

**NOTE DALLE LEZIONI  
DI  
STATISTICA MEDICA  
ED ESERCIZI**

---

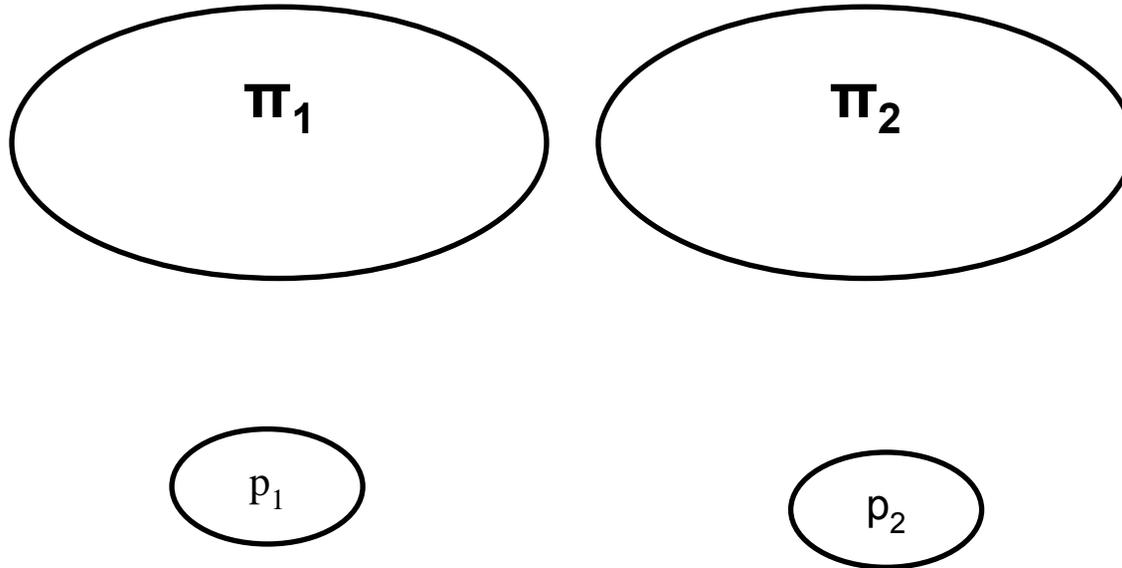
**VERIFICA DI IPOTESI  
PER IL CONFRONTO  
TRA DUE PROPORZIONI**

---

# IL PROBLEMA

Si vuole verificare se un nuovo trattamento per la cura dell'otite è più efficace di quello tradizionalmente utilizzato. A tal fine sono stati selezionati 200 pazienti di cui 100 trattati con il nuovo farmaco e 100 trattati con quello tradizionale. Sono stati valutati i pazienti guariti con il trattamento tradizionale  $n_1=78$  e quelli guariti con il nuovo trattamento  $n_2=90$ .

I due trattamenti producono lo stesso effetto oppure no?



## DATI

Si dispone del numero di pazienti trattati con due diverse terapie per una certa malattia.

$n_1 = 100$   $p_1 =$  proporzione di guariti nel primo gruppo  $= 78 / 100 = 0,78$

$n_2 = 100$   $p_2 =$  proporzione di guariti nel secondo gruppo  $= 90 / 100 = 0,90$

## ASSUNZIONI

- Campioni indipendenti.
- La variabile in studio che conta il numero di guarigioni (“successo”) sul totale delle prove (numerosità del campione): segue una distribuzione binomiale
- approssimabile ad una distribuzione di Gauss standard se  $n \rightarrow \infty$  e  $p \rightarrow 0,5$ .

## IPOSTESI

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: p_1 = p_2 \\ H_1: p_1 \neq p_2 \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad p_1 - p_2 = 0$$

# STATISTICA TEST

$$Z = \frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} =$$
$$= \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Dove

