Prova scritta di Matematica Finanziaria -Università di Bari - A
a.a. 2020-2021 - 16 Giugno 2021

---

1. Vladimir Petkovic possiede un capitale $C_1 = 15\,000$ disponibile tra 15 mesi e $C_2 = 3\,000$ disponibile tra 21 mesi. Determinare il valore attuale sapendo che il tasso annuale è $i = 0.12$, il primo capitale è valutato in RIC e il secondo in RIS.

---

2. Roberto Martinez possiede una rendita immediata posticipata pari a $2R$ per i primi 10 semestri e $3R$ per i successivi 5 semestri. Sapendo che il tasso annuo convertibile semestralmente $j(2) = 0.06$ e che il valore attuale è $V = 13\,641.80$, determinare R.

---

3. Markku Kanerva dispone un progetto per il quale investe al tempo $t = 0$ la somma C e riceve al tempo $t = 1$ la somma pari a $0.4C$ e la somma $0.8C$ al tempo $t = 2$. Determinare il TIR di tale operazione.

---

4. Andriy Shevchenko osserva in un mercato in cui viene rispettato il principio di assenza di arbitraggi i seguenti tassi:

$$i(0,4) = 0.05; \quad i(4,7) = 0.07; \quad i(0,9) = 0.12$$

Determinare i tassi $i(0,7)$ e $i(4,9)$.

---

5. Luis Enrique possiede un'operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 700 euro al tempo $t = 2$, euro 400 al tempo $t = 4$, euro 500 al tempo $t = 5$ (tempo espresso in anni). Calcolare la duration di F utilizzando il tasso istantaneo di valutazione $\delta = 0.03$.

---

6. Didier Deschamps dispone in un mercato uniperiodale due titoli rischiosi A e B caratterizzati da rendimento medio, scarto quadratico medio e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a:

$$\mu_A = 0.15; \quad \sigma_A = 2; \quad \mu_B = 0.35; \quad \sigma_B = 5; \quad \rho_{AB} = -0.50$$

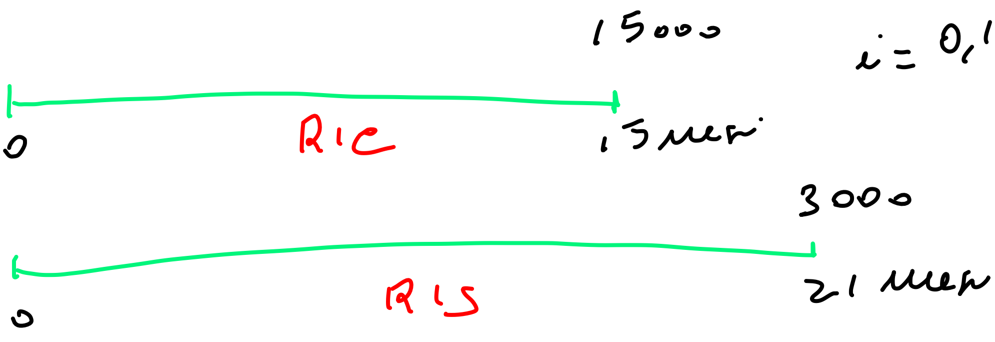
Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Determinare la percentuale α del proprio capitale da investire nel titolo A per :

- minimizzare la varianza;
- per ottenere un rendimento del portafoglio $\mu_p = 0.26$

SOLUZIONE

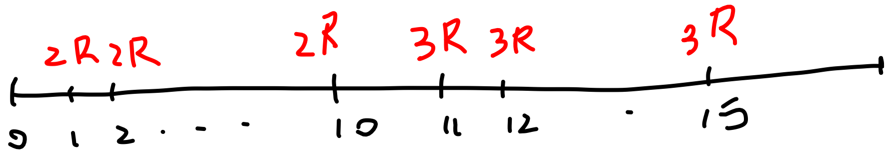
1)

$i = 0,12$



$$V(0) = 15000 \cdot (1,12)^{-\left(\frac{15}{12}\right)} + \frac{3000}{\left(1 + 0,12 \cdot \frac{21}{12}\right)}$$

2)

