Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie Agrarie

Corso Integrato: Matematica e Statistica

Modulo: Matematica (6 CFU)

(4 CFU Lezioni +2 CFU Esercitazioni)

Prof. Ing. S. Pascuzzi

Materiale di studio

- ✓ **Appunti dalle lezioni**
- ✓ **BIGATTI Anna Maria – ROBBIANO Lorenzo**

MATEMATICA DI BASE

Casa Editrice Ambrosiana

- ✓ **ZWIRNER Giuseppe**

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

Parte prima CEDAM Editrice

Equazione della retta

Equazioni di 1° grado a due incognite

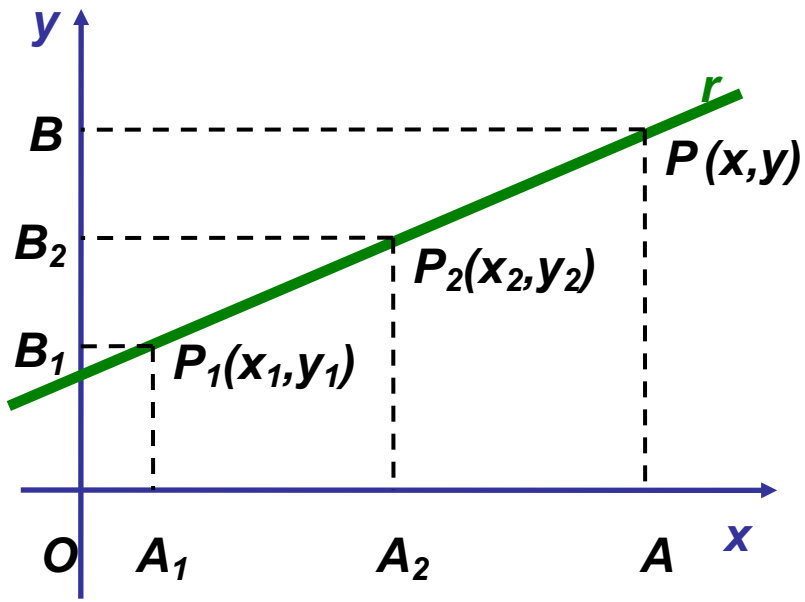
L' equazione di 1° grado a due incognite:

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

ammette infinite soluzioni, cioè esistono infinite coppie di numeri che, sostituite al posto delle incognite, soddisfano l'equazione.

Una soluzione si ottiene assegnando, ad esempio, alla incognita x un valore qualsiasi e ricavando il corrispondente valore della y. Dato che il valore fissato per la x è arbitrario, segue che la (1) ammette infinite soluzioni

Sistema piano di assi cartesiani ortogonali e retta r non parallela ad alcun asse



Le coordinate (x,y) del punto P della retta r, sono una soluzione dell'equazione:

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

x , y , variabili ; a, b, coefficienti delle variabili ; c termine noto

ogni retta è rappresentata da una equazione di 1°grado in due variabili del tipo (1)

L'equazione di una retta, non parallela ad alcun asse coordinato, passante per i due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, è :

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

Esempi :

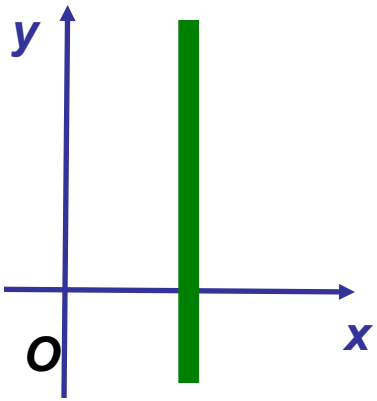
Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1(3,5)$, $P_2(2,7)$:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-5}{7-5} \quad \longrightarrow \quad 2x+y-11=0$$

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1(-2,1/3)$, $P_2(-1,-1/2)$:

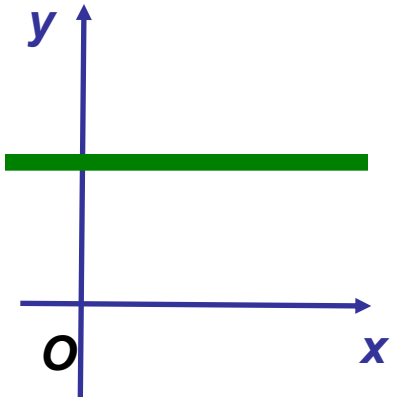
$$\frac{x+2}{-1+2}=\frac{y-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \quad \longrightarrow \quad 5x+6y+8=0$$

Una retta parallela all'asse delle y e che incontra l'asse x in un punto di ascissa c, è rappresentata analiticamente dalla equazione:



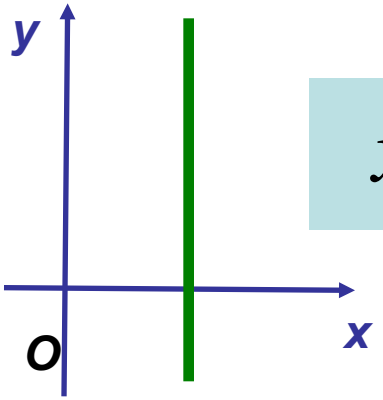
$$x - c = 0$$

Una retta parallela all'asse delle x e che incontra l'asse y in un punto di ordinata d, è rappresentata analiticamente dalla equazione:

