Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 21 Dicembre 2020 - Traccia A

1. Determinare dominio, positivitá e limiti significativi della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\ln(3x^2 + 2x)}{|x - 2|}$$

2. Approssimare con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$ la funzione:

$$f(x) = \arctan(x^3 + 3)$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int (x + 4)\ln(x + 4) + \sqrt{x^2 - 3} \cdot 3x\, dx$$

4. Ottimizzare la funzione:

$$f(x, y) = -x \ln x - y \ln y$$

sotto la condizione $x + y = 1$

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 21 Dicembre 2020 - Traccia B

1. Determinare dominio, positivitá e limiti significativi della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\ln(3x^2 - 2x)}{|x+2|}$$

2. Approssimare con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$ la funzione:

$$f(x) = \arctan(x^3 - 3)$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int (x-3)\ln(x-3) + \sqrt{x^2-4} \cdot 6x \, dx$$

4. Ottimizzare la funzione:

$$f(x,y) = -x\ln x - y\ln y$$

sotto la condizione $x + y = -1$

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 21 Dicembre 2020 - Traccia C

1. Determinare dominio, positivitá e limiti significativi della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\ln(2x^2 - x)}{|x - 3|}$$

2. Approssimare con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$ la funzione:

$$f(x) = \arctan(x^3 - 2)$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int (x-1)\ln(x-1) + \sqrt{x^2 - 7} \cdot 7x \, dx$$

4. Ottimizzare la funzione:

$$f(x, y) = -x \ln x - y \ln y$$

sotto la condizione $x + y = 2$

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 21 Dicembre 2020 - Traccia D

1. Determinare dominio, positivitá e limiti significativi della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\ln(2x^2 + x)}{|x+3|}$$

2. Approssimare con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$ la funzione:

$$f(x) = \arctan(x^3 + 2)$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int (x-4)\ln(x-4) + \sqrt{x^2-1} \cdot 5x\, dx$$

4. Ottimizzare la funzione:

$$f(x, y) = -x \ln x - y \ln y$$

sotto la condizione $x + y = -2$

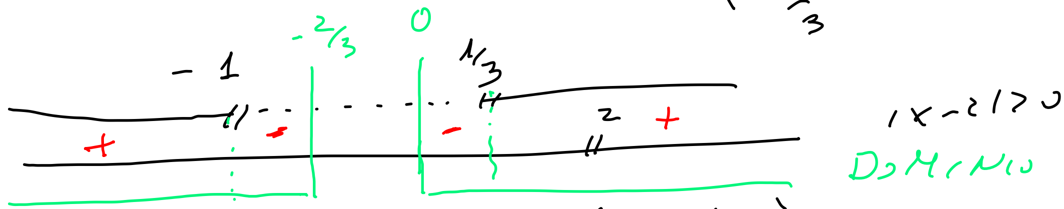
1) $\frac{\ln(3x^2+2x)}{|x-2|}$; Dom $\begin{cases} 3x^2+2x>0 \\ |x-2| \neq 0 \quad x \neq 2 \end{cases}$

$D =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[- \{2\}$

Pos. $\frac{\ln(3x^2+2x)}{|x-2|} > 0$ S.S $\begin{cases} \ln(3x^2+2x) > 0 \\ |x-2| > 0 \end{cases}$

$\ln(3x^2+2x) > 0 \iff 3x^2+2x > 1 \iff$

$3x^2+2x-1>0 \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$ V.E.



$f(x)>0 \quad]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[- \{2\}$

$f(x)<0 \quad]-1, -\frac{2}{3}[\cup]0, \frac{1}{3}[$

$f(x)=0 \quad x=-1; \quad x=\frac{1}{3}$

LIMITI SIGNIFICATIVI

$|x-2| \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(3x^2+2x)}{(x-2)} = \frac{+\infty}{+\infty} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3x^2+2x} \cdot 6x+2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{6x+2} = \frac{6}{\infty} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(3x^2+2x)}{2-x} = \lim_{x \to -\infty} - \frac{6x+2}{3x^2+2x}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-6}{6x+2} = \frac{-6}{-\infty} = 0$

$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(3x^2+2x)}{|x-2|} = \frac{\ln(16)}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(3x^2+2x)}{|x-2|} = \frac{\ln(0)}{2} = -\infty;$

$$\lim_{x\to -\frac{2}{3}^-} \frac{\ln(3x^2+2x)}{|x-2|} = \frac{\ln(0)}{\frac{8}{3}} = -\infty$$

