

Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie Agrarie

Corso Integrato: Matematica e Statistica

Modulo: Matematica (6 CFU)

(4 CFU Lezioni +2 CFU Esercitazioni)

Prof. Ing. S. Pascuzzi

Materiale di studio

- ✓ **Appunti dalle lezioni**
- ✓ **BIGATTI Anna Maria – ROBBIANO Lorenzo**

MATEMATICA DI BASE

Casa Editrice Ambrosiana

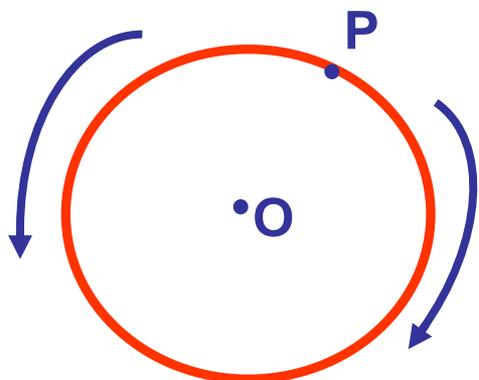
- ✓ **ZWIRNER Giuseppe**

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

Parte prima CEDAM Editrice

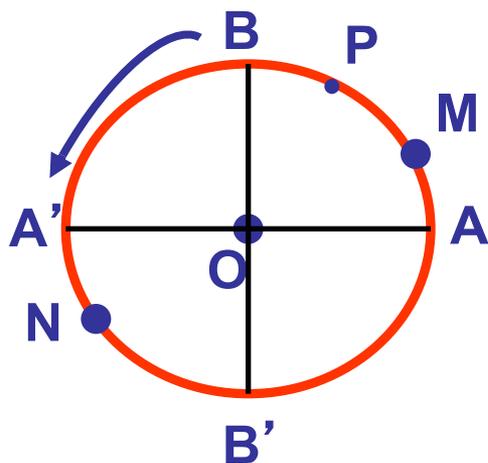
Elementi di:
Trigonometria

Circonferenza ed archi orientati



Circonferenza orientata \longrightarrow Verso positivo

Verso positivo \longleftrightarrow Verso antiorario

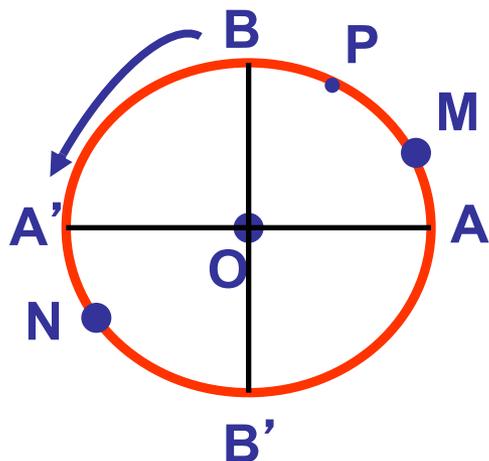


A origine degli archi

Arco \widehat{AP} orientato positivamente se un punto mobile (M) lo descrive, a partire da A, muovendosi sulla circonferenza **in senso antiorario**

Esempio. – arco \widehat{AMP} orientato positivamente; arco \widehat{ANP} orientato negativamente

Circonferenza ed archi orientati



Misura arco orientato: misura dell' arco preceduta da segno + o -

Esempio : arco $\widehat{AMB} = +\pi/2$ ($+90^\circ$) ;

arco $\widehat{AB'B} = -3/2\pi$ (-270°)

Archi orientati:

- Supplementari

- somma = $+\pi$

- Complementari

- somma = $+\pi/2$

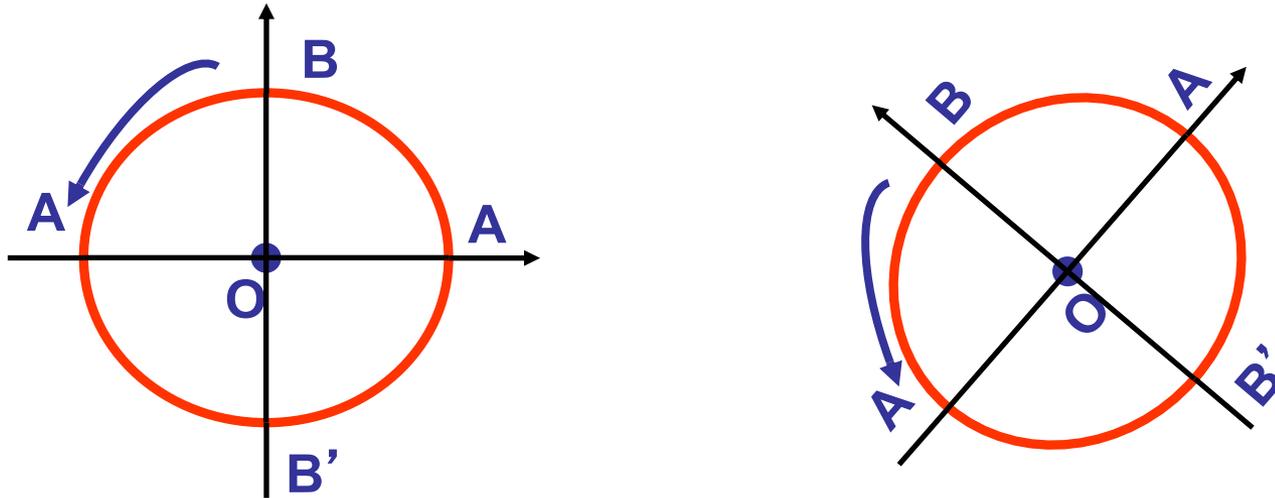
- Opposti

- somma = 0

- Esplementari

- somma = $+2\pi$

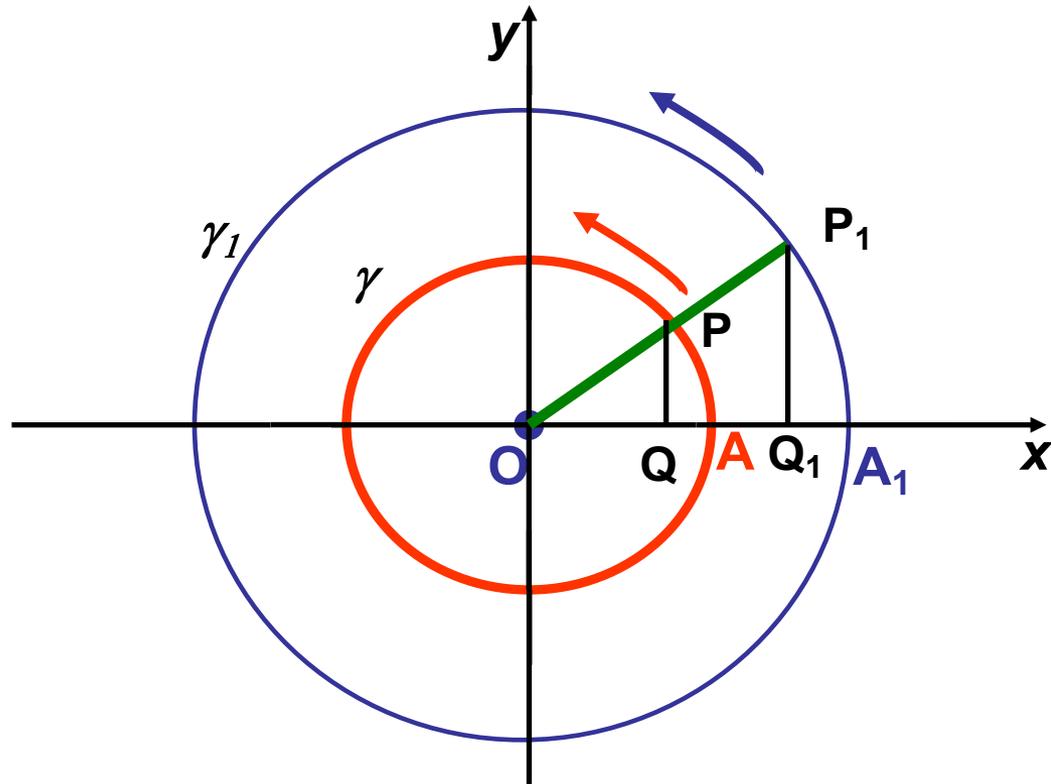
Sistema cartesiano associato ad una circonferenza



