

<b>Nome docente</b>	Tagliatela Giovanni
<b>Corso di laurea</b>	Scienze Statistiche
<b>Insegnamento</b>	Analisi matematica e calcolo delle probabilità
<b>Anno accademico</b>	2022/2023
<b>Periodo di svolgimento</b>	I semestre
<b>Crediti formativi universitari (CFU)</b>	10 CFU
<b>Settore scientifico disciplinare</b>	MAT/05
<b>Pagina web docente</b>	<a href="http://www.uniba.it/docenti/tagliatela-giovanni">http://www.uniba.it/docenti/tagliatela-giovanni</a>

### **Pre-requisiti**

Il corso è la prosecuzione del corso di Istituzioni di Analisi Matematica.

### **Conoscenze e abilità da acquisire (Obiettivi)**

Il corso si propone di fornire gli strumenti del calcolo differenziale ed integrale per funzioni di più variabili e le principali nozioni del calcolo delle probabilità, delle variabili aleatorie e i loro indicatori. Tali argomenti saranno utili per affrontare con successo altri insegnamenti del corso di laurea e la successiva attività professionale di statistico. Le lezioni sono orientate a potenziare ed affinare le capacità logiche deduttive e il senso critico dello studente, per abituarlo ad esprimersi con precisione e proprietà di linguaggio.

### **Programma dettagliato**

Calcolo combinatorio.

Diversi modi di estrarre un campione di  $k$  elementi da un insieme di  $n$  oggetti: campioni ordinati e non ordinati, con o senza ripetizione. Disposizioni, permutazioni, combinazioni. Fattoriale e coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton. Coefficienti binomiali generalizzati e coefficienti multinomiali. Probabilità combinatoria.

Nozioni sulla cardinalità degli insiemi: insiemi numerabili e non numerabili; numerabilità degli insiemi dei numeri naturali, interi e razionali; non numerabilità dell'insieme dei numeri reali.

Serie.

Serie numeriche convergenti, divergenti e oscillanti; somma di una serie. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Teorema sulla serie geometrica. Serie a termini (definitivamente) positivi. Serie armonica e serie armonica generalizzata. Criterio del confronto, del confronto asintotico, della radice e del rapporto. Serie assolutamente convergenti. Serie a termini di segno alterno; teorema di Leibniz. Serie di potenze: raggio di convergenza, derivazione e integrazione termine a termine di una serie di potenze, serie di Taylor di alcune funzioni elementari.

Teoria assiomatica della probabilità.

Algebre di insiemi e logica degli eventi. Equivalenza tra le operazioni logiche sugli eventi e operazioni sugli insiemi. Eventi incompatibili ed eventi necessari. Algebre e sigma-algebre di insiemi. Sigma-algebra generata, sigma-algebra di Borel. Limite di una successione di insiemi.

Misura di probabilità e relative proprietà: probabilità del complementare, della differenza di due insiemi, formula di inclusione-esclusione, monotonia e continuità della probabilità, disuguaglianze di Boole e di Bonferroni. Eventi quasi certi ed eventi quasi impossibili.

Probabilità condizionata. Legge della probabilità composta. Legge della probabilità totale. Teorema di Bayes. Indipendenza stocastica tra due o più eventi. Eventi positivamente o negativamente correlati.

Variabili aleatorie discrete.

Distribuzione. Funzione di ripartizione. Distribuzioni discrete di uso comune: uniforme, bernoulliana, binomiale, geometrica, binomiale negativa, ipergeometrica, di Poisson. Moda, mediana, media, momenti, momenti centrati, varianza, scarto quadratico medio di una variabile aleatoria discreta. Indipendenza tra due o più variabili aleatorie. Trasformazioni di variabili aleatorie discrete.

Integrali impropri.

Esempi e proprietà. Formule di integrazione (impropria) per sostituzione e per parti. Criterio del confronto e del confronto asintotico. Criterio del confronto serie-integrale.

Variabili aleatorie continue.

Densità. Funzione di ripartizione. Densità di uso comune: uniforme, esponenziale, di Cauchy, gamma, beta, normale, chi-quadro,  $t$  di student,  $F$  di Snedecor-Fisher. Moda, mediana, media, momenti, momenti centrati, varianza, scarto quadratico medio di una variabile aleatoria continua. Indipendenza tra due o più variabili aleatorie. Trasformazioni di variabili aleatorie continue.

Topologia di  $\mathbb{R}^n$

Riferimento cartesiano nel piano, nello spazio tridimensionale, e in  $\mathbb{R}^n$ . Operazioni tra vettori: somma, prodotto per uno scalare e prodotto scalare. Vettori ortogonali in  $\mathbb{R}^n$ . Norma e distanza euclidea in  $\mathbb{R}^n$ . Sfera aperta, sfera chiusa e superficie sferica. Punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione per un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Insiemi aperti e insiemi chiusi di  $\mathbb{R}^n$ : esempi e proprietà. Insiemi limitati.

Funzioni scalari di più variabili e funzioni a valori vettoriali.