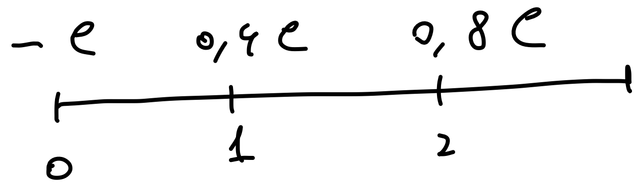


$J(2) = 0,06$

$V(0) = 1364,80$

$$1364,80 = 2R \cdot a_{\overline{10}|0,03} + 3R \cdot a_{\overline{5}|0,03} \cdot (1,03)^{-10}$$

3)



TIR ??

$$-c + 0,4cv + 0,8cv^2 = 0$$

$$c\,(0,8v^2 + 0,4v - 1) = 0 \qquad c \neq 0$$

$$0,8v^2 + 0,4v - 1 = 0$$

4)

$$R(0,4) \cdot R(4,7) = R(0,7)$$

$$(1,05)^4 \cdot (1,07)^3 = R(0,7) = 1,4890$$

$$i(0,7) = (1,4890)^{1/7} - 1 = 0,0585$$

5)

$$R(0,4) \cdot R(4,9) = R(0,9) \Rightarrow$$

$$R(4,9) = \frac{R(0,9)}{R(0,4)} = \frac{(1,12)^9}{(1,05)^4} = 2,2814$$

$$i(4,9) = (2,2814)^{1/5} - 1 = 0,1793$$

5)

$\delta = 0,03$

$$dur = \frac{2 \cdot 700\, e^{-0,03 \cdot 3} + 4 \cdot 400 \cdot e^{-0,03 \cdot 4} + 5 \cdot 500\, e^{-0,03 \cdot 5}}{700\, e^{-0,03 \cdot 3} + 400\, e^{-0,03 \cdot 4} + 500\, e^{-0,03 \cdot 5}}$$

6) $\sigma_p^2 = 4\alpha^2 + 25(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\cdot 2\cdot 5\cdot -0{,}5$

$$= 4\alpha^2 + 25\alpha^2 + 25 - 50\alpha - 10\alpha + 10\alpha^2$$

$$= 39\alpha^2 - 60\alpha + 25$$

$$\frac{d\sigma_p^2}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 78\alpha - 60 = 0 \Rightarrow \alpha^* = 0{,}7892$$

b) $r_p = 0{,}15\alpha + 0{,}35(1-\alpha)$

$$r_p = 0{,}35 - 0{,}20\alpha$$

$$r_p = 0{,}26 \Leftrightarrow 0{,}26 = 0{,}35 - 0{,}20\alpha$$

$$\alpha = 0{,}45$$

Prova scritta di Matematica Finanziaria -Università di Bari - A
a.a. 2020-2021 - 30 Giugno 2021

---

1. Determinare dopo quanti anni un capitale C produce un interesse pari a $0.20C$ se investito in RIC al tasso di intereressa annuo $i = 0.05$.

---

2. Freddy Krueger riceve un prestito $S = 50\,000$ da restiture con un piano di ammortamento francese con $n = 15$ rate semestrali al tasso annuale $i = 0.08$. Dopo aver pagato la quinta rata, rinegozia con la banca la restituzione del debito e concorda che le successive dieci rate vengano restituite con un piano di ammortamento italiano. Determinare l'importo dell'ultima rata.

---

3. Chucky riceve un finanziamento di 2 000 euro da restituire con un rata $R_1 = 700$ in $t_1 = 2$ anni e R_2 in $t_2 = 5$ anni. Sapendo che il $TAEG = 0.04$ e che ci sono spese $z_1 = 50$ in $t = 0$, $z_1 = 100$ in $t_1 = 2$ e $z_2 = 150$ in $t_2 = 5$, determinare R_2.

---

4. Samara Morgan osserva in un mercato i seguenti tassi:

$$i(0,3) = 0.05; \quad i(3,8) = 0.07; \quad i(0,8) = 0.12$$

Dire se é violato il principio di assenza di arbitraggio.

---

5. Anne Marie Wilkes possiede un'operazione finanziaria F che prevede introiti di euro 1 700 euro al tempo $t = 1.5$, euro 900 al tempo $t = 3.5$, euro 500 al tempo $t = 4$ (tempo espresso in anni). Calcolare la duration di F utilizzando il tasso istantaneo di valutazione $\delta = 0.03$.

---

6. Jigsaw dispone in un mercato uniperiodale due titoli rischiosi A e B caratterizzati da scarto quadratico medio σ_A e $\sigma_B = 2\sigma_A$ e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a $\rho_{AB} = -\dfrac{1}{4\sigma_A}$. Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Determinare la percentuale α del proprio capitale da investire nel titolo A per minimizzare la varianza del portafoglio.