$f(x,y) = -x\ln x - y\ln y$ sub $x+y=1$ $\quad$ $x>0$, $y>0$

$L = -x\ln x - y\ln y - \lambda[x+y-1]$

$$\frac{\partial L}{\partial x}\begin{cases} -\ln x - x\cdot\frac{1}{x} - \lambda = 0 \\ -\ln y - y\cdot\frac{1}{y} - \lambda = 0 \\ x+y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\ln x - 1 \\ \lambda = -\ln y - 1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

da cui $-\ln x - \cancel{1} = -\ln y - \cancel{1} \Rightarrow e^{\ln x} = e^{\ln y}$

$\Rightarrow x = y$ e sost. nell'ultima:

$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{2};\ \lambda = -\ln\frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - 1$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{x} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}; \mathcal{L}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ln 2 - 1\right)$$

$$= \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad |\mathcal{L}| = 1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$-1\cdot(-2) + 1(+2) = 4 > 0$

Attenzione per tracce B,D in cui il punto critico è negativo.

$P^* = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ Punto di max vincolato

---

A $\displaystyle\int (x+4)\ln(x+4)\,dx$ + B $\displaystyle\int \sqrt{x^2-3}\cdot 3x\,dx$

B $\displaystyle\frac{3}{2}\int \underbrace{2x}_{f'}\cdot\underbrace{\sqrt{x^2-3}}_{f}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2-3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$ $\quad \alpha = \frac{1}{2}$

$$\cancel{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(x^2-3)^{3/2}}{\cancel{\frac{3}{2}}} = (x^2-3)^{3/2}$$

(4) Parți:

$$f' = (x+4) \; ; \; f = \frac{(x+4)^2}{2}$$

$$g = \ln(x+4) \; ; \; g' = \frac{1}{x+4}$$

$$\int (x+4)\ln(x+4)\,dx = \frac{(x+4)^2}{2} \cdot \ln(x+4) - \int \frac{(x+4)^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{(x+4)}}$$

$$= \frac{(x+4)^2}{2} \cdot \ln(x+4) - \frac{1}{2} \int (x+4)\,dx$$

$$= \frac{(x+4)^2}{2} \ln(x+4) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+4)^2}{2} + C$$

Taylor $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3+3)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^3+3)^2} \cdot 3x^2 \; ; \; f'(1) = \frac{3}{17}$$

$$f''(1) = \frac{30}{289}$$

$$f''(x) = -\frac{6x(2x^6+3x^3-10)}{(x^6+6x^3+10)^2}$$

$$f(x) \approx \operatorname{arctg}(4) + \frac{3}{17}(x-1) + \frac{30}{289} \cdot \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$f''(x) = \frac{6x\left[1+(x^3+3)^2\right] - 3x^2 \cdot \left[2(x^3+2) \cdot 3x^2\right]}{\left[1+(x^3+2)^2\right]^2}$$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 13 Gennaio 2021

1. Determinare dominio, positivitá e limiti significativi della seguente funzione:

$$f(x) = (x^2 + x - 20) \cdot e^{\frac{1}{(x-6)^2}}$$

2. Approssimare con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$ la funzione:

$$f(x) = xe^{x^2-1}$$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sin x \cos x + x\, e^{x^2-1}\, dx$$

4. Ottimizzare la funzione:

$$f(x, y) = x^2 y$$

   sotto la condizione $2x^2 + y^2 = 3$

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 27 Gennaio 2021

1. Determinare dominio, positivitá e limiti significativi della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2-|x|}\right)$$

2. Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione:

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2-3y)}{x}$$

3. Determinare il prodotto tra matrici $A^T\,B$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + (x-1)\cdot \ln x^2\,dx$$

