Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 20 Dicembre 2019 - Traccia A

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

---

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{x}$$

Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$;
- $f(x) > 0: \quad]0, +\infty[; \quad f(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f(x) < 0: \quad]-\infty, 0[;$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;$
- $f'(x) = e^{x^2-1}\left(\frac{2x^2-1}{x^2}\right) \quad \forall\, x \in D;$
- $f'(x) > 0: \quad]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[; \quad f'(x) = 0: \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$(punto minimo relativo); $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$(punto massimo relativo) $\quad f'(x) < 0: \quad]-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}[-\{0\};$
- $f''(x) = \frac{2e^{x^2-1}(2x^4 - x^2 + 1)}{x^3};$
- $f''(x) > 0: \quad]0, +\infty[; \quad f''(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f''(x) < 0: \quad]-\infty, 0[;$
- $f(D) = \ ]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{e}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{e}}, +\infty[;$ f biunivoca? NO. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $e^{3x} - x^2 - 2 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

   Soluzione: $c_3 = 0.1875$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^4 - x^3 - 8x^2 + 13x + 1}{x^2 + x - 6}\, dx$$

Soluzione: $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{3}{5}\ln|x-2| + \dfrac{2}{5}\ln|x+3|$; $F(1) - F(0) = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}\ln(2) - \dfrac{2}{5}\ln(3)$;

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} -2k & 1 \\ 0 & k \\ -1 & k \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq \pm 1$ allora $car(B) = 3$ e $car(A) = 2$ e il sistema non ammette soluzione.

- Se $k = 1$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette un'unica soluzione $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$;
- Se $k = -2$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette un'unica soluzione $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$;

5. Un'impresa produce e vende due beni x e y in condizioni di monopolio. La quantitá domandata del primo bene é $Q_x = 600 - 2p_x + p_y$ mentre quella del bene y é $Q_y = 300 + p_x - 3p_y$. Sapendo che il costo unitario di produzione del bene x é $c_x = 100$ mentre per il bene y é $c_y = 50$, determinare i prezzi p_x e p_y che massimizzano il profitto Π. (Il profitto complessivo é: $\Pi = (p_x - c_x)Q_x + (p_y - c_y)Q_y$)

Soluzione: $p_x = 260$; $p_y = 145$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 20 Dicembre 2019 - Traccia B

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{x^2-4}}{x}$$

Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$;
- $f(x) > 0: \quad]0, +\infty[; \quad f(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f(x) < 0: \quad]-\infty, 0[;$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;$
- $f'(x) = e^{x^2-4}\left(\frac{2x^2-1}{x^2}\right) \quad \forall\, x \in D;$
- $f'(x) > 0: \quad]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[; \quad f'(x) = 0: \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$(punto minimo relativo); $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$(punto massimo relativo) $f'(x) < 0: \quad]-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}[-\{0\};$
- $f''(x) = \frac{2e^{x^2-1}(2x^4 - x^2 + 1)}{x^3};$
- $f''(x) > 0: \quad]0, +\infty[; \quad f''(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f''(x) < 0: \quad]-\infty, 0[;$
- $f(D) = \quad]-\infty, -\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}}] \cup [\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}}, +\infty[$; f biunivoca? NO. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $x^3 - e^{2x} + 2 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

   Soluzione: $c_3 = 0.3125$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_4^5 \frac{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

Soluzione: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 3\ln|x-1| + 4\ln|x-2|; \quad F(5) - F(4) = \frac{41}{6} -$

$10\ln(2) + 7\ln(3)$;

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -2 & k \\ 0 & k \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq \pm 1$ allora $car(B) = 3$ e $car(A) = 2$ e il sistema non ammette soluzione.

