio di minima varianza.
-

# Soluzioni

$$1) e(1 + i_{\frac{1}{4}} \cdot 10) = 2e = 0 \quad i_{\frac{1}{4}} = 0,10$$

$$2e(1,10)^t = 2,5e = 0 \quad t = \frac{\ln 1,25}{\ln 1,10} = 2,34 \text{ t zimm.}$$

$$2) S = 4250(1,04)^{-1} + 3500(1,04)^{-2} + 3875(1,04)^{-3} + 7000(1,04)^{-4} = 16750,97$$

n	I	C	R	D
0				16750,97
1	670,03	3579,97	4250	13171
2	526,84	2973,16	3500	10197,84
3	407,91	3467,09	3875	6730,75
4	269,23	6730,77	7000	0

$$3) 2,5x - 1,5xv^2 - 3,5xv^4 = 2,5x - 2xv^2 - 2,5xv^4 \quad \begin{matrix} = 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$v^4 - 0,5v^2 = 0 \Rightarrow v^2(v^2 - 0,5) = 0$$

$$v = 0,7071$$

$$j = \frac{1}{v} - 1 = 41,42\%$$

$$TIRA = 0 \quad 2,5x - 1,5xv^2 - 3,5xv^4 = 0$$

$$3,5v^4 + 1,5v^2 - 2,5 = 0 \quad v^2 = y$$

$$3,5y^2 + 1,5y - 2,5 = 0 \quad \begin{matrix} 0,6576 \\ < 0 \end{matrix} \quad y$$

$$v = \sqrt{0,6576} = 0,8109 \Rightarrow TIRA = 23,31\%$$

$$2,5x - 2xv^2 - 2,5xv^4 = 0$$

$$2,5v^4 + 2v^2 - 2,5 = 0 \quad v^2 = y$$

$$2,5y^2 + 2y - 2,5 = 0 \quad \rightarrow y_1 = 0,6770$$

$$v = \sqrt{0,6770} = 0,8228 \Rightarrow TIR_B = 0,2153$$

B < A perche'  $TIR_B < TIR_A$  Finanziato

41  $\Rightarrow 1. z(0,4) = 100 \Rightarrow r(0,4) = 1,0989$

$$i(0,4) = 0,0238$$

$\Rightarrow 8. z(0,7) = 100 \Rightarrow r(0,7) = 1,1363$

$$i(0,7) = 0,0184$$

$\Rightarrow 2. z(4,7) = 100 \Rightarrow r(4,7) = 1,2195$

$$i(4,7) = 0,0683$$

$$z(0,4) \cdot z(4,7) = 1,3401 > z(0,7) = 1,1363$$

*Acquista* *Vendo*

op.	0	4	7
veicolo semp.			-10.000
	$\frac{+10.000}{z(0,7)} = 8800,49$		
Acquista per:	-8800,49	+8800,49 $z(0,4)$ = 9670,85	
Acquista per:		-9670,85	9670,85 $z(4,7)$ 11.793,60
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	0	0	+1793,60

$$5) \quad \mu_{12} = \frac{2 \cdot 300 (1,04)^{-2} + 5 \cdot 200 (1,04)^{-5} + 6 \cdot 700 (1,04)^{-6}}{300 (1,04)^{-2} + 200 (1,04)^{-5} + 700 (1,04)^{-6}}$$

$$= \frac{4695,38}{994,92} = 4,71 \text{ ann.}$$

$$\text{COV} = \frac{2^2 \cdot 300 (1,04)^{-2} + 5^2 \cdot 200 (1,04)^{-5} + 6^2 \cdot 700 (1,04)^{-6}}{994,92} = 25,26$$

$$f = \ln(1,04) = 0,0392$$

$$f' = \ln(1,03) = 0,0295 \quad \partial f = -0,0097$$

$$\text{VOZ} \hat{=} 4,71 \cdot (-0,0097) + \frac{1}{2} \cdot 25,26 \cdot (-0,0097)^2 =$$

$$0,0468 = 4,68\%$$

$$6) \quad \sigma_p^2 = 9d^2 + (1-d)^2 25 + 2d(1-d) \cdot 20 \cdot 3 \cdot 5$$

$$= 9d^2 + 25 + 25d^2 - 50d + 6d - 6d^2$$

$$= 28d^2 - 44d + 25$$

$$d^* = \frac{d \sigma_p^2}{d d} = 2 \cdot 28d - 44 = 0 \quad d^* = 0,7857$$

$$\mu_p = d \cdot 0,25 + (1-d) \cdot 0,40 = 0,40 - 0,15d$$

$$d = 2,6 - 6,6 \mu_p$$

$$\sigma_p^2 = 28(2,6 - 6,6 \mu_p)^2 - 44(2,6 - 6,6 \mu_p) + 25$$

$$\sigma_p^2 = 1244,41 \mu_p^2 - 702,19 \mu + 106,77$$

$$\mu_{p^*} = 0,2821$$

$$\sigma_{p^*}^2 = 7,7142$$