Soluzione

1) Dominio

$$\begin{cases} \frac{1}{2-|x|} > 0 \\ 2-|x| \neq 0 \end{cases}$$

superflue

$2-|x| > 0 \iff |x| < 2$

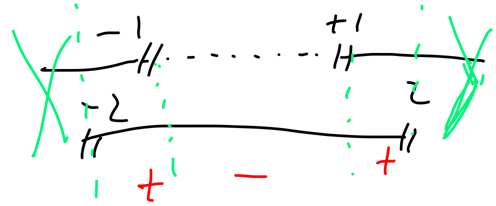
$-2 \quad 2$

$D =]-2, 2[$

Positività $\ln\left(\frac{1}{2-|x|}\right) > 0 \iff \frac{1}{2-|x|} > 1$

$$\frac{1}{2-|x|} - 1 > 0 \qquad \frac{1-2+|x|}{2-|x|} > 0 \qquad \frac{|x|-1}{2-|x|} > 0$$

S.d.S. $\begin{cases} |x|-1>0 & |x|>1 \\ 2-|x|>0 & |x|<2 \end{cases}$



$f(x)>0 \quad]-2,-1[\ \cup\ ]1,2[$

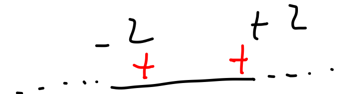
$f(x)<0 \quad]-1,1[\ ; \quad f(x)=0 \quad x=\pm 1$

$$\lim_{x\to -2^+} \ln\left(\frac{1}{2-|x|}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{2-|x|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

S. del segno $\quad 2-|x|>0$

$|x|<2$



$$\lim_{x\to +2^-} \ln\left(\frac{1}{2-|x|}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +2^-} \frac{1}{2-|x|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2) $$f(x,y) = \frac{\ln(x^2-3y)}{x}$$

$$f'_x = \left(\frac{2x}{x^2-3y}\cdot x - \ln(x^2-3y)\right)\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$= \left(\frac{2x^2}{x^2-3y} - \ln(x^2-3y) \right) \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{2}{x^2-3y} - \frac{\ln(x^2-3y)}{x^2};$$

$$f'_y = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{1}{x^2-3y} \cdot -3 \right] = \frac{-3}{x(x^2-3y)}$$

$$f''_{yy} = \frac{+3 \cdot -3x}{x^2(x^2-3y)^2} = \frac{-9\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(x^2-3y)^2} = \frac{-9}{x(x^2-3y)^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{3 \cdot (3x^2-3y)}{x^2(x^2-3y)^2} = \frac{9(x^2-y)}{x^2(x^2-3y)^2}$$

$$f''_{xx} = \frac{-6(x^2-y)}{x(x^2-3y)^2} + \frac{2\ln(x^2-3y)}{x^3}$$

3) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2-4-2, & -2+0+6 \\ 3+0+2, & -3+0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5, & -9 \end{pmatrix}$$

5) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + (x-1) \cdot \ln(x^2)\,dx$

B

A

$= \displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \int (x-1)\ln x^2\,dx$

A $\quad \displaystyle 2\int \frac{e^{\overset{f}{\sqrt{x}}}}{\underbrace{2\sqrt{x}}_{f'}}\,dx = 2 \cdot e^{\sqrt{x}} + C$

$f' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{\cancel{x}}$

B $\quad \displaystyle\int (x-1) \cdot \ln x^2\,dx =$

$g_1 = \frac{x^2}{2}$

$\displaystyle\int \underset{g_1'}{x}\, \underset{f}{\ln x^2}\,dx - \int \underset{g_2'}{1} \cdot \underbrace{\ln x^2}_{f}\,dx$

$g_2 = x$

$\displaystyle \frac{x^2}{2} \cdot \ln x^2 - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{\cancel{x}}\,dx - x \cdot \ln x^2 + \int \cancel{x} \cdot \frac{2}{\cancel{x}}\,dx$

$= \dfrac{x^2}{2}\ln x^2 - \dfrac{x^2}{2} - x\ln x^2 + 2x + C$

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z - 10 Febbraio 2021

1. Determinare dominio, derivata prima e stretta monotonia della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|$$

2. Calcolare le derivate parziali prime della funzione:

$$f(x,y) = \frac{x^2 e^{x+y^2}}{y} + \ln(xy)$$

3. Determinare la caratteristica della matrice A al variare del parametro k :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 2 & 3 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int (\tan x + x^2 \sin x)\, dx$$

Soluzione

1) Dominio

$$\begin{cases} \left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right| > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 \neq 0 \\ \sqrt{x}+2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \neq -2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

sempre vera

$$\begin{cases} \sqrt{x} \neq 2 \Rightarrow x \neq 4 \\ \sqrt{x} \neq -2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

