Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 19 Dicembre 2017 - Traccia A

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{4x}{1-x^2}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$;
- $f(x) > 0 : \quad]-\infty, -1[\cup]0, 1[$;
- $f(x) < 0 : \quad]-1, 0[\cup]1, +\infty[$;
- $f(x) = 0 : \quad x = 0$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$;
- $f'(x) = \frac{4(x^2+1)}{(x^4+14x^2+1)}$;
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in D; \quad f'(x) = 0 \quad \text{MAI}; \quad f'(x) < 0 \quad \text{MAI}$;
- $f''(x) = -\frac{8x(x^4+2x^2+13)}{(x^4+14x^2+1)^2}$;
- $f''(x) > 0 : \quad]-\infty, 0[-\{-1\}; \quad f''(x) < 0 : \quad]0, +\infty[-\{1\}; \quad f''(x) = 0 : \quad x = 0$ (punto di flesso);
- $f(D) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; f biunivoca? NO. Non ci sono massimi e minimi assoluti.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^2 - e^{2x} + 2 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	0	1	0.5	1	≈ -4.38	≈ -0.46
1	0	0.5	0.25	1	≈ -0.46	≈ 0.41
2	0.25	0.5	0.375	≈ 0.41	≈ -0.46	≈ 0.02
3	0.375	0.50	0.4375			

Quindi $c_3 = 0.4375$ é una soluzione dell'equazione con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^5 \frac{\ln x}{(x+2)^2}\, dx$$

Soluzione: Integrando per parti si ottiene:

$$I = -\frac{\ln x}{x+2} + \int \frac{1}{x(x+2)}$$

Da cui otteniamo che:

$$\int \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x+2)$$

Quindi:

$$I = -\frac{\ln x}{x+2} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}\Big]_2^5 = F(5) - F(2) = \frac{5}{14}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(7) + \frac{3}{4}\ln(2)$$

4. Data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1-h & 1 \\ 2-h & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

- Determinare i valori di h per cui la matrice A abbia rango pari a 3;
- Posto $h = 0$ deteminare gli autovalori e i corrispondenti autovettori;
- La matrice A é diagonalizzabile? Se si, determinare la matrice D e P che realizzano la diagonalizzazione della matrice A.

Soluzione

$det(A) = 12h - 32$. Se $h \neq \frac{8}{3}$ allora $car(A) = 3$.
Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = -4$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 4$
Gli autovettori corrispondenti: $\mathbf{x}_1 = (0, -\frac{t}{5}, t)$; $\mathbf{x}_2 = (0, t, t)$; $\mathbf{x}_3 = (\frac{8}{3}t, \frac{t}{3}, t)$; $t \neq 0$
La matrice è diagonalizzabile perchè gli autovalori sono distinti.

5. Trovare e classificare i punti stazionari della funzione f definita dall'espressione:

$$f(x,y) = 4 + \frac{y^2}{2} + \ln\left(\frac{x^2+2x+5}{y}\right)$$

Soluzione: Le derivate parziali sono:

$$f_x = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}; \quad f_y = y - \frac{1}{y}; \quad f_{xx} = -\frac{2(x^2+2x-3)}{(x^2+2x+5)^2}; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 1 + \frac{1}{y^2}$$

I punti critici sono $P_1 = (-1, 1)$; $P_2(-1, -1)$; La matrice Hessiana calcolata in P_1 e in P_2 è definita positiva e quindi P_1 e P_2 sono punti di minimo relativo;

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 19 Dicembre 2017 - Traccia B

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{3x}{x^2-1}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$;
- $f(x) > 0: \quad]-1, 0[\cup]1, +\infty[$;
- $f(x) < 0: \quad]-\infty, -1[\cup]0, 1[\quad]-1, 0[\cup]1, +\infty[$;
- $f(x) = 0: \quad x = 0$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$;
- $f'(x) = \dfrac{-3(x^2+1)}{(x^4+7x^2+1)}$;
- $f'(x) > 0 \quad \text{MAI}; \quad f'(x) = 0 \quad \text{MAI}; \quad f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in D$;
- $f''(x) = \dfrac{6x(x^4+2x^2+6)}{(x^4+14x^2+1)^2}$;
- $f''(x) > 0: \quad]0, +\infty[-\{1\}; \quad f''(x) < 0: \quad]-\infty, 0[-\{-1\}; \quad f''(x) = 0: \quad x = 0$ (punto di flesso);
- $f(D) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; f biunivoca? NO. Non ci sono massimi e minimi assoluti.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $2x - \ln(x^3+5) + 1 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	0	1	0.5	≈ -0.60	≈ 1.20	$\approx +0.36$
1	0	0.5	0.25	≈ -0.60	$\approx +0.36$	≈ -0.11
2	0.25	0.50	0.375	≈ -0.11	≈ 0.36	≈ 0.13
3	0.25	0.375	0.3125			

