1 *Ottima combinazione dei fattori produttivi*

Si consideri un'impresa con la seguente funzione di produzione

$$Q = \sqrt{L}\sqrt{K}$$

e i prezzi dei fattori lavoro e capitale rispettivamente $w = 4$ e $r = 9$. Determinare la combinazione ottima dei fattori nel caso in cui l'impresa possa sostenere una spesa massima per l'acquisto dei fattori pari a 1200 e sapendo che $MRTS = \frac{K}{L}$.

1. Per trovare la combinazione ottimale dei fattori si deve risolvere il sistema (come per la scelta del panire ottimo)

$$MRTS = \frac{w}{r}$$
$$TC = rK + wL$$

ostituendo le informazioni della traccia, diventa

$$\frac{K}{L} = \frac{4}{9}$$
$$1200 = 9K + 4L$$

da cui si ottiene $K^* = 66.\overline{6}$ e $L^* = 150$.

2 *Ottima combinazione dei fattori produttivi e curve di costo*

Si consideri un'impresa con la seguente funzione di produzione

$$Q = LK$$

e i prezzi dei fattori lavoro e capitale rispettivamente $w = 1$ e $r = 4$.

1. Determinare la combinazione ottima dei fattori quando il livello desiderato di produzione e' pari a $Q = 4$ e sapendo che $MRTS = \frac{K}{L}$.

   Per trovare la combinazione ottimale dei fattori si deve risolvere il sistema

$$\begin{aligned} MRTS &= \frac{w}{r} \\ Q(K, L) &= 4 \end{aligned}$$

che diventa

$$\begin{aligned} \frac{K}{L} &= \frac{1}{4} \\ KL &= 4 \end{aligned}$$

ne deriva che $K^* = 1$ e $L^* = 4$.

2. Quanto vale il costo di produzione in corrispondenza della scelta ottima?

   Il costo è dato da

$$
\begin{aligned}
TC &= rK + wL \\
TC &= 1 \times 4 + 4 \times 1 = 8
\end{aligned}
$$

3 *Curve di costi in concorrenza perfetta*

Un'impresa in concorrenza perfetta ha la seguente funzione di costo di breve periodo:

$$TC = 600 + 4Q^2$$

1. Si individui il costo marginale, il costo fisso, il costo variabile, costo variabile medio.

   $MC = 8Q$; $FC = 600$; $VC = 4Q^2$; $AVC = 4Q$.

2. Attualmente l'impresa produce 60 unita'. In corrispondenza di tale livello di produzione all'impresa conviene continuare a produrre?

   Sostituendo $Q = 60$ nella definizione di costo marginale e costo variabile medio otteniamo

$$
\begin{aligned}
MC(Q &= 60) = 8Q \Rightarrow 8 \times 60 = 480 \\
AVC(Q &= 60) = 4Q \Rightarrow 4 \times 60 = 240 \\
MC &> AVC
\end{aligned}
$$

   dato che il costo marginale e' maggiore del costo variabile medio, l'impresa dovrebbe continuare a produrre (siamo nel tratto crescente della curva dei costi marginali).

4 *Concorrenza perfetta*

Un' impresa concorrenziale ha la seguente funzione di costo di breve periodo

$$TC = 30 + 7Q + Q^2$$

dove

$$MC = 7 + 2Q$$

1. Calcolare il profitto economico nel caso in cui il prezzo di mercato sia $P = 17$. All'impresa conviene continuare a produrre o cessare l'attivita'?

   Ricordando che la condizione $MR = MC$ in concorrenza equivale a $P = MC$: $17 = 7 + 2Q \Rightarrow Q^* = 5$.

   Il profitto economico $\pi = TR - TC = (17 \times 5) - \left(30 + 7 \times 5 + 5^2\right) = -5$.

inoltre, poiche' $AVC = \frac{7Q+Q^2}{Q} = 7 + Q$

$$\begin{aligned} AVC(Q^* &= 5) = 12 \\ MC(Q^* &= 5) = 17 \end{aligned}$$

all'impresa converra' produrre anche se il profitto economico e' negativo.

2. Ricavate l'equazione della curva di offerta di settore nel caso in cui le imprese siano $n = 10$ tutte aventi la stessa funzione di costo.

