Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 20 Dicembre 2018 - Traccia A

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{2 - \ln x}$$

Soluzione

- Dominio: $]0, +\infty[-\{e^2\}$;
- $f(x) > 0: \quad]0, e^2[;\quad f(x) = 0: \quad \text{MAI};\quad f(x) < 0: \quad]e^2, +\infty[$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0;\quad \lim_{x\to(e^2)^+} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to(e^2)^-} f(x) = +\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{3 - \ln x}{(2 - \ln x)^2} \quad \forall\, x \in D$;
- $f'(x) > 0: \quad]0, e^3[;\quad f'(x) = 0: \quad x = e^3$(punto massimo relativo); $f'(x) < 0:$ $]e^3, +\infty[$;
- $f''(x) = \dfrac{4 - \ln x}{x(2 - \ln x)^3}$;
- $f''(x) > 0: \quad]0, e^2[\cup]e^4, +\infty[;\quad f''(x) = 0: \quad x = e^4$(punto flesso); $f''(x) < 0:$ $]e^2, e^4[$;
- $f(D) = \quad]-\infty, -e^3]\cup]0, +\infty[$; f biunivoca? NO. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^3+\sqrt{x}-1 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

   Soluzione: $c_3 = 0.5625$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 12}{2x^2 - 3x - 2}\, dx$$

Soluzione: $\quad F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 3\ln|2x + 1| - 2\ln|x - 2| + c$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq \pm 5$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x_1 = \frac{25}{k+5}; \quad x_2 = \frac{5}{k+5}; \quad x_3 = \frac{-4k}{k+5}$$

Se $k = 5$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette infinite soluzioni del tipo $x_1 = -\frac{5}{4}t; x_2 = \frac{t+4}{4}; x_3 = t$. Se $k = -5$ allora $car(A) = 2$ e $car(B) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.

5. Un'impresa produce e vende due beni x e y in condizioni di monopolio. La quantitá domandata del primo bene é $Q_x = 1000 - 3p_x + p_y$ mentre quella del bene y é $Q_y = 800 + 2p_x - 4p_y$. Sapendo che il costo unitario di produzione del bene x é $c_x = 180$ mentre per il bene y é $c_y = 230$, determinare i prezzi p_x e p_y che massimizzano il profitto Π.
(Il profitto complessivo é: $\Pi = (p_x - c_x)Q_x + (p_y - c_y)Q_y$)

Soluzione: $p_x = 340; \quad p_y = 320$

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 20 Dicembre 2018 - Traccia B

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x - 4}$$

Soluzione

- Dominio: $]0, +\infty[-\{e^4\}$;
- $f(x) > 0 :\quad]e^4, +\infty[$; $\quad f(x) = 0 :\quad$ MAI; $\quad f(x) < 0 :\quad]0, e^4[$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$; $\quad \lim_{x\to(e^4)^+} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to(e^4)^-} f(x) = -\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{\ln x - 5}{(\ln x - 4)^2} \quad \forall x \in D$;
- $f'(x) > 0 :\quad]e^5, +\infty[$; $\quad f'(x) = 0 :\quad x = e^5$(punto minimo relativo); $\quad f'(x) < 0 :\quad]0, e^5[$;
- $f''(x) = \dfrac{6 - \ln x}{x(\ln x - 4)^3}$;
- $f''(x) > 0 :\quad]e^4, e^6[$; $\quad f''(x) = 0 :\quad x = e^6$(punto flesso); $\quad f''(x) < 0 :\quad]0, e^4[\cup]e^6, +\infty[$;
- $f(D) = \quad]-\infty, 0[\cup[e^5, +\infty[$; f biunivoca? NO. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^3 + \ln(x+1) - 1 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione: $\quad c_3 = 0.8125$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{3x^3 - 4x^2 + 2x - 2}{3x^2 - x - 2}\, dx$$

Soluzione: $\quad F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{1}{5}\ln|x-1| + \dfrac{6}{5}\ln|3x+2| + c$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq \pm 2$ allora $car(A) = car(B) = 3$. In questo caso il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{8}{k+2}; \quad x_3 = \frac{-4k}{k+2};$$

Se $k = 2$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette infinite soluzioni del tipo $x_1 = t + 2, x_2 = -t, x_3 = t$. Se $k = -2$ allora $car(A) = 2$ e $car(B) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.