- Se $k = 1$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette un'unica soluzione $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$;
- Se $k = -1$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette un'unica soluzione $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = -1$;

5. Un'impresa produce e vende due beni x e y in condizioni di monopolio. La quantitá domandata del primo bene é $Q_x = 400 - 2p_x + p_y$ mentre quella del bene y é $Q_y = 200 + p_x - 3p_y$. Sapendo che il costo unitario di produzione del bene x é $c_x = 50$ mentre per il bene y é $c_y = 30$, determinare i prezzi p_x e p_y che massimizzano il profitto Π. (Il profitto complessivo é: $\Pi = (p_x - c_x)Q_x + (p_y - c_y)Q_y$)

   Soluzione: $p_x = 165$; $p_y = 95$

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 08 Gennaio 2020

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arctan(e^x - 4)$$

Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R}$;
- $f(x) > 0: \quad]\ln(4), +\infty[; \quad f(x) = 0: \quad x = \ln(4); \quad f(x) < 0: \quad]-\infty, \ln(4)[;$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan(-4) = -1.32;$
- $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 8e^x + 17} \quad \forall\, x \in D;$
- $f'(x) > 0: \quad \forall\, x \in D; \quad f'(x) = 0: \quad \text{MAI}; \quad f'(x) < 0: \quad \text{MAI};$
- $f''(x) = \dfrac{e^x(17 - e^{2x})}{(e^{2x} - 8e^x + 17)^2};$
- $f''(x) > 0: \quad]-\infty, +\ln\sqrt{17}; \quad f''(x) = 0: \quad x = \ln\sqrt{17}$ (punto di flesso); $f''(x) < 0: \quad]\ln\sqrt{17}, +\infty, 0[;$
- $f(D) = \ ]\arctan(-4), \frac{\pi}{2}[; \quad f$ biunivoca? SI. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $e^{-2x+1} + x^2 - 2 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

   Soluzione: $c_3 = 0.1875$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \ln(\sqrt{x} + 1)\, dx$$

   Soluzione: Ponendo $\sqrt{x} + 1 = t$ si ottiene: $F(x) = (\sqrt{x} + 1)^2 \ln(\sqrt{x} + 1) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - 2(\sqrt{x} + 1)\ln(\sqrt{x} + 1);$

4. Studiare il sistema $(A - C)^T x = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} -2k & 1 & 2 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -k & 2 & 1 \\ 0 & -3k & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq 0$; $k \neq -\frac{1}{4}$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{1-4k}{4k+1}$

- Se $k = 0$ allora $car(A) = car(B) = 2$ e il sistema ammette infinite soluzioni del tipo
$$x_1 = t - 1; \quad x_2 = 2(t-1); \quad x_3 = t$$
- Se $k = -\frac{1}{4}$ allora $car(A) = 2$; $car(B) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzioni del tipo:
$$x_1 = -1; \quad x_2 = t - 2; \quad x_3 = t$$

5. Studiare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 - y^2 + 6y - 12x + 5$

Soluzione: $x = -2$; $y = 3$ punto di massimo locale; $x = 2$; $y = 3$ punto di sella.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 22 Gennaio 2020

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Soluzione

- Dominio: $]0, +\infty[$;
- $f(x) > 0 : \quad]1, +\infty[; \quad f(x) = 0 : \quad x = 1; \quad f(x) < 0 : \quad]0, 1[$;
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$;
- $f'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \quad \forall\, x \in D$;
- $f'(x) > 0 : \quad \forall\, x \in]0, e^2[; \quad f'(x) = 0 : \quad x = e^2$; (punto di massimo relativo); $\quad f'(x) < 0 : \quad \forall\, x \in]e^2, +\infty[$;
- $f''(x) = \dfrac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$;
- $f''(x) > 0 : \quad]e^{8/3}, +\infty[; \quad f''(x) = 0 : \quad x = e^{8/3}$; (punto di flesso); $\quad f''(x) < 0 : \quad]0, e^{8/3}[$;
- $f(D) = \;]-\infty, \dfrac{2}{e}]$; $\quad f$ biunivoca? NO. $x = e^2$ punto di massimo assoluto; $x = \frac{2}{e}$ massimo assoluto.