Quindi $c_3 = 0.3125$ é una soluzione dell'equazione con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_3^5 \frac{\ln x}{(x+4)^2}\,dx$$

Soluzione: Integrando per parti si ottiene:

$$I = -\frac{\ln x}{x+4} + \int \frac{1}{x(x+4)}$$

Da cui otteniamo che:

$$\int \frac{1}{x(x+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x+4)$$

Quindi:

$$I = -\frac{\ln x}{x+4} + \frac{1}{4}\ln\frac{x}{x+4}\Big]_3^5 = F(5) - F(3) = \frac{5}{36}\ln(5) - \frac{17}{28}\ln(3) + \frac{1}{4}\ln(7)$$

4. Data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & h & -2+h \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinare i valori di h per cui la matrice A abbia rango pari a 3;
- Posto $h = 0$ deteminare gli autovalori e i corrispondenti autovettori;
- La matrice A é diagonalizzabile? Se si, determinare la matrice D e P che realizzano la diagonalizzazione della matrice A.

Soluzione

$det(A) = 0 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}$. Quindi $car(A) = 3$ é impossibile.
Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 5$
Gli autovettori corrispondenti: $\mathbf{x}_1 = (\frac{1}{3}t, 3t, t)$; $\quad \mathbf{x}_2 = (\frac{2}{5}t, 2t, t)$; $\quad \mathbf{x}_3 = (t, 0, 0) \quad t \neq 0$;
La matrice è diagonalizzabile perchè gli autovalori sono distinti.

5. Trovare e classificare i punti stazionari della funzione f definita dall'espressione:

$$6 + \frac{x^2}{2} + \ln\left(\frac{y^2+4y+6}{x}\right)$$

Soluzione: Le derivate parziali sono:

$$f_x = x - \frac{1}{x}; \quad f_y = \frac{2y+4}{y^2+4y+6}; \quad f_{xx} = 1 + \frac{1}{x^2}; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = -\frac{2(y^2+4y+2)}{(y^2+4y+6)^2}$$

I punti critici sono $P_1 = (1, -2)$; $\quad P_2(-1, -2)$; La matrice Hessiana calcolata in P_1 e in P_2 è definita positiva e quindi i punti P_1 e P_2 sono punti di minimo relativo;

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 10 Gennaio 2018

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln|3x^2 - 2x|$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \left\{0; \dfrac{2}{3}\right\}$;
- $f(x) > 0 : \forall x \in]-\infty, -\dfrac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$;
- $f(x) < 0 : \forall x \in]-\dfrac{1}{3}, 1[- \left\{0; \dfrac{2}{3}\right\}$;
- $f(x) = 0 : \quad x = 1; x = -\dfrac{1}{3}$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to\frac{2}{3}} f(x) = -\infty;$
- $f'(x) = \dfrac{6x-2}{3x^2-2x} \quad \forall x \in D$;
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[; \quad f'(x) = 0 \quad x = \frac{1}{3}; \quad f'(x) < 0 \quad]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$;
- $x = \frac{1}{3}$ (minimo relativi);
- $f''(x) = \dfrac{-2(9x^2-6x+2)}{x^2(3x-2)^2}$;
- $f''(x) > 0 :$ MAI; $f''(x) < 0 : \forall x \in D$; $f''(x) = 0 :$ MAI;
- $f(D) =, \mathbb{R}$; f biunivoca? NO. Non ci sono massimi e minimi assoluti.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $|x| - e^{-2x} + 2 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[-1, 0]$.