Immagine, grafico e componenti di una funzione. Linee coordinate e curve di livello per una funzione di due variabili. Superfici di livello per funzioni di  $n$  variabili. Convergenza e continuità per funzioni scalari o vettoriali di  $n$  variabili. Le funzioni costanti e le funzioni proiezione sono funzioni continue. Teoremi sui limiti. Continuità delle funzioni elementari di  $n$  variabili. Se  $f$  è una funzione continua, l'insieme delle soluzioni di una disequazione del tipo  $f(x) < c$  oppure  $f(x) > c$ , (risp.  $f(x) = c$ ,  $f(x) \leq c$  o  $f(x) \geq c$ ), è un insieme aperto (risp. chiuso). Una funzione vettoriale è convergente (continua) se, e solo se, tutte le sue componenti sono convergenti (continue). Insiemi connessi per archi in  $\mathbb{R}^n$ . Teoremi degli zeri, di Bolzano, di Weierstrass.

Calcolo differenziale per funzioni di  $n$  variabili

Derivate parziali e derivate direzionali, gradiente e differenziale di una funzione di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ . Differenziabilità. Condizioni necessarie per la differenziabilità. Condizione sufficiente per la differenziabilità. Iperpiano tangente e retta normale ad un insieme di livello di una funzione differenziabile. Vettore derivata di una funzione di una variabile a valori vettoriali: suo significato geometrico. Matrice jacobiana e differenziale di una funzione di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^k$ . Differenziale della funzione composta. Derivate parziali di ordine superiore; teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione. Matrice hessiana di una funzione di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ . Polinomio di Taylor del secondo ordine. Punti di minimo e massimo relativo, punti di sella: condizioni necessarie e condizioni sufficienti. Funzioni (strettamente) convesse o concave; esempi e proprietà. Caratterizzazione delle funzioni convesse, concave, ecc. Funzioni convesse ed ottimizzazione. Punti di minimo e massimo vincolato: moltiplicatori di Lagrange.

Calcolo integrale per funzioni di due variabili

Area di un rettangoloide e di un dominio normale rispetto ad un asse. Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan e loro misura. Integrabilità secondo Riemann per funzioni limitate su un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^2$  e loro integrale. L'integrale come limite di somme di Cauchy. Proprietà dell'integrale. Integrabilità delle funzioni continue in un dominio normale rispetto ad un asse: formule di riduzione. Integrabilità delle funzioni continue in un insieme chiuso e misurabile. Integrabilità delle funzioni generalmente continue e limitate in un insieme misurabile. Cambio di variabili in un integrale doppio. Coordinate polari. Calcolo di integrali mediante trasformazione in coordinate polari. Integrali impropri in 2 o più variabili. Integrale della funzione Gaussiana. Cenni alla misura e all'integrazione secondo Lebesgue.

Variabili aleatorie multidimensionali.

Distribuzione congiunta e distribuzioni marginali. Funzione di ripartizione congiunta e funzioni di ripartizione marginali. Distribuzioni condizionate. Trasformazioni di variabili aleatorie discrete e continue. Valori caratteristici delle distribuzioni multidimensionali: momenti misti, coefficiente di correlazione, valori attesi condizionati. Densità normale multivariata.

Convergenza di variabili aleatorie.

Funzione caratteristica, funzione generatrice dei momenti e funzione generatrice delle probabilità. Successioni di variabili aleatorie. Convergenza in legge (in distribuzione). Convergenza della distribuzione ipergeometrica alla binomiale. Teorema degli eventi rari. Teorema del Limite Centrale. Disuguaglianza di Markov e di Chebychev. Convergenza in probabilità e legge debole dei grandi numeri. Convergenza quasi certa e legge forte dei grandi numeri. Cenni ad altri tipi di convergenza.

### **Riferimenti bibliografici e materiali didattici**

M. Brabanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Matematica, Calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichelli.

G. Dall'Aglio, Calcolo delle probabilità, Zanichelli.

D.M. Cifarelli, Introduzione al calcolo delle probabilità, McGraw-Hill.

K. Siegrist, F.M. Stefanini, Laboratorio virtuale di probabilità e statistica,  
<http://local.disia.unifi.it/VL>

### **Organizzazione della didattica**

- Cicli interni di lezione: NO
- Corsi integrativi: NO
- Esercitazioni: SI
- Seminari: NO
- Attività di laboratorio: NO
- Project work: NO
- Visite di studio: NO

### **Modalità di erogazione delle attività formative**

Lezioni frontali teoriche corredate da esempi ed esercizi; alcune ore vengono dedicate per intero allo svolgimento di esercizi. La didattica frontale può essere svolta anche in modalità a distanza mediante l'utilizzo di una piattaforma di didattica online.

### **Modalità di accertamento delle conoscenze**

L'esame consiste in una prova scritta e una prova orale, il voto finale è una valutazione globale delle due prove. Nella prova scritta è richiesta la risoluzione di alcuni esercizi sui vari argomenti del corso. La prova orale prevede la discussione della prova scritta e la verifica delle

conoscenze su ulteriori argomenti che non sono oggetto della prova scritta: sono richieste le definizioni dei concetti e gli enunciati dei teoremi trattati nel corso. Sono altresì richieste le dimostrazioni dei principali risultati. L'ammissione alla prova orale è subordinata al raggiungimento della sufficienza nella prova scritta.

L'esame può svolgersi anche mediante l'utilizzo di tecnologie digitali. In tal caso le modalità di svolgimento dell'esame e di accertamento delle conoscenze verranno indicate sulla pagina personale del docente e sul portale del corso di studio.