Su una circonferenza orientata di centro O si fissi un punto A , da assumersi come origine degli archi, ed il punto B tale che l'arco orientato $\overset{\frown}{AB}$ abbia per misura, in radianti $\pi/2$

Chiameremo sistema cartesiano ortogonale associato a tale circonferenza, il sistema cartesiano avente per origine il centro O , per semiasse positivo delle x la semiretta OA , e per semiasse positivo delle y la semiretta OB

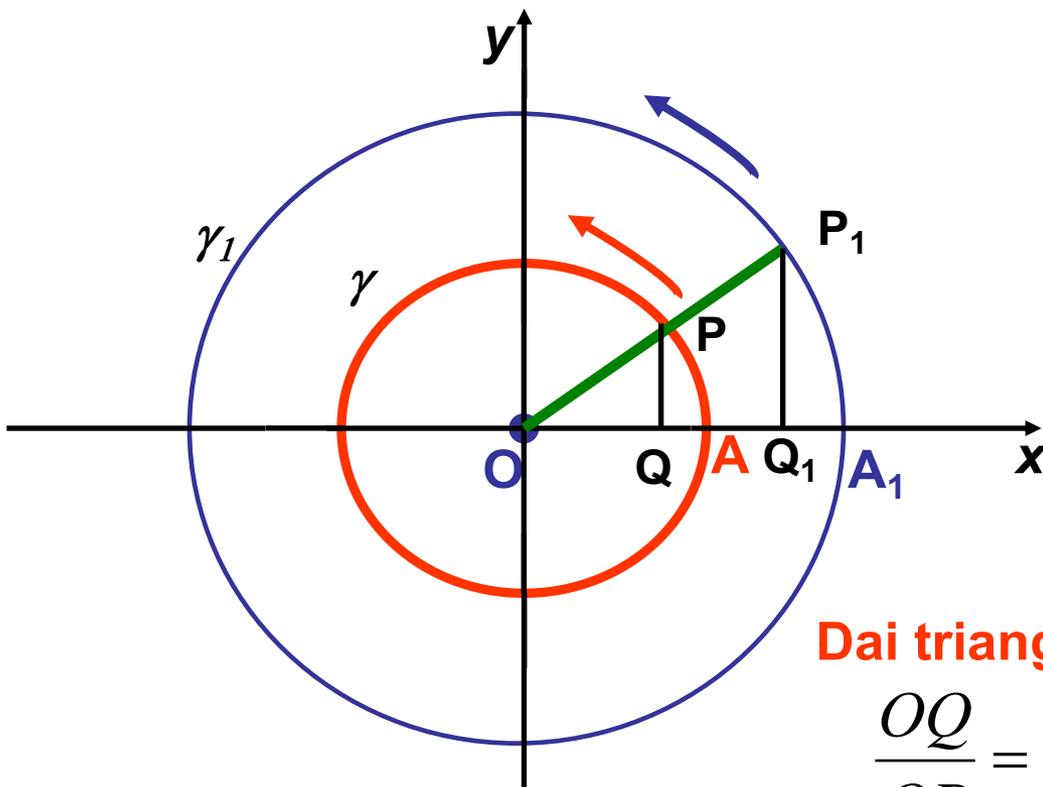
Circonferenza trigonometrica



Circonferenza trigonometrica – *Qualsiasi circonferenza orientata sulla quale sia stato fissato il sistema cartesiano ad essa associato, e si assume il raggio di questa circonferenza come unità di misura dei segmenti*

Circonferenza trigonometrica

Teorema – In una circonferenza trigonometrica le coordinate dell' estremo P di un arco orientato, sono due numeri che dipendono **soltanto** dall'ampiezza dell'arco considerato, e non dalla circonferenza sopra la quale giace l'arco



$$x_P = \frac{OQ}{OP} \quad y_P = \frac{QP}{OP}$$

$$x_{P_1} = \frac{OQ_1}{OP_1} \quad y_{P_1} = \frac{Q_1P_1}{OP_1}$$

si tratta di provare:

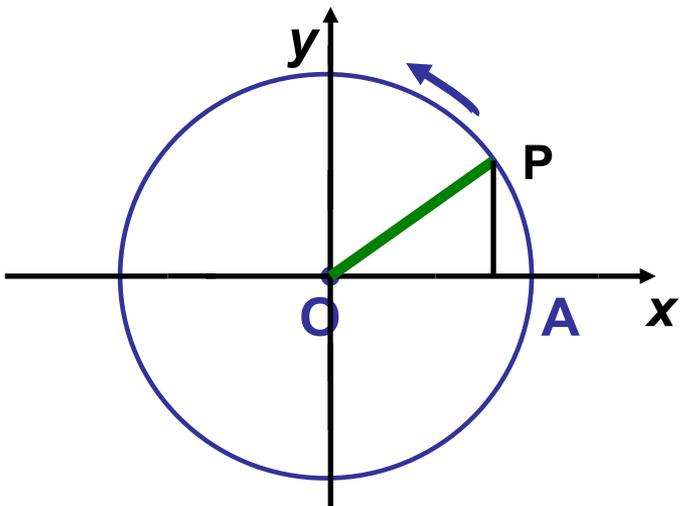
$$x_P = x_{P_1} \quad y_P = y_{P_1}$$

Dai triangoli simili OPQ e OP_1Q_1 , si ha:

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OQ_1}{OP_1} \quad \frac{QP}{OP} = \frac{Q_1P_1}{OP_1}$$

che è quanto si voleva dimostrare

Definizione del seno di un arco orientato



Definizione – *Sopra una circonferenza trigonometrica si consideri l'arco orientato \widehat{AP} , di origine A.*

L'ordinata dell'estremo P dell'arco si chiama seno dell'arco orientato AP, e si scrive: $\text{sen } \widehat{AP}$

Se α indica la misura in gradi o in radianti dell'arco orientato \widehat{AP} si scrive $\text{sen } \alpha$