$$p = (X_1 + X_2) / (n_1 + n_2)$$

$$q = 1 - p$$

$$p_1 = X_1 / n_1$$

$$p_2 = X_2 / n_2$$

**CALCOLATE LA  
STATISTICA TEST  
E POI  
VERIFICATE IL RISULTATO**

# CALCOLO DELLA STATISTICA TEST

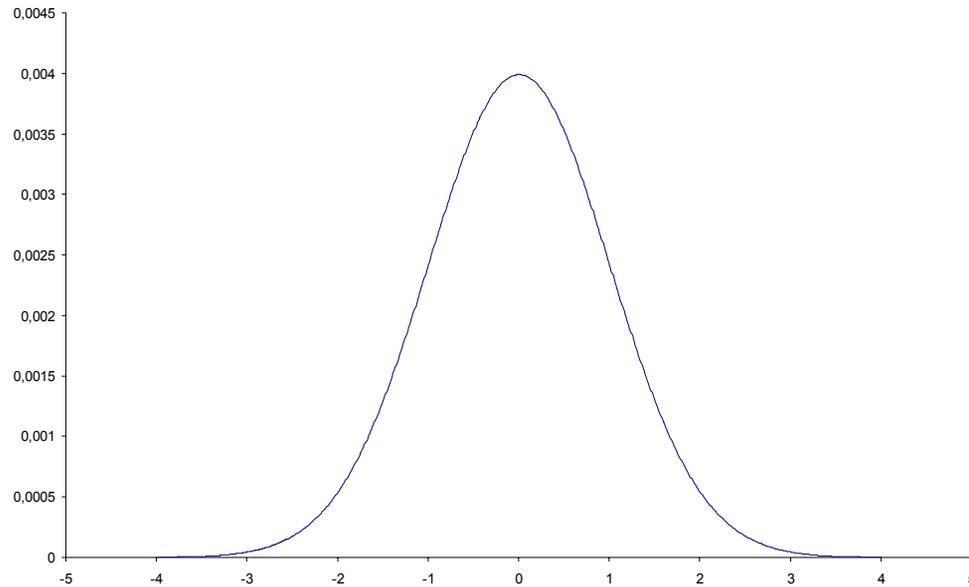
$$p = (78+90) / 200 = 168 / 200 = 0,84$$

$$q = 1-0,84 = 0,16$$

$$z = \frac{\frac{78-1/2}{100} - \frac{90-1/2}{100}}{\sqrt{0,84 \times 0,16 \times \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \right)}} =$$
$$= \frac{-0,12}{0,0518} = -2,32$$

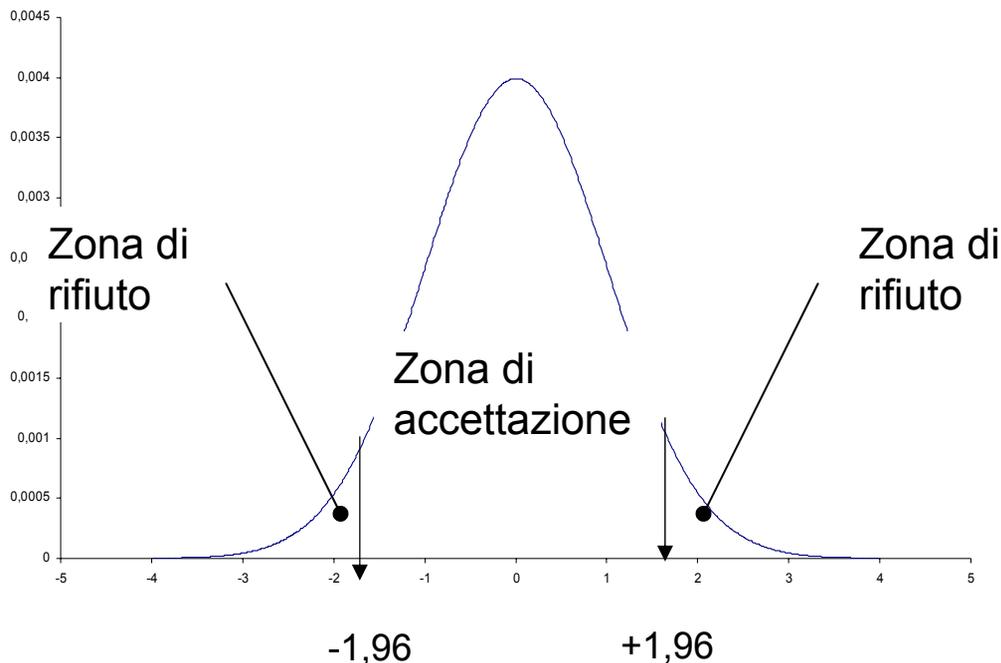
# DISTRIBUZIONE DELLA STATISTICA

Con l'ipotesi nulla vera, applicando il teorema del limite centrale, la statistica test segue una distribuzione di Gauss standard  $N(0,1)$ .



# REGOLA DI DECISIONE

- Fisso  $\alpha$ , la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera, accettabilmente bassa: 0,05.
- Si individuano in questo modo i limiti della zona di rifiuto (code);
- Sapendo che la distribuzione della statistica è di Gauss standard i limiti si ricercheranno nelle apposite tavole e saranno uguali ed opposti.



## Nel caso dell'esempio

### DECISIONE STATISTICA

$Z_{\text{cal}} = -2,32 < Z_{\text{tab}} = -1,96$  pertanto rifiuto  $H_0$

### DECISIONE DEL RICERCATORE

La differenza tra i due trattamenti non è casuale, il trattamento a cui è stato sottoposto il secondo gruppo è più efficace.