5. Un'impresa produce e vende due beni x e y in condizioni di monopolio. La quantitá domandata del primo bene é $Q_x = 1\,200 - 3p_x + p_y$ mentre quella del bene y é $Q_y = 1\,000 + 3p_x - 5p_y$. Sapendo che il costo unitario di produzione del bene x é $c_x = 200$ mentre per il bene y é $c_y = 250$, determinare i prezzi p_x e p_y che massimizzano il profitto Π.
(Il profitto complessivo é: $\Pi = (p_x - c_x)Q_x + (p_y - c_y)Q_y$)
Soluzione: $p_x = 425; \quad p_y = 375$

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 09 Gennaio 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(|x| - 1)$$

Soluzione

- Dominio: $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;
- $f(x) > 0$: $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$; $f(x) = 0$: $x = \pm 2$; $f(x) < 0$: $]-2, -1[\cup]1, 2[$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{|x|}{x(|x|-1)}$ $\forall x \in D$;
- $f'(x) > 0$: $]1, +\infty[$; $f'(x) = 0$: $x = 0$MAI; $f'(x) < 0$: $]-\infty, -1[$;
- $f''(x) = \dfrac{-1}{(|x|-1)^2}$;
- $f''(x) > 0$: MAI; $f''(x) = 0$: MAI; $f''(x) < 0$: $\forall x \in D$;
- $f(D) = \mathbb{R}$; f biunivoca? NO. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $e^{x-2} - x^3 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione: $c_3 = 0.6875$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int [x \cos x - (x-1)\ln(x+5)]\, dx$$

Soluzione: $F(x) = x\sin(x) + \cos(x) - \frac{(x+5)^2}{2}\ln(x+5) + \frac{x^2}{4} - \frac{7}{2}x + 6(x+5)\ln(x+5) + c$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 & 3 \\ 3 & 2-k & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq 3; k \neq \frac{1}{2}$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x_1 = \frac{3}{2k-1}; \quad x_2 = \frac{-6}{2k-1}; \quad x_3 = \frac{5-k}{2k-1}$$

Se $k = 3$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette infinite soluzioni del tipo $x_1 = t+1; x_2 = 3t; x_3 = t$. Se $k = \frac{1}{2}$ allora $car(A) = 2$ e $car(B) = 3$ e il sistema non ammette soluzione.

5. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2\ln(x^2 + y^2 + 2) - xy$$

Soluzione
I punti critici sono:

$$P_0 = (0,0); \quad P_1 = (1,1); \quad P_2 = (-1,-1)$$

Il punto $P_0 = (0,0)$ é un punto di minimo; i punti $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (-1,-1)$ sono punti di sella.

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 23 Gennaio 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

Il cellulare dovrá essere spento durante la prova scritta. L'uso del cellulare per qualsiasi motivo comporterá oltre all'immediato annullamento della prova, anche la denuncia dello studente presso l'autoritá giudiziaria.