Esiste il seno di un qualsiasi arco orientato

$$\text{sen } 0 = 0$$

$$\text{sen } \pi/2 = 1$$

$$\text{sen } \pi = 0$$

$$\text{sen } 3/2\pi = -1$$

$$\text{sen } 2\pi = 0$$

$$\text{sen } 0 = 0$$

$$\text{sen } 90^\circ = 1$$

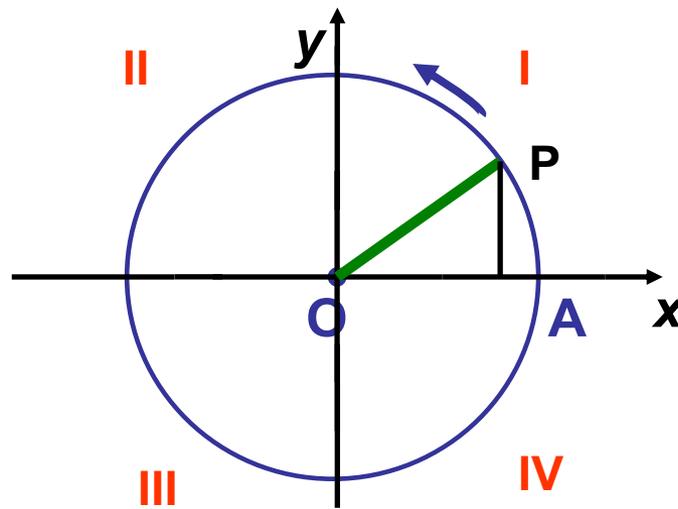
$$\text{sen } 180^\circ = 0$$

$$\text{sen } 270^\circ = -1$$

$$\text{sen } 360^\circ =$$

0

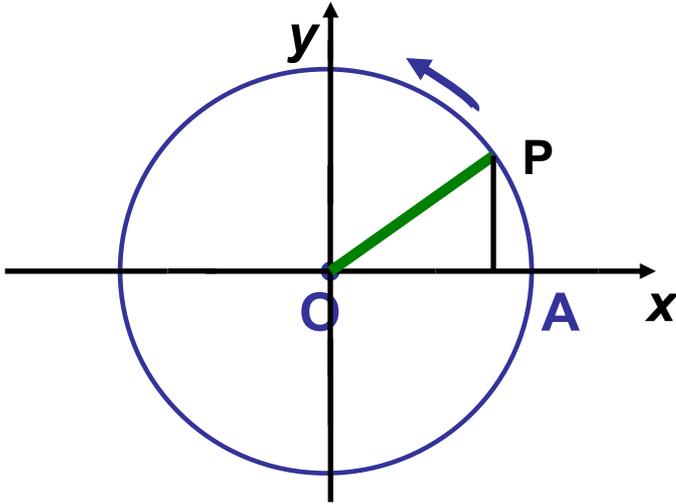
Variazione del seno



Il seno di un arco orientato è sempre un numero compreso fra -1 e +1, estremi inclusi

*Il seno di un arco orientato è **positivo** se l'estremo dell'arco cade nel I o II quadrante; è **negativo** se cade nel III o IV quadrante*

Definizione del coseno di un arco orientato



Definizione – *Sopra una circonferenza trigonometrica si consideri l'arco orientato $\overset{\curvearrowright}{AP}$, di origine A.*

L'ascissa dell'estremo P dell'arco si chiama coseno dell'arco orientato AP, e si scrive: $\cos \overset{\curvearrowright}{AP}$

Se α indica la misura in gradi o in radianti dell'arco orientato $\overset{\curvearrowright}{AP}$ si scrive $\cos \alpha$

Esiste il coseno di un qualsiasi arco orientato

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos \pi/2 = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\cos 3/2\pi = 0$$

$$\cos 2\pi = 1$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

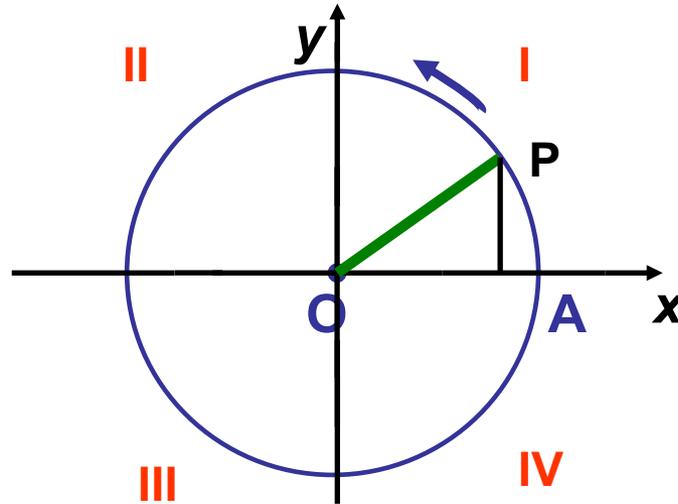
$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\cos 270^\circ = 0$$

$$\cos 360^\circ =$$

1

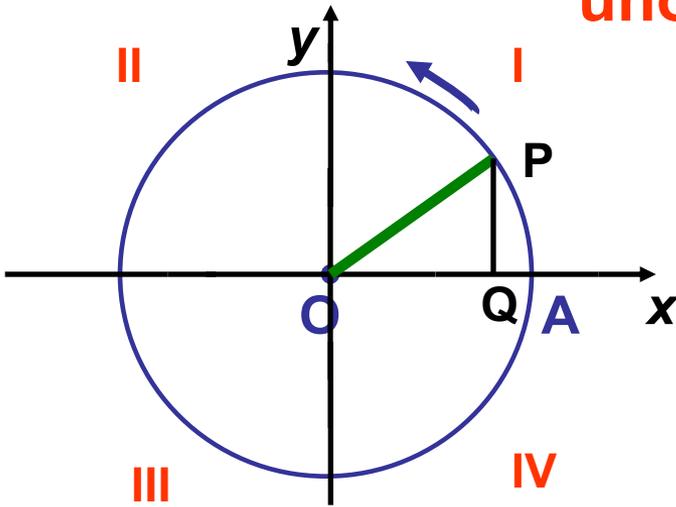
Variazione del coseno



Il coseno di un arco orientato è sempre un numero compreso fra -1 e +1, estremi inclusi