2. Approssimare la funzione $f(x) = \arctan(e^x)$ con il polinomio di Taylor di grado $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$.

   Soluzione: $f(x) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan(\sqrt{x-1})\, dx$$

   Soluzione: Ponendo $\sqrt{x-1} = t$ si ottiene $F(x) = x \arctan(\sqrt{x-1}) - \sqrt{x-1}$

4. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 4 & k-2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

Soluzione: Se $k \neq -1$; $k \neq 2$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{5}{k-2}$; $x_3 = -3$

- Se $k = 2$ allora $car(A) = 2$; $car(B) = 3$ e il sistema non ammette soluzioni;
- Se $k = -1$ allora $car(A) = 2$; $car(B) = 2$ e il sistema ammette soluzioni soluzioni del tipo:

$$x_1 = -\frac{t+3}{3}; \quad x_2 = -\frac{t+18}{9}; \quad x_3 = t$$

5. Ottimizzare la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ soggetta al vincolo $x + y = 1$.
Soluzione: $x = \frac{5}{4}$; $y = \frac{3}{4}$; $\lambda = -\frac{3}{2}$. Punto di minimo relativo vincolato.

Università di Bari - Dipartimento di Economia -

Prova scritta di Matematica per l'Economia L-Z- 05 Febbraio 2020

Cognome e nome .... Numero di matricola ....

1. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^2 (\ln x - 1)$$

Soluzione

- Dominio: $]0, +\infty[$;
- $f(x) > 0: \quad]e, +\infty[; \quad f(x) = 0: \quad x = e; \quad f(x) < 0: \quad]0, e[$;
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$;
- $f'(x) = x(2 \ln x - 1) \quad \forall x \in D$;
- $f'(x) > 0: \quad \forall x \in]e^{\frac{1}{2}}, +\infty[; \quad f'(x) = 0: \quad x = e^{\frac{1}{2}}$; (punto di minimo relativo); $f'(x) < 0: \quad \forall x \in]0, e^{\frac{1}{2}}[$;
- $f''(x) = 2 \ln x + 1$;
- $f''(x) > 0: \quad]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[; \quad f''(x) = 0: \quad x = e^{-\frac{1}{2}}$; (punto di flesso); $f''(x) < 0: \quad]0, e^{-\frac{1}{2}}[$;
- $f(D) = \quad [-\frac{e}{2}, +\infty[$; f biunivoca? NO. $x = e^{\frac{1}{2}}$ punto di minimo assoluto; $y = -\frac{e}{2}$ minimo assoluto.

2. Determinare un'approssimazione dell'equazione $\ln(x^2 + 1) - 4x^2 + 2 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

   Soluzione: $c_3 = 0.8125$

3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1)\, dx$$

Soluzione:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2x^3}{9} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} \arctan x + c$$

4. Studiare e a tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^2 (\ln x - 1)$$

5. Determinare un'approssimazione dell'equazione $\ln(x^2 + 1) - 4x^2 + 2 = 0$ con la precisione $\epsilon = \frac{1}{10}$ nell'intervallo $[0, 1]$.

6. Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1)\, dx$$

7. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ k & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

   Soluzione: Se $k \neq -4$ allora $car(A) = car(B) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione: $x_1 = \frac{9}{3k+12}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{6k-12}{3k+12}$

   - Se $k = -4$ allora $car(A) = 2$; $car(B) = 3$ e il sistema non ammette soluzioni;

8. Ottimizzare la funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 1$.
   Soluzione: Punti criciti sono:

$$P_1 = (0, 1, 2); \quad P_2 = (0, -1, 2); \quad P_3 = (1, 0, 1); \quad P_4 = (-1, 0, 1);$$

   P_1 e P_2 sono punti di massimo relativo vincolato; P_3 e P_4 sono punto di minimo relativo vincolato.