   Calcoliamo inizialmente prezzo nel punto di chiusura (al di sotto del quale non conviene produrre) cioe' la quantita' corrispondente al minimo dei costi variabili medi in cui vale la seguente identita' $AVC = MC$

$$(AVC)\ \frac{7Q + Q^2}{Q} = (MC)\ 7 + 2Q$$
$$\frac{7Q + Q^2 - 7Q - 2Q^2}{Q} = 0$$
$$Q_{chiusura} = 0$$
$$P_{chiusura} = 7 + 2Q_{chiusura} = 7$$

   dunque la curva di offerta sara' definita dal seguente sistema

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{1}{2}(P - 7), \forall P > 7 \\ Q_i &= 0, \forall P \leq 7 \end{aligned}$$

   la funzione di offerta di settore sara' la somma di quelle individuali. Se $n = 10$, nel caso in cui l'offerta è diversa da zero, la funzione di offerta di settore sara' pari a

$$Q = \sum_i Q_i = n \times Q_i = 10 \times \left[\frac{1}{2}(P - 7)\right] = 5P - 35$$

   ovvero

$$P = \frac{1}{5}Q + 7$$

3. Nel caso in cui la domanda sia descritta da $P = 49 - 4Q$ qual'e' il prezzo di equilibrio di mercato? qual'e' la quantita' prodotta da ogni impresa? calcolate profitto e surplus ?

   Per individuare la coppia prezzo-quantita' di equilibrio e' necessario mettere a sistema domanda e offerta di mercato

$$\begin{aligned} P &= 49 - 4Q \\ P &= \frac{1}{5}Q + 7 \end{aligned}$$

da cui deriva che $Q^* = 10$. Se $n = 10$ ogni impresa produce $Q_i^* = 1$ unita' di output. Sostituendo Q_i^* in una delle due funzioni otteniamo il prezzo di equilibrio $P^* = 9$. Il profitto della singola impresa e' dato da

$$\begin{aligned}\pi &= TR - TC \\ &= P^* Q_i^* - \left(30 + 7Q_i^* + Q_i^{*2}\right) \\ &= 9 - (30 + 7 \times 1 + 1^2) = -29\end{aligned}$$

L'impresa ottiene un profitto negativo. Come prova possiamo controllare che il prezzo di pareggio sia superiore al prezzo di mercato. Ricordando che il prezzo di pareggio corrisponde al minimo del costi medi totali sappiamo che il prezzo di pareggio soddisfa la seguente identita' $ATC = MC$

$$(ATC)\ \frac{30 + 7Q + Q^2}{Q} = (MC)\ 7 + 2Q$$

$$\frac{30 + 7Q + Q^2 - 7Q - 2Q^2}{Q} = 0$$

$$\frac{30 - Q^2}{Q} = 0; Q = \sqrt{30}$$

$$Q_{pareggio} = 5,5$$

$$P_{pareggio} = 7 + 2Q_{pareggio} = 18$$

Il surplus del produttore è dato dalla differenza tra ricavo totale e costo variabile totale in corrispondenza della quantità Q per cui $P = MC$, e corrisponde dunque alla somma tra profitto economico e costi fissi:

$$Surplus_i = -29 + 30 = 1$$

5 *Concorrenza perfetta*

Un' impresa in concorrenza perfetta opera con altre 49 imprese identiche e fronteggia la seguente funzione di lungo periodo

$$TC = 40Q - 32Q^2 + 8Q^3$$

dove

$$MC = 40 - 64Q + 24Q^2$$

1. qual'è il prezzo di lungo periodo del settore?

   Nel mercato concorrenziale i profitti economici devono essere nulli nel lungo periodo sara' dunque verificata la condizione per cui $LAC = MC$ che garantisce il minimo che costi medi.

   $$(LAC)\ 40 - 32Q + 8Q^2 = (MC)\ 40 - 64Q + 24Q^2$$

da cui

$$16Q(Q-2) = 0 \Rightarrow \ Q_i = 2$$

e' la quantita' prodotta da una singola impresa. Il prezzo di mercato di lungo periodo si trova sostituendo Q_i nella curva di costo marginale

$$P = 40 - 64 \times 2 + 24 \times 2^2 = 8$$

Come prova possiamo controllare che il $\pi = 0$ quando $Q_i = 2$ e $P = 8$.

$$\pi = TR - TC = (8 \times 2) - (40 \times 2 - 32 \times 2^2 + 8 \times 2^3) = 0$$

2. Qual'e' la quantita' scambiata in equilibrio sul mercato del bene?

   La quantita' scambiata in equilibrio sara' pari alla quantita' prodotta da ciascuna impresa per il numero di imprese nel mercato $Q = nQ_i = 2 \times 50 = 100$.