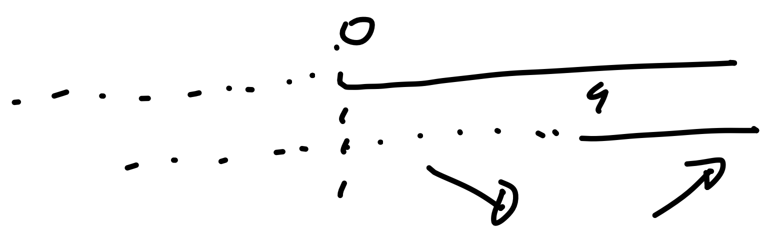
$$D = [0, +\infty[- \{4\}$$

2) $$f'(x) = \frac{1}{\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|} \cdot \frac{\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|}{\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4}{2\sqrt{x}\cdot(x-4)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}\cdot(x-4)} \quad \forall x \in D - \{0\}$$

$f'(x) > 0 \qquad \frac{2}{\sqrt{x}(x-4)} > 0$ s.d.s $\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases}$



$f'(x) < 0 \ ]0,4[\ ; \ f'(x) > 0 \ ]4,+\infty[$

2) $$f(x,y) = \frac{x^2 e^{x+y^2}}{y} + \ln(x \cdot y)$$

$$f'_x = \frac{1}{y}\left[2x e^{x+y^2} + x^2 \cdot e^{x+y^2}\right] + \frac{1}{xy}\cdot y$$

$$= \frac{e^{x+y^2}}{y}\left[2x + x^2\right] + \frac{1}{x}$$

$$f'_y = x^2 \cdot \left[\frac{e^{x+y^2}\cdot 2y \cdot y - e^{x+y^2}}{y^2}\right] + \frac{1}{xy}\cdot x$$

$$= \frac{x^2 e^{x+y^2}}{y^2}\left[2y^2 - 1\right] + \frac{1}{y}$$

3) Poiché $\det(A) = 3k^2 - 2$, se $\det(A) \neq 0$ ossia $k \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ allora $\operatorname{car}(A) = 3$, altrimenti se $k = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{car}(A) = 2$. Basta prendere sottomatrice, e quindi un minore non nullo di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 2 & 3 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \neq 0$$

4) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$= -\ln|\cos x| + c$

$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = x^2 \cdot -\cos x - \int 2x \cdot -\cos x$

$\underset{g}{x^2}$ $\underset{f'}{\operatorname{sen} x}$

$f = -\cos x$

$g' = 2x$

$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$

$\underbrace{\underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{\cos x}}$

$g' = 1$

$f = \sin x$

$= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x$

$= x \sin x + \cos x$

Quindi:

$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z - 29 Marzo 2021

---

1. Determinare dominio, postivitá e limiti della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x^2-x-6}\right)$$

2. Ottimizzare la funzione (ottimizzazione libera):

$$f(x,y) = x^2 - x^3 + 2y^2$$

3. Determinare la caratteristica della matrice A al variare del parametro k :

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -2k & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (10+2x)e^{-3x}\,dx$$

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z - 16 Giugno 2021

1. Determinare dominio, limiti significativi e derivata prima della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x+5}\right)$$

2. Ottimizzare la funzione (ottimizzazione libera):

$$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^3$$

3. Determinare la caratteristica della matrice A al variare del parametro k :

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -2k & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} - x^2\, e^x\right)\, dx$$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z - 30 Giugno 2021

1. Determinare dominio, positivitá, limiti significativi e derivata prima della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(|x| - 1\right)$$

2. Approssimare con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$ la funzione:

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln(x)$$

3. Ottimizzare la funzione (ottimizzazione libera):

$$f(x, y) = \frac{1}{x - 1} + 2xy$$

4. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int \left(\frac{1}{e^x + e^{-x}}\right) dx$$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z - 14 Luglio 2021

1. Determinare dominio, positivitá, limiti significativi della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{|x|-1}}{x^2 - 1}$$

2. Approssimare con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$ la funzione:

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot \cos(x)$$

3. Ottimizzare la funzione (ottimizzazione libera):

$$f(x, y) = x^4 + y^3 - 2x^2 + y^2$$

4. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int e^{2x} \cos(x)\, dx$$