Soluzione.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	-1	0	-0.5	-4.38	1	-0.21
1	-0.5	0	-0.25	-0.21	1	0.60
2	-0.5	-0.25	-0.375	-0.21	0.60	0.25
3	-0.50	-0.375	-0.4375			

Quindi $c_3 = -0.4375$ é una soluzione dell'equazione con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 2}\, dx$$

Soluzione: Con la sostituzione $\sqrt[4]{x} = t$ si ottiene che $x = t^4$; $\quad \sqrt{x} = t^2$; $\quad dx = 4t^3\, dt$.
Quindi

$$I = \int \frac{1}{2\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 2}\, dx = \int \frac{4t^3}{2t^2 - 5t + 2}\, dt$$

Effettuando la divisione dei polinomi ottiamo:

$$\frac{4t^3}{2t^2 - 5t + 2} = 2t + 5 + \frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2}$$

Quindi:

$$I = \int \left(2t + 5 + \frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2} \right) dt = t^2 + 5t + \int \frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2}\, dt$$

Poiché $2t^2 - 5t + 2 = (t-2)(2t-1)$ allora

$$\frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{2t-1}$$

Da cui $A = \frac{32}{3}$ e $B = -\frac{1}{3}$ e quindi:

$$\int \frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2}\, dt = \int \frac{\frac{32}{3}}{t-2}\, dt + \int \frac{\frac{-1}{3}}{2t-1}\, dt = \frac{32}{3} \ln|t-2| - \frac{1}{6} \ln|2t-1|$$

Ritornando alla variabile x si ottiene che:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 2}\, dx = \sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x} + \frac{32}{3} \ln|\sqrt[4]{x} - 2| - \frac{1}{6} \ln|2\sqrt[4]{x} - 1| + c$$

4. Determinare gli autovalori e i corrispondenti autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione

Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 5$
Gli autovettori corrispondenti: $\mathbf{x}_1 = (0, t, 0)$; $\quad \mathbf{x}_2 = (-2t, \frac{t}{2}, t)$; $\quad \mathbf{x}_3 = (0, \frac{t}{4}, t)$; $\quad t \neq 0$

5. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 3x^2 - 6y + 7$$

Soluzione: Le derivate parziali sono:

$$f_x = 3x^2 + 6x; \quad f_y = 6y - 6; \quad f_{xx} = 6x + 6; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 6$$

I punti critici sono $P_1 = (0,1); \quad P_2(-2,1)$; La matrice Hessiana calcolata in P_1 è definita positiva e quindi P_1 é un punto di minimo relativo;
La matrice Hessiana calcolata in P_2 è indefinita e quindi P_2 é un punto di sella.

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 10 Gennaio 2018

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{0\}$;
- $f(x) > 0 : \quad \forall\, x \in D; \quad f(x) < 0 : \quad$ MAI; $f(x) = 0 : \quad$ MAI
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = e^{-\frac{\pi}{2}}$
- $f'(x) = \dfrac{-e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}}{x^2+1}$;
- $f'(x) > 0 \quad$ MAI; $f(x) = 0 :$ MAI;$f(x) < 0 : \forall\, x \in D$;
- $f''(x) = \dfrac{e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}(2x+1)}{(1+x^2)^2}$;
- $f''(x) > 0 : \quad]-\frac{1}{2}, +\infty[- \{0\}; \quad f''(x) < 0 : \quad]-\infty, -\frac{1}{2}[; \quad f''(x) = 0 : \quad x = -\frac{1}{2}$ (punto di flesso);
- $f(D) = \quad \left]e^{-\frac{\pi}{2}}, 1\right[\cup \left]1, e^{\frac{\pi}{2}}\right[$; $\quad f$ biunivoca? SI. Non ci sono massimi e minimi assoluti.

2. Approssimare la funzione $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$.

Soluzione.

$f'(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) - \dfrac{2}{x+2}; \quad f''(x) = -\dfrac{4}{x(x+2)^2}; \quad f(1) = \ln(3); \quad f'(1) = \ln(3) - \dfrac{2}{3}; \quad f''(1) = -\dfrac{4}{9}$. Quindi:

$$f(x) \approx \ln(3) + (\ln(3) - \frac{2}{3})(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 = \left(\ln(3) - \frac{2}{9}\right)x - \frac{2}{9}x^2$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\ln(1+\ln x)}{x}\,dx$$

Soluzione: Sostituendo $\ln x = t$ e successivamente integrando per parti si ottiene:

$$\int \frac{\ln(1+\ln x)}{x}\,dx = (\ln x + 1)\cdot \ln(1+\ln x) - \ln x + c$$

4. Risolvere il sistema $A^T x = b$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, sapendo che:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