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

(Tralasciare lo studio del segno della derivata seconda)

Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$;
- $f(x) > 0: \quad]0, +\infty[; \quad f(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f(x) < 0: \quad]-\infty, 0[;$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{4};$
- $f'(x) = \dfrac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2(e^{\frac{2}{x}} - 2e^{\frac{1}{x}} + 2)} \quad \forall\, x \in D;$
- $f'(x) > 0: \quad \text{MAI}; \quad f'(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f'(x) < 0: \quad \forall\, x \in D;$
- $f''(x) = \dfrac{-e^{\frac{1}{x}}\left(-4x - 2xe^{\frac{2}{x}} + 4xe^{\frac{1}{x}} - 2 + e^{\frac{2}{x}}\right)}{x^4(e^{\frac{2}{x}} - 2e^{\frac{1}{x}} + 2)^2} \quad \forall\, x \in D;$
- $f(D) =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[- \{0\};$ $\quad f$ biunivoca? SI. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Approssimare la funzione $f(x) = x^2\cos(x)$ con il polinomio di Taylor di grado $n = 3$ e punto iniziale $x_0 = 0$;

   Soluzione: $f(x) \approx x^2$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_3^5 \frac{x^3+2x^2-8x+14}{x^2+3x-10}\,dx$$

Soluzione: $I = 6 + 2\ln(3) - 6\ln(2) + 3\ln(5)$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq 4$ allora $car(A) = 2$; $car(B) = 3$ e il sistema non ammette soluzione. Se $k = 4$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{1}{2};$$

5. Ottimizzare la funzione

$$f(x,y) = 4x + 2y$$

soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 10$

Soluzione
La funzione Lagrangiana é:

$$L(x,y,\lambda) = 4x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 10)$$

I punti critici sono:

$$P_1 = \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right); \quad P_2 = \left(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Poiché $\det \mathcal{L}(P_1) = 40\sqrt{2}$ allora P_1 é un punto di massimo vincolato; poiché $\det \mathcal{L}(P_2) = -40\sqrt{2}$ allora P_2 é un punto di minimo vincolato

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 06 Febbraio 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

Il cellulare dovrá essere spento durante la prova scritta. L'uso del cellulare per qualsiasi motivo comporterá oltre all'immediato annullamento della prova, anche la denuncia dello studente presso l'autoritá giudiziaria.

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\ln x}{4 - \ln x}$$

Soluzione

- Dominio: $]0, +\infty[-\{e^4\}$;
- $f(x) > 0: \quad]1, e^4[; \quad f(x) = 0: \quad x = 1; \quad f(x) < 0: \quad]0, 1[\cup]e^4, +\infty[$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1; \quad \lim_{x\to e^{4+}} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to e^{4-}} f(x) = +\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{4}{x(\ln x - 4)^2} \quad \forall x \in D$;
- $f'(x) > 0: \quad \forall x \in D; \quad f'(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f'(x) < 0: \quad \text{MAI}$;
- $f''(x) = \dfrac{8 - 4\ln x}{x^2(\ln x - 4)^3} \quad \forall x \in D$;
- $f''(x) > 0: \quad]e^2, e^4[; \quad f''(x) = 0: \quad x = e^2; \quad f''(x) < 0: \quad]0, e^2[\cup]e^4, +\infty[$;
- $f(D) = \mathbb{R} - -1$; f biunivoca? SI. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Determinare, con il metodo delle bisezioni, un'approssimazione dell'equazione $e^{|x-1|} + x^2 = 5$ con la precisione $\varepsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[-1, 0]$;

Soluzione: $c_3 = -0.5625$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^e \frac{4 - \ln x}{x}\, dx$$

Soluzione: $F(x) = 4\ln x - \frac{\ln^2 x}{2} + c; \quad I = \frac{7}{2}$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & k & -1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq -2$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema un'unica soluzione, ossia quella banale $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Se $k = -2$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette infinite soluzioni del tipo $(t, 0, 2t)$.

5. Studiare la natura dei punti critici della funzione:

$$f(x, y) = 2xy^3 - 8xy + 6y$$

Soluzione
I punti critici sono:

$$P_1 = \left(\frac{3}{4}, 0\right); \quad P_2 = \left(-\frac{3}{8}, 2\right); \quad P_3 = \left(-\frac{3}{8}, -2\right)$$

Il punto P_1, P_2 e P_3 sono punti di sella in quanto la matrice Hessiana risulta indefinita.