Soluzione

1) $I = \cancel{C}\left[(1{,}05)^t - 1\right] = 0{,}20\,\cancel{C}$

$\Rightarrow (1{,}05)^t = 1{,}20 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 1{,}20}{\ln 1{,}05} = 3{,}73$ anni.

2) $i_{\frac{1}{2}} = (1{,}08)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}0392$

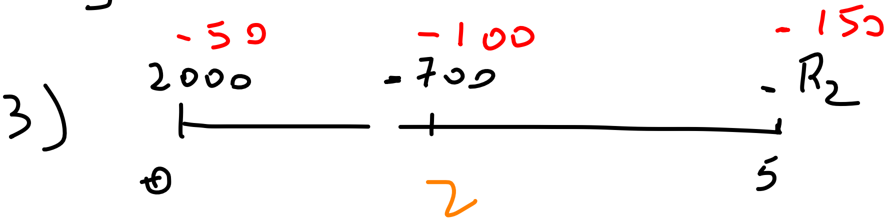
$R = \dfrac{50\,000}{a_{\overline{15}|0{,}0392}} = 4\,472{,}89$

$D_5 = 4\,472{,}89 \cdot a_{\overline{10}|0{,}0392} = 36\,410{,}74$

$R_{15} = C + I_{15}$; $C = \dfrac{36410,74}{10} = 3641,07$

$D_{14} = 3641,07$; $I_{15} = 0,0392 \cdot 3641,07 = 142,84$

$R_{15} = 3783,91$

3) 

$TAEG = 0,04$

$(2000 - 50) - (700 + 100)(1,04)^{-2} - (R_2 + 150)(1,04)^{-5} = 0$

$\Rightarrow R_2 = 1322,58$

4) $r(0,3) = (1,05)^3 = 1,1576$

$r(0,8) = (1,12)^8 = 2,4759$

$r(3,5) = (1,07)^5 = 1,4025$

$r(0,3) \cdot r(3,5) = 1,6236 \neq r(0,8) = 2,4759$

Il principio di essenza di arb. tregg. è violato

5) $$d_{u2} = \frac{1,5 \cdot 1700\, e^{-0,03 \cdot 1,5} + 3,5 \cdot 900\, e^{-0,03 \cdot 3,5} + 4 \cdot 500\, e^{-0,03 \cdot 4}}{1700\, e^{-0,03 \cdot 1,5} + 900\, e^{-0,03 \cdot 3,5} + 500\, e^{-0,03 \cdot 4}} = 2,44 \text{ anni}$$

6) $$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + (1-\alpha)^2 \cdot 4\sigma_A^2 + 2\alpha(1-\alpha) \cdot \sigma_A \cdot 2\sigma_A \left(-\frac{1}{4\sigma_A}\right) =$$

$$= \alpha^2 (5\sigma_A^2 + \sigma_A) - \alpha(8\sigma_A^2 + \sigma_A) + 4\sigma_A^2$$

$$\frac{d\sigma_p^2}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha(5\sigma_A^2 + \sigma_A) - (8\sigma_A^2 + \sigma_A) = 0$$

$$\alpha^* = \frac{\cancel{\sigma_A}(8\sigma_A + 1)}{2\cancel{\sigma_A}(5\sigma_A + 1)} = \frac{8\sigma_A + 1}{2(5\sigma_A + 1)}$$

Prova scritta di Matematica Finanziaria -Università di Bari - A
a.a. 2020-2021 - 14 Luglio 2021

---

1. Un capitale $C = 5\,000$ euro viene investito in RIS per 18 mesi al tasso semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.05$. Il montante ottenuto viene reinvestito in RIC per altri 10 mesi al tasso annuale $i = 0.08$. Determinare il montante finale.

---

2. Il rapporto tra il valore attuale di una rendita posticipata immediata formata da $n = 15$ rate mensili la cui rata é 100 e il valore attuale di una rendita posticipata perpetua con rata mensile R é pari a 2. Determinare R sapendo che il tasso convertibile mensilmente é $j(12) = 0.24$.

---

3. Un soggetto dispone di un progetto per il quale investe 1000 euro in $t = 0$ e riceve 600 euro in $t = 2$ e 800 in $t = 4$ (tempo espresso in anni). Determinare il TIR del progetto.