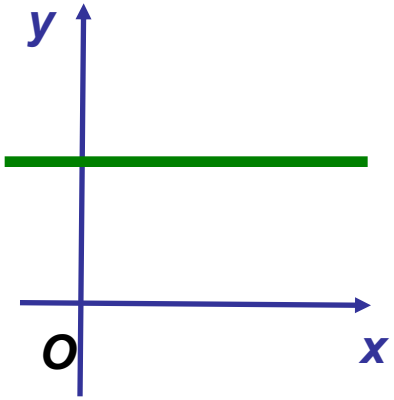


$$y - d = 0$$

Esempi :



$$x - c = 0$$



$$y - d = 0$$

Scrivere l'equazione della retta parallela all'asse y e che incontra l'asse delle x nel punto di ascissa 2/5:

$$x - \frac{2}{5} = 0$$ ***ossia :*** ***5 x – 2 = 0***

Scrivere l'equazione della retta parallela all'asse x e che incontra l'asse delle y nel punto di ordinata -3/7:

$$y + \frac{3}{7} = 0$$ ***ossia :*** ***7 y + 3 = 0***

Ad ogni equazione di 1° grado in due variabili:

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

corrisponde una retta i cui punti hanno per coordinate le soluzioni dell'equazione stessa

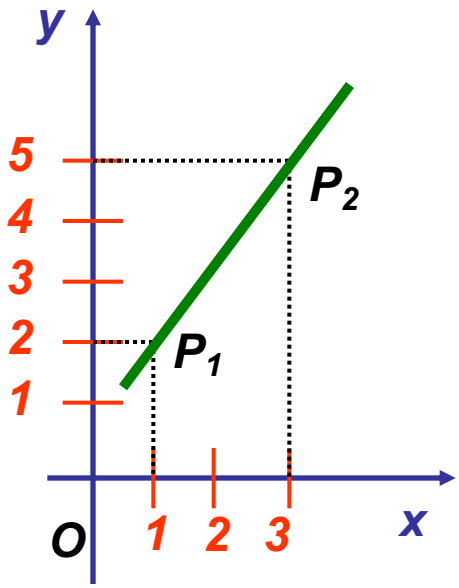
Esempio

Tracciare la retta di equazione:

$$3x - 2y + 1 = 0$$

Due soluzioni di questa equazione sono:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

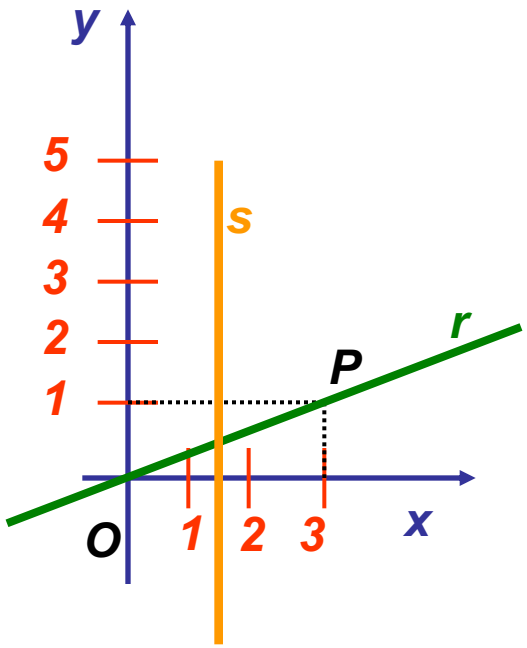


Esempio

Segnare sul piano cartesiano le rette date dalle seguenti equazioni:

$$r)\ x - 3y = 0 \qquad\qquad s)\ 2x - 3 = 0$$

La retta r passa per l'origine, occorre solo un'altro punto



Equazione esplicita della retta

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

Se è $b \neq 0$ la (1) può scriversi : $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

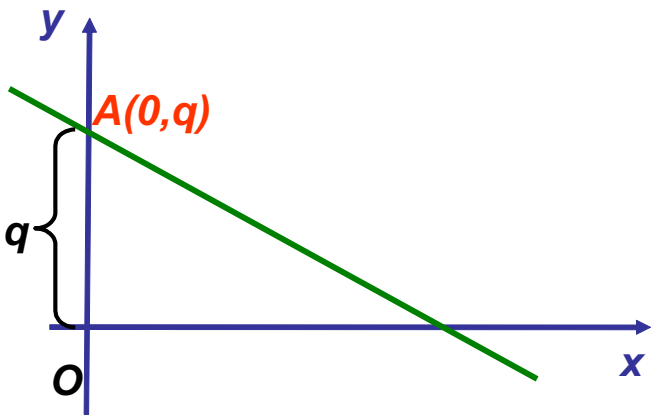
Posto: $m = -\frac{a}{b}$; $q = -\frac{c}{b}$