Soluzione

$det(B) = 2(1-k^2)$; Se $k \neq \pm 1$ allora $car(B) = 3; car(A^T) = 2$ e il sistema non ammette soluzione. Se $k = 1$ $car(B) = 2; car(A^T) = 2$ e il sistema ammette una sola soluzione $x_1 = -2; x_2 = 2$. Se $k = -1$ $car(B) = 2; car(A^T) = 2$ e il sistema ammette una sola soluzione $x_1 = \frac{2}{5}; x_2 = \frac{2}{5}$

5. Determinare i massimi e i minimi della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ che soddisfi il vincolo $x + y = 3$.
Soluzione: La funzione lagrangiana é:

$$L(x, y\lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y - \lambda(x + y - 3)$$

Da cui si ricava che $L_x = 2x - y + 1 - \lambda; \quad L_y = 2y - x + 1 - \lambda; L_\lambda = x + y - 3$. L'unico punto critico é $P_0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Det $\mathcal{L}(P_0) = -6 < 0$ quindi P_0 é un punto di minimo vincolato.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 09 Febbraio 2018

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = |x|e^{-2x}$$

Soluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R}$;
- $f(x) > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}; \quad f(x) < 0: \quad \text{MAI}; \quad f(x) = 0: \quad x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;$
- $f'(x) = |x|e^{-2x}\left(\frac{1-2x}{x}\right); \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\};$
- $f'_+(0) = +1; f'_-(0) - 1; \quad x = 0$ punto angoloso;
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \frac{1}{2}[; \quad f'(x) = 0: \quad x = \frac{1}{2}$ (punto di max rel.); $f'(x) < 0:$ $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[;$
- $f''(x) = 4|x|e^{-2x}\left(\frac{x-1}{x}\right);$
- $f''(x) > 0: \quad \forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[; \quad f''(x) < 0: \quad \forall x \in]0, 1[; \quad f''(x) = 0:$ $x = 1$ (punto di flesso);
- $f(D) = \quad [0, +\infty[; \quad f$ biunivoca? NO. $x = 0$ punto di massimo assoluto.

2. Approssimare la funzione $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 3$.

Soluzione.

$$f(x) \approx -\frac{5}{9}x^2 + \frac{14}{3}x - 9 + \ln(3)$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^3 - x}\,dx$$

Soluzione: Dividendo il polinomio di ottiene che:

$$\frac{x^3+2}{x^3-x} = 1 + \frac{2+x}{x^3-x}$$

da cui

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\, dx = \int 1\, dx + \int \frac{2+x}{x^3-x}\, dx$$

Inoltre: $\dfrac{2+x}{x^3-x} = \dfrac{2+x}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1}$ si ottiene $A = -2; \quad B = \frac{3}{2}; \quad C = \frac{1}{2}$. Quindi

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\, dx = x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

4. Studiare e risolvere il sistema $Ax = b$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, sapendo che:

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & 3 & +2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

Soluzione

Il $Det(A) = -15 - 3k$. Se $k \neq -5$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 1$$

mentre se $k = -5$ allora $car(B) = car(A) = 2$ e il sistema ammette ∞^1 soluzione:

$$x_1 = 1 - t; \quad x_2 = 2(1-t); \quad x_3 = t$$

5. Ottimizzare la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$ nel vincolo $x^2 + y^2 = 9$.
Soluzione: La funzione lagrangiana é:

$$L(x, y\lambda) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1 - \lambda(x^2+y^2-9)$$

Da cui si ricava che $L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\lambda x; \quad L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y - 2\lambda y; \quad ; L_\lambda = x^2+y^2-9$.
Ponendo pari a zero le tre derivate parziali si ottengono come punti i critici i punti:

$$P_0 = \left(0, 3, \frac{7}{6}\right); \quad P_1 = \left(0, -3, \frac{7}{6}\right); \quad P_2 = \left(3, 0, \frac{1}{6}\right); \quad P_3 = \left(-3, 0, \frac{1}{6}\right)$$

Inoltre;

$$Det\mathcal{L}(P_0) > 0; \quad Det\mathcal{L}(P_1) > 0; \quad Det\mathcal{L}(P_2) < 0; \quad Det\mathcal{L}(P_3) < 0$$

allora P_0 e P_1 sono punti di massimo vincolato mentre P_1 e P_2 punti di minimo vincolato.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 09 Aprile 2018