---

4. In un mercato in cui viene rispettato l'ipotesi di coerenzea, si osservano i seguenti tassi:

$$i(0,8) = 0.15; \quad i(3,8) = 0.06$$

Determinare il tasso $i(0,3)$.

---

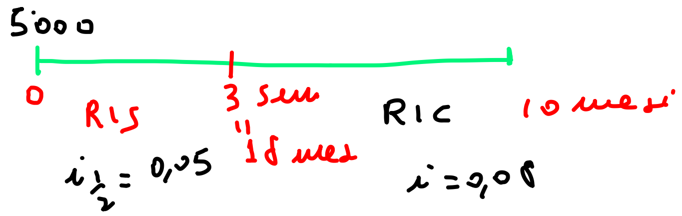
5. Un'operazione finanziaria prevede introiti di euro 100 euro al tempo $t = 2$, euro 200 al tempo $t = 3$, euro 500 al tempo $t = 5$ (tempo espresso in anni). Calcolare la variazione relativa utilizzando l'approssimazione di Taylor sapendo che il tasso istantaneo di valutazione passa dal $\delta = 0.06$ a $\delta' = 0.02$.

---

6. In un mercato uniperiodale due titoli rischiosi A e B caratterizzati da scarto quadratico medio $\sigma_A = 5$ e $\sigma_B = 6$ e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a $\rho_{AB} = 0$. Si supponga che non sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Determinare la percentuale α del proprio capitale da investire nel titolo A tale che la varianza del portafoglio sia pari a 28.

Soluzione

1)



$$M = 5000 \cdot (1 + 0,05 \cdot 3) \cdot (1,08)^{\frac{10}{12}} = 6130,85$$

2)

$$i_{\frac{1}{12}} = \frac{0,24}{12} = 0,02$$

$$\frac{100 \cdot a_{\overline{15}|0,02}}{\frac{R}{0,02}} = 2 \Rightarrow \frac{25,69}{R} = 2$$

$$\Rightarrow R = 12,84$$

3) TIR

0	2	4
-1000	$+600$	$+800$

$$-1000 + 600v^2 + 800v^4 = 0 \qquad v^2 = y$$

$$8v^4 + 6v^2 - 10 = 0 \Rightarrow 4v^4 + 3v^2 - 5 = 0$$

$$4y^2 + 3y - 5 = 0 \qquad \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{8} \begin{cases} 0,8024 \\ < 0 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{y} = 0,8957$$

$$TIR = \frac{1}{v} - 1 = 11,64\%$$

4) $r(0,3) \cdot r(3,8) = r(0,8) \Rightarrow$

$$r(0,3) = \frac{r(0,8)}{r(3,8)} = \frac{(1,15)^8}{(1,06)^5} = 2,2858$$

$$i(0,3) = (2,2858)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,3172$$

5) $\delta = 0,06$

0	2	3	5
	100	200	500

$$dur(0,06) = \frac{2 \cdot 100\, e^{-0,06 \cdot 2} + 3 \cdot 200\, e^{-0,06 \cdot 3} + 5 \cdot 500\, e^{-0,06 \cdot 5}}{100\, e^{-0,06 \cdot 2} + 200\, e^{-0,06 \cdot 3} + 500\, e^{-0,06 \cdot 5}} = 4,041$$

$$Var = -dur \cdot d\delta = -4,041 \cdot -0,04 = 16,16\%$$

$$d\delta = -0,04$$

6) $\sigma_p^2 = 25\alpha^2 + 36(1-\alpha)^2 = 28 \Rightarrow$

$$61\alpha^2 - 72\alpha + 8 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{72 \pm 56,85}{122} \begin{cases} \alpha_1 = 0,1241 & \text{SI} \\ \alpha_2 = 1,0561 & \rightarrow \text{No perché non si poss. fare vend. scop.} \end{cases}$$

Prova scritta di Matematica Finanziaria -Università di Bari -
a.a. 2020-2021 - 08 Sett 2021

---

1. Il rapporto tra il valore attuale di un capitale C disponibile tra 3 anni e il valore attuale dello stesso capitale C disponibile tra 2 anni é pari a 0.90. Sapendo che il regime applicato é RIC, determinare il tasso di interesse i.

---

2. Un individuo prende in prestito la somma $S = 10\,000$ da restituire con tre rate semestrali R_1, R_2 e R_3 al tasso convertibile semestralmente $j(2) = 0.12$. Sapendo che $R_2 = 3R_1$ e $R_3 = 2R_1$, stilare il piano di ammortamento.