*Il **coseno** di un arco orientato è **positivo** se l'estremo dell'arco cade nel I o IV quadrante; è **negativo** se cade nel II o III quadrante*

Relazione fondamentale fra il seno e il coseno di uno stesso arco orientato



Sia α la misura dell'arco orientato \widehat{AP} sulla circonferenza trigonometrica

Detta Q la proiezione ortogonale di P sull'asse delle x , per definizione si ha:

$$OP = 1 \qquad \text{sen} \alpha = \overline{QP} \qquad \text{cos} \alpha = \overline{OQ}$$

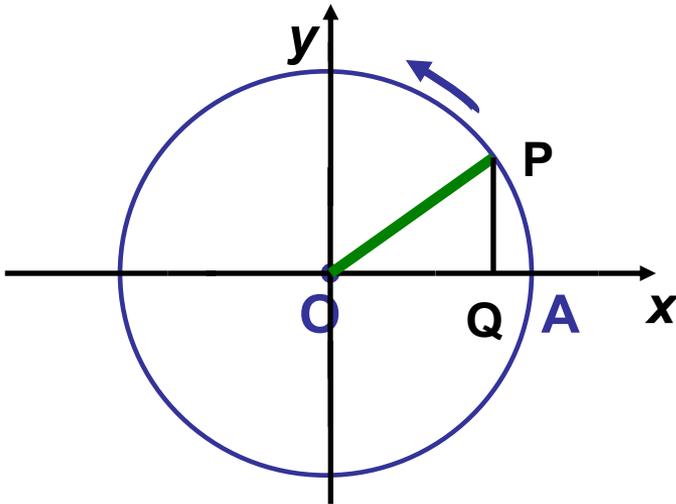
Dal triangolo rettangolo OQP , per il teorema di Pitagora, si ricava:

$$\overline{QP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 \qquad \text{e quindi:} \qquad \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \text{sen} \alpha = \text{cos} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ \text{cos} \alpha = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \end{cases}$$

Definizione di tangente di un arco orientato



Definizione – *Sopra una circonferenza trigonometrica si consideri l'arco orientato $\overset{\curvearrowright}{AP}$, di origine A.*

Il rapporto tra il seno e il coseno dell'arco orientato $\overset{\curvearrowright}{AP}$ si chiama tangente, e si scrive: $tg \overset{\curvearrowright}{AP}$

Se α indica la misura in gradi o in radianti dell'arco orientato $\overset{\curvearrowright}{AP}$

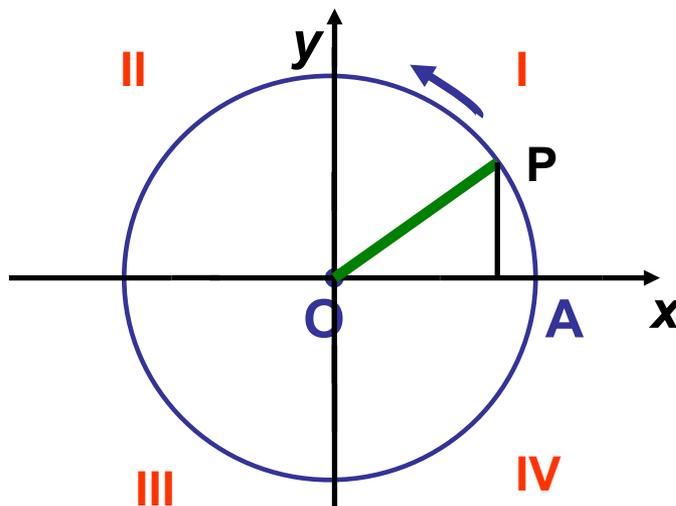
$$AP \text{ si scrive } tg\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha}$$

Non esiste la tangente degli archi orientati le cui misure, in radianti sono $\pm \pi/2$, oppure $\pm 3/2\pi$

$$tg0 = \frac{\text{sen}0}{\text{cos}0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$tg\pi = \frac{\text{sen}\pi}{\text{cos}\pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