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 15 Aprile 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

Il cellulare dovrá essere spento durante la prova scritta. L'uso del cellulare per qualsiasi motivo comporterá oltre all'immediato annullamento della prova, anche la denuncia dello studente presso l'autoritá giudiziaria.

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$$

Soluzione

- Dominio: $[1, +\infty[$;
- $f(x) > 0 : \quad]1, +\infty[; \quad f(x) = 0 : \quad x = 1; \quad f(x) < 0 : \quad \text{MAI};$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{2x^2\sqrt{\frac{\ln x}{x}}} \in D;$
- $f'(x) > 0 : \quad [1, e[, \quad f'(x) = 0 : \quad x = e; \quad f'(x) < 0 : \quad]e, +\infty[;$
- $x = e$ (punto di massimo relativo);
- $f''(x) = \dfrac{3\ln^2 x - 4\ln x - 1}{4x^4\sqrt{\frac{\ln x}{x}}\,\frac{\ln x}{x}} \quad \forall\, x \in D;$
- $f''(x) > 0 : \quad]e^{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}, +\infty[; \quad f''(x) = 0 : \quad x = e^{\frac{2+\sqrt{7}}{3}};$ (punto di flesso); $f''(x) < 0 : \quad [1, e^{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}[;$
- $f(D) = [0, \sqrt{\frac{1}{e}}];$ f biunivoca? NO. $x = e$ punto di massimo assoluto e $f(e) = \sqrt{\frac{1}{e}}$ massimo assoluto. $x = 1$ punto di minimo assoluto e $f(1) = 0$ minimo assoluto.

2. Approssimare la funzione $f(x) = \arctan(x + \ln(x))$ attraverso il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto inizale $x_0 = 1$;

Soluzione: $f(x) \approx \dfrac{-5x^2 + 14x + \pi - 9}{4}$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 e^{x-1}\, dx$$

Soluzione: $F(x) = e^{x-1}(x^2 - 2x + 2) + c$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Soluzione: $car(A) = 2\, \forall k \in \mathbb{R}$ mentre $car(B) = 3$ se $k \neq 1$, altrimenti se $k = 1$ allora $car(B) = 2$. Quindi, se $k \neq 1$ allora il sistema non ammette soluzione, se $k = 1$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

5. Si consideri un consumatore, la cui utilitá derivante dal consumo delle quantitá x e y di due beni é rappresentata dalla seguente funzione:

$$U(x, y) = x \cdot y$$

Si supponga che ogni unitá del bene x costi 50 euro ed ogni unitá del bene y costi 25 euro. Supponendo che il consumatore abbia un reddito di 1 000 euro che intende spendere interamente, determinare le quantitá x e y che massimizzano la sua utilitá.

Soluzione
Il punto $P\left(10, 20, \frac{2}{5}\right)$ é un punto di massimo vincolato.

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 09 Giugn 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$;
- $f(x) > 0 :\quad]1, 3[;\quad f(x) = 0 :\quad x = 1;\quad f(x) < 0 :\quad]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4};\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\frac{\pi}{2};\quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = +\frac{\pi}{2}$;
- $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 5}\ \forall \in D$;
- $f'(x) > 0 :\quad \forall x \in D;\quad f'(x) = 0 :\quad \text{MAI};\quad f'(x) < 0 :\quad \text{MAI}$;
- $f''(x) = -\frac{2(x-2)}{(x^2 - 4x + 5)^2}\quad \forall x \in D$;
- $f''(x) > 0 :\quad]-\infty, 2[;\quad f''(x) = 0 :\quad x = 2;$ (punto di flesso); $f''(x) < 0 :$ $]2, +\infty[-\{3\}$;
- $f(D) =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[-\{\frac{\pi}{4}\}$; f biunivoca? SI. Non ci sono punto di massimo o minimo assoluto.