---

3. Un soggetto riceve un finanziamento di 1 000 euro in $t = 0$ e dovrá restituire 600 euro in $t = 1$ e 800 in $t = 2$ (tempo espresso in anni). Determinare il TAN del progetto.

---

4. Al tempo $t = 0$ si osservano sul mercato i prezzi delle seguenti obbligazioni :
   - 88 prezzo a pronti di un'obbligazione con scadenza $t = 4$ che restituisce 102;
   - 91 prezzo a pronti di un'obbligazione con scadenza $t = 7$ che restituisce 104;
   - 82 prezzo a termine di un'obbligazione con emissione al tempo $t = 4$ e scadenza $t = 7$ che restituisce 100.

   Calcolare i tassi di interesse $i(0, 4)$, $i(0, 7)$, $i(4, 7)$.

---

5. Calcolare la duration di una rendita posticipata di importo R formata da $n = 3$ rate posticipate semestrali al tasso di interesse semestrale $i_{\frac{1}{2}} = 0.04$.

---

6. In un mercato uniperiodale due titoli rischiosi A e B caratterizzati da scarto quadratico medio $\sigma_A = 3$ e $\sigma_B = 5$ e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a $\rho_{AB} = -0.30$. Si supponga che non sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Determinare la percentuale α del proprio capitale da investire nel titolo A per ottenere il portafoglio di minima varianza.

Prova scritta di Matematica Finanziaria -Università di Bari -
a.a. 2020-2021 - 27 Ottobre 2021

---

1. Un capitale C viene impiegato all'istante zero per tre anni alle seguenti modalitá:
   1) primo anno al tasso di interesse annuo del $i = 0.05$ (RIC);
   2) secondo anno al tasso di interesse convertibile quadrimestralmente $j(3) = 0.09$ (RIC);
   3) terzo anno al tasso trimestrale $i_{\frac{1}{4}} = 0.02$ (RIS);
   Calcolare il tasso nominale convertibile semestralmente $j(2)$ che avrebbe prodotto lo stesso montante finale.

---

2. Un individuo prende in prestito la somma $S = 100\,000$ da restituire con un piano di ammortamento italiano formato da 50 rate semestrali al tasso annuale $i = 0.12$. Determinare la composizione della ventesima rata (quota interesse, quota capitale) e del debito residuo dopo aver pagato la ventesima rata.

---

3. In un mercato uniperiodale due titoli rischiosi A e B caratterizzati da scarto quadratico medio σ_A e $\sigma_B = 4\,\sigma_A$ e coefficiente di correlazione pari rispettivamente a $\rho_{AB} = -\frac{2\sigma_A}{\sigma_B}$. Si supponga che sia possibile effettuare vendite allo scoperto. Determinare la percentuale α del proprio capitale da investire nel titolo A per ottenere il portafoglio di minima varianza.

Parte Teorica

---

4. Dare la definizione di duration. Inoltre enuciare gli effetti che una variazione del tasso produce sul valore del portafoglio formato da titoli obbligazionari.

---

5. Dare la definizione di scindibilitá e dimostrare che il regime RIC é scindibile.

---

6. Scrivere e dimostrare il valore attuale di una rendita unitaria posticipata immediata formata da n rate.

$$c_n^m \quad c_{n-1}^m \quad c_{n-2}^m \quad \cdots \quad c_{n-h}^m \quad \cdots \quad c_2^m \quad c_1^m \quad E_{t_n}$$

$$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_h \quad \cdots \quad t_{n-2} \quad t_{n-1} \quad t_n$$

$$I_0 \quad I_1 \quad I_2 \quad \cdots \quad I_h \quad \cdots \quad I_{n-2} \quad I_{n-1} \quad I_n$$

$$\begin{array}{ccccccccc} c_n^m & c_{n-1}^m & c_{n-2}^m & \cdots & c_{n-h}^m & \cdots & c_2^m & c_1^m & E_{t_n} \\ t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_h & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_n \\ I_0 & I_1 & I_2 & \cdots & I_h & \cdots & I_{n-2} & I_{n-1} & I_n \end{array}$$

$$t_{n+\Delta t} \quad t_{n+2\Delta t} \quad \cdots \quad t_{n+h\Delta t} \quad \cdots \quad T$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 1 \\ y - 4z = -3 \\ y - 4z = -3 \\ y - 4z = -3 \\ y - 4z = -3 \end{cases}$$