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;
- $f(x) > 0 :\quad$ MAI; $\quad f(x) = 0 :\quad$ MAI; $\quad f(x) < 0 :\quad \forall\, x \in D$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{2}{x(x^2-1)} \quad \forall\, x \in D$;
- $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in]1, +\infty[; \quad f'(x) = 0 :\quad$ MAI; $\quad f'(x) < 0 : \forall\, x \in]-\infty, -1[$;
- $f''(x) = \dfrac{2 - 6x^2}{x^2(x^2-1)^2}$;
- $f''(x) > 0 :\quad$ MAI; $\quad f''(x) = 0 :\quad$ MAI; $\quad f''(x) < 0 :\quad \forall\, x \in D$;
- $f(D) = \ ]-\infty, 0[$; $\quad f$ biunivoca? NO. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione.

$$c_3 = 0.5625$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}\, dx$$

Soluzione:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{4}\ln|x-2| + \frac{9}{4}\ln|x+2| + c$$

4. Studiare e risolvere il sistema $Ax = b$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, sapendo che:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & k & +2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

Soluzione

Il $Det(A) = -6k - 3$. Se $k \neq -\frac{1}{2}$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x_1 = \frac{10k + 7}{6k + 3}; \quad x_2 = \frac{12}{6k + 3}; \quad x_3 = \frac{2k + 5}{6k + 3}$$

mentre se $k = -\frac{1}{2}$ allora $car(A) = 2$ e $car(B) = 3$ e il sistema é impossibile.

5. Ottimizzare la funzione $f(x, y) = x + y$ nel vincolo $xy - 1 = 0$.
Soluzione: La funzione lagrangiana é:

$$L(x, y\lambda) = x + y - \lambda(xy - 1)$$

Da cui si ricavano come punti i critici:

$$P_0 = (1, 1, 1)\,; \quad P_1 = (-1, -1, -1)\,;$$

Inoltre;

$$Det\mathcal{L}(P_0) < 0; \quad Det\mathcal{L}(P_1) > 0;$$

allora P_0 é punto di minimo vincolato mentre P_1 é di massimo vincolato.

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 27 Giugno 2018

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{e^{(x-1)} - 1}$$

Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$;
- $f(x) > 0: \quad]1, +\infty[; \quad f(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f(x) < 0: \quad]-\infty, 1[;$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty;$
- $f'(x) = -\frac{e^{(x-1)}}{(e^{(x-1)} - 1)^2} \quad \forall x \in D;$
- $f'(x) > 0 \quad \text{MAI}; \quad f'(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f'(x) < 0: \forall x \in D;$
- $f''(x) = \frac{e^{(x-1)}(e^{(x-1)} + 1)}{(e^{(x-1)} - 1)^3};$
- $f''(x) > 0: \quad]1, +\infty[; \quad f''(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f''(x) < 0: \quad]-\infty, 1[;$
- $f(D) = \quad \mathbb{R} - \{0\} \quad f$ biunivoca? SI. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Approssimare la funzione $x \arctan x$ con in polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e di punto iniziale $x_0 = 1$.

Soluzione.

$$x \arctan x \approx \frac{x(\pi - 2 + 2x)}{4}$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int e^{2x} \ln(1 + e^x)\, dx$$

Soluzione:

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2} \ln(1 + e^x) + \frac{e^x}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{2} \ln(1 + e^x)$$

4. Risolvere il sistema $A^T x = b$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, sapendo che:

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 & 3 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

Soluzione

$CAR(B) = 3 \, \forall \, k \in \mathbb{R}$ mentre $CAR(A) \leq 2$. Il sistema é impossibile.

5. Studiare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = e^y(x^2 + 1) - y$.
Soluzione:

Il punto critico $P = (0, 0)$ é un punto di minimo poiché la matrice Hessiana risulta defінta positiva.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 11 Luglio 2018

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-5}\right)$$

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $2e^{-3x} - x^4 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$$

4. Risolvere il sistema $Ax = b$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, sapendo che:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2k & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