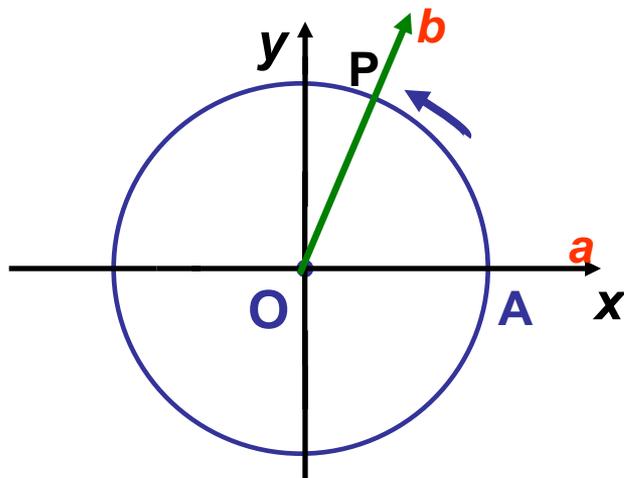
Variazione della tangente



La tangente di un arco orientato, al variare dell'arco, può assumere qualunque valore, positivo, negativo o nullo, cioè varia, come suol dirsi, da $-\infty$ a $+\infty$.

La tangente di un arco orientato è positiva se l'estremo dell'arco cade nel I e III quadrante; è, invece, negativa se cade nel II o IV quadrante

Funzioni trigonometriche di un angolo orientato



Definizione – Dato un angolo orientato \widehat{ab} , di vertice O , si associ ad esso una circonferenza trigonometrica avente il semiasse positivo delle x coincidente con il primo lato a dell'angolo e, per centro, il punto O .

Si dica P il punto d'intersezione del secondo lato b dell'angolo con la circonferenza, ed A l'origine degli archi.

Si chiama **seno** dell'angolo \widehat{ab} il seno dell'arco orientato \widehat{AP} ; **coseno** dell'angolo \widehat{ab} il coseno dell'arco orientato \widehat{AP} ; **tangente** dell'angolo \widehat{ab} la tangente dell'arco orientato \widehat{AP} :

$$\text{sen } \widehat{ab} = \text{sen } \widehat{AP}$$

$$\text{cos } \widehat{ab} = \text{cos } \widehat{AP}$$

$$\text{tg } \widehat{ab} = \text{tg } \widehat{AP}$$

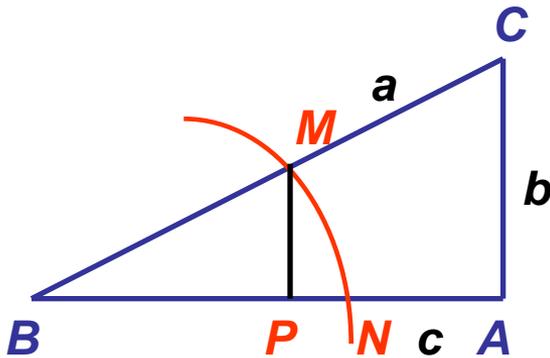
Funzioni trigonometriche di alcuni angoli notevoli

Dalle definizioni precedentemente date, si possono facilmente ricavare i valori del **seno**, **coseno** e **tangente** degli angoli **30°** , **45°** **60°** .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}30^\circ = \frac{1}{2} \\ \text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{cos}60^\circ = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{tg}45^\circ = 1 \\ \text{tg}60^\circ = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo

Sia ABC un triangolo rettangolo in A e indichiamo con a, b, c , le misure dei lati opposti, rispettivamente, agli angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$



$$AC : PM = BC : BM$$

$$AC : PM = AB : BP$$

essendo: $\overline{AC} = b$ $\overline{AB} = c$ $\overline{BC} = a$
 $\overline{BM} = 1$ $\overline{PM} = \text{sen } \hat{B}$ $\overline{BP} = \text{cos } \hat{B}$

si deduce: $b : \text{sen } \hat{B} = a : 1$

$$b : \text{sen } \hat{B} = c : \text{cos } \hat{B}$$

e quindi: $b = a \text{ sen } \hat{B}$ $b = c \text{ tg } \hat{B}$

$$\hat{B} + \hat{C} = \pi/2 \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \text{sen} (\pi/2 - \hat{C}) = \text{cos } \hat{C} \longrightarrow b = a \text{ cos } \hat{C}$$