Quando non è possibile approssimare  
la distribuzione binomiale ad una Gauss

Il confronto di proporzioni

si effettua con il test  $X^2$

I DATI si inseriscono in una tabella 2x2

Criterio 1

Criterio2	1	2	Totale
1	a	b	a+b
2	c	d	c+d
Totale	a+c	b+d	N

## IPOSTESI

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \quad p_1 = p_2 \\ H_1: \quad p_1 \neq p_2 \end{array} \right.$$

## STATISTICA TEST

$$X^2 = \frac{N (ad - bc)^2}{(a + b) \times (c + d) \times (a + c) \times (b + d)}$$

$$X^2 = \frac{N (|ad - bc| - 0,5 N)^2}{(a + b) \times (c + d) \times (a + c) \times (b + d)}$$

Nella seconda formula c'è la correzione per la continuità di Yates

**UTILIZZATE I DATI  
DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE,  
COSTRUIRE LA TABELLA 2x2  
E QUINDI  
EFFETTUATE IL CONFRONTO**

Nel caso del precedente esempio

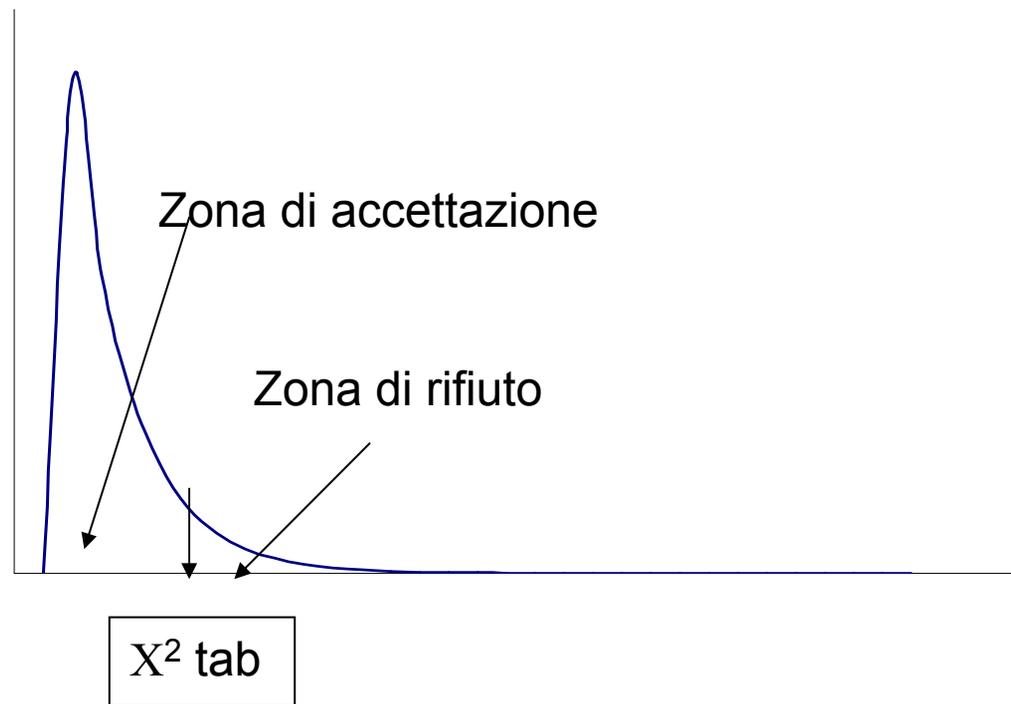
Criterio 1

Criterio2	nuovo	vecchio	Totale
Guariti	90	78	168
Non guariti	10	22	32
Totale	100	100	200

$$X^2 = \frac{200(90 \times 22 - 78 \times 10)^2}{100 \times 100 \times 168 \times 32} = 5,357$$

# DISTRIBUZIONE DELLA STATISTICA TEST

La distribuzione della statistica test è una  $X^2$  ed è caratterizzata dai gradi di libertà.



# REGOLA DI DECISIONE

**Fissato  $\alpha$  accettabilmente piccolo (0,05), troverò sulle tavole  $X^2$  un valore in corrispondenza di  $\alpha$  prescelto e dei gradi di libertà della statistica che nelle tabelle 2x2 sono sempre pari a 1 ( $X^2$  tabulato è 3,841).**

**Se il valore calcolato della statistica è maggiore del valore tabulato rifiuterò l'ipotesi nulla, se invece il valore calcolato è minore del tabulato accetterò l'ipotesi nulla.**

Nel nostro esempio

## REGOLA DI DECISIONE

Con  $\alpha = 0,05$  e 1 grado di libertà il valore  $X^2$  tabulato è 3,841.

Rifiuto l'ipotesi nulla poiché  
 $X^2_{\text{calc}} = 5.37 > X^2_{\text{tab}} = 3,841$

I due trattamenti producono un effetto differente