5. Studiare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$.

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 7 Settembre 2018

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{-x}\left(1 - e^{-2x}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R}$;
- $f(x) > 0: \quad]0, +\infty[; \quad f(x) = 0: \quad x = 0; \quad f(x) < 0: \quad]-\infty, 0[;$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;$
- $f'(x) = e^{-x}\left(3e^{-2x} - 1\right) \quad \forall\, x \in D;$
- $f'(x) > 0: \quad \left]-\infty, \frac{1}{2}\ln 3\right[; \quad f'(x) = 0: \quad x = \frac{1}{2}\ln 3; \quad f'(x) < 0: \quad \left]\frac{1}{2}\ln 3, +\infty\right[;$
- $x = \frac{1}{2}\ln 3$ (punto di minimo relativo);
- $f''(x) = e^{-x}\left(1 - 9e^{-2x}\right) \quad \forall\, x \in D;$
- $f''(x) > 0: \quad]\ln 3, +\infty[; \quad f''(x) = 0: \quad x = \ln 3; \quad f''(x) < 0: \quad]-\infty, \ln 3[;$
- $f(D) = \;]-\infty, \frac{2\sqrt{3}}{9}]$ $\quad f$ biunivoca? No. Il punto $x = \frac{1}{2}\ln 3$ é un punto di massimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^6 - 5x^5 + 3 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione.

$$c_3 = 0.9375$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1}\, dx$$

Soluzione:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - 3\arctan(x)$$

4. Risolvere il sistema $Ax = b$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, sapendo che:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2k & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

Soluzione

$Det(A) = 12k - 24$; se $k \neq 2$ allora $CAR(A) = CAR(B) = 3$ e il sistema ammette una sola soluzione:

$$x_1 = \frac{-6}{12k - 24}; \quad x_2 = \frac{2k - 8}{12k - 24}; \quad x_3 = \frac{32 - 8k}{12k - 24}$$

Se $k = 2$ allora $CAR(A) = 2$ e $CAR(B) = 3$ e quindi il sistema é impossibile.

5. Studiare la natura dei punti stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - xy + yz - 5x - 9y + z.$$

Soluzione:

Il punto critico é $P = (1, 3, -2)$. La matrice Hessiana é: $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ che risulta definita positiva. Quindi $P = (1, 3, -2)$ é un punto di minimo.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 31 Ottobre 2018

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(1 - e^{-x})$$

Soluzione

- Dominio: $]0, +\infty[$;
- $f(x) > 0 :\quad$ MAI; $\quad f(x) = 0 :\quad$ MAI $\quad f(x) < 0 :\quad \forall\, x \in D$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \quad \forall\, x \in D$;
- $f'(x) > 0 :\quad \forall\, x \in D; \quad f'(x) = 0 :\quad$ MAI; $\quad f'(x) < 0 :\quad$ MAI;
- $f''(x) = \dfrac{-e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \quad \forall\, x \in D$;
- $f''(x) > 0 :\quad$ MAI; $\quad f''(x) = 0 :\quad$ MAI; $\quad f''(x) < 0 :\quad \forall\, x \in D$;
- $f(D) = \;]-\infty, 0[\quad f$ biunivoca? SI. Non esistono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Approssimare la funzione $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$ con il polinomio di Taylor di secondo grado e punto iniziale $x = 1$.

Soluzione.

$$f(1) = \sqrt{\ln 2} = 0.8325; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+1)}(x+1)}; \quad f'(1) = \frac{1}{4\sqrt{\ln 2}} = 0.30;$$

$$f''(x) = -\frac{1 + 2\ln(x+1)}{4(\ln(x+1))^{\frac{3}{2}}(x+1)^2}; \quad f''(1) = -\frac{1 + \ln 4}{16(\ln 2)^{\frac{3}{2}}} = -0.25$$

$$f(x) \approx 0.8325 + 0.30(x-1) - \frac{1}{2}0.25(x-1)^2$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \ln(x+1)\, dx$$

Soluzione:
$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1)x^2 - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + c$$

4. Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

Soluzione

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = -1$. I rispettivi autovettori sono: $x_1 = \left(t, \frac{3}{2}t\right); \quad x_2 = (t, -t); \quad \forall\, t \neq 0$.

5. Studiare la natura dei punti stazionari della funzione
$$f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - xy - 5x - 9y.$$

Soluzione:

Il punto critico é $P = \left(\frac{29}{31}, \frac{77}{31}\right)$. La matrice Hessiana é:
$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$
che risulta definita positiva. Quindi $P = \left(\frac{29}{31}, \frac{77}{31}\right)$ é un punto di minimo.