Determinare un'approssimazione dell'equazione $f(x) = x^5 - 2x + e^{-x} = 0$ nell'intervallo $[0, 1]$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$;

2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_4^6 \frac{3}{x^2 - 4x + 3}\, dx$$

3. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

4. Si consideri un'impresa che per il suo processo produttivo utilizza due fattori produttivi: capitale K e lavoro L. La sua funzione di costo totale CT si assume essere lineare, ossia $CT = 60K + 60L$. La funzione di produzione $Q(K, L)$ ottenibile con i fattori K ed L é del tipo Cobb-Douglas, ossia $K^{0.5}L^{0.5} = 20$. Determinare i fattori K ed L da utilizzare che minimizzano i costi $CT = 60K + 60L$ sotto il vincolo $K^{0.5}L^{0.5} = 20$.

   Soluzione.
   La funzione Lagrangiana associata al problema di ottimo é:

$$L(K, L, \lambda) = 60K + 60L - \lambda(K^{0.5}L^{0.5} - 20)$$

   da cui otteniamo:

$$\begin{cases} L_K = 60 - \lambda 0.5K^{-0.5}L^{0.5} = 0 \\ L_L = 60 - \lambda 0.5L^{-0.5}K^{0.5} = 0 \\ K^{0.5}L^{0.5} = 20 \end{cases}$$

   Dalle prime due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{120K^{0.5}}{L^{0.5}} \\ \lambda = \frac{120L^{0.5}}{K^{0.5}} \\ K^{0.5}L^{0.5} = 20 \end{cases}$$

   Per cui otteniamo

$$\frac{120K^{0.5}}{L^{0.5}} = \frac{120L^{0.5}}{K^{0.5}} \iff K = L$$

   e sostituendo nell'ultima equazioni otteniamo che il punto critico é:

$$K = 20; \quad L = 20; \quad \lambda = 120$$

   La matrice lagrangiana orlata calcolata nel punto é:

$$\mathcal{L}(20, 20, 120) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0.5 & -1.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

   Poiché $det(\mathcal{L}) < 0$ allora $(20, 20, 120)$ é un punto di minimo vincolato.

Università di Bari - Dipartimento di Economia e Finanza

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 12 Giugno 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{x-\arctan x}$$

2. Approssimare la funzion $f(x) = x^2 \sin(x)$ con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-4}\, dx$$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};$$

5. Un consumatore deve scegliere tra mele (M) e banane (B). La funzione di utilitá é:

$$U(M, B) = M^{0.5}B^{0.5}$$

Ipotizziamo che il prezzo di una mela é 4 Euro, mentre quello di una banana é 2 Euro. Inoltre il consumatore dispone di 120 Euro per tale scelta che decide di spendere totalmente. Determinare quante mele e quante banane dovrá comprare per massimizzare la sua utilitá considerando il vincolo di spesa.

$$\max_{M,B} U(M, B) \quad \text{t.c.} \quad 4M + 2B = 120$$

Università di Bari - Dipartimento di Economia e Finanza

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 10 Luglio 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{-x}(x^2 - 1)$$

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^6 + 3x - 1 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 \arctan x \, dx$$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 & 3 \\ 3 & 2-k & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

5. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = 2\ln(x^2 + y^2 + 2)$$

Università di Bari - Dipartimento di Economia e Finanza

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 11 Settembre 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = |x|e^{2x}$$

2. Approssimare la funzione $f(x) = x\ \arctan(x)$ con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \left(x\ \arctan x + \frac{2x^2 - 1}{3x} \right)\, dx$$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

5. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = xy^2 + 2xy - 3x + 2y$$

Università di Bari - Dipartimento di Economia e Finanza

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 30 Ottobre 2019

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-|x|}\right)$$

2. Utilizzando il metodo delle bisezione, determinare un'approssimazione della funzione $2x^5 - x^2 - 0.5 = 0$ nell'intervallo $[0, 1]$ con un margine di errore $\varepsilon < \frac{1}{10}$.

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^3 \ln x \, dx$$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

5. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2y + 2xy - 3y + 2x$$