Si ha: $y = mx + q$ Equazione esplicita della retta

Il termine noto q rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y

Il termine: $m = -\frac{a}{b}$

è il <u>coefficiente angolare della retta</u>



Sistemi di due rette. Condizione di parallelismo

Siano date due rette:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ove sia : ***a≠0 , b≠0 , a1≠0 , b1≠0***

Le due rette suddette possono risultare:

1 . Incidenti ***(il sistema (1) ammette una sola soluzione)***

2. Parallele ***(il sistema (1) non ammette soluzioni)***

3. Coincidenti ***(il sistema (1) ammette infinite soluzioni)***

Sistemi di due rette

Siano date due rette:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases} \quad (1)$$

a≠0 , b≠0

a1≠0 , b1≠0

Se: $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$ ➡ **Rette incidenti**

Se: $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$ ➡ $\begin{cases} ka_1x+kb_1y+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} a_1x+b_1y=-\dfrac{c}{k} \\ a_1x+b_1y=-c_1 \end{cases}$

Se è: $\dfrac{c}{k} \neq c_1$ ➡ **Condizione di parallelismo di due rette: i coefficienti delle sole variabili, nelle equazioni delle due rette, proporzionali** $m=m_1$

Se è: $\dfrac{c}{k} = c_1 \rightarrow (se \cdot c_1 \neq 0), \dfrac{c}{c_1} = k \rightarrow k = \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$

Rette coincidenti

Esempi

Le due rette di equazioni:

$$3x+5y-1=0$$

$$7x-4y-18=0$$

sono incidenti, in quanto:

$$\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}\rightarrow\frac{+3}{+7}\neq\frac{+5}{-4}$$

Risolvendo il sistema si trova:

$$\begin{cases}21x+35y-7=0\\21x-12y-54=0\end{cases}\Rightarrow 47y+47=0\rightarrow y=-1\rightarrow x=+2$$

Le due rette di equazioni:

$$3x-3y+1=0$$

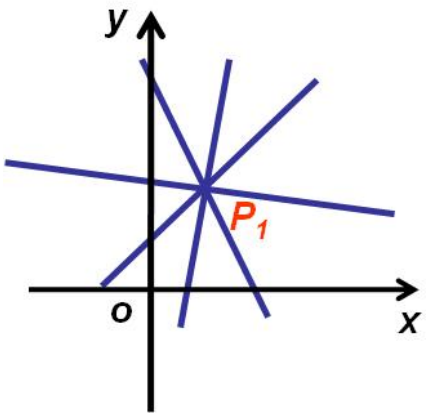
$$8x-12y+5=0$$

sono parallele, in quanto:

$$\frac{2}{8}=\frac{3}{12}\neq\frac{1}{5}$$

Equazione del fascio proprio di rette

Fascio proprio di rette: **insieme di tutte e sole le rette di un piano che hanno uno stesso punto in comune (centro del fascio)**



L'equazione di ogni retta del fascio di centro P_1, *cioè l'equazione di ogni retta passante per il punto $P_1(x_1,y_1)$,* ***può scriversi sotto la forma:***

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

Esempio: **Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P_1(5,-2)$ e di coefficiente angolare 3.**

$$y + 2 = 3(x - 5) \rightarrow 3x - y - 17 = 0$$

Fascio improprio di rette

Fascio improprio di rette: insieme delle rette di un piano parallele ad una retta data, e la retta stessa

Se:

$$ax + by + c = 0$$

è l'equazione di una retta r, ogni altra retta di equazione del tipo: *(1)*

$$ax + by + k = 0$$

è parallela ad r

Al variare del parametro k si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio improprio individuato dalla retta r

Esempio

Scrivere l'equazione della retta s appartenente al fascio improprio individuato dalla retta r di equazione:

$$3x+5y-9=0$$

e passante per il punto Q(1,-3)

L'equazione:

$$3x+5y+k=0$$

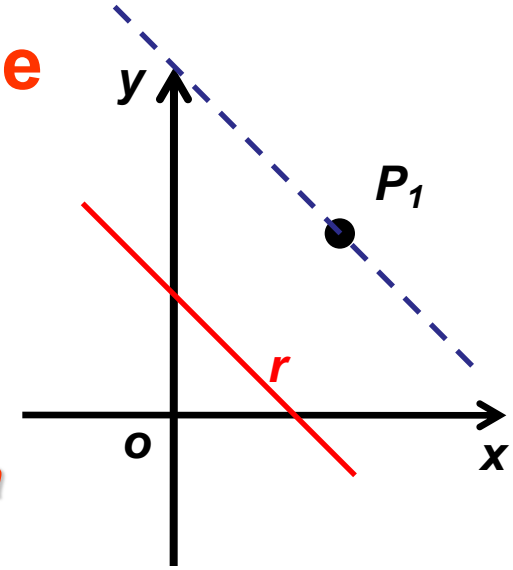
Rappresenta una retta del fascio improprio individuato dalla retta r. Affinché questa retta passi per il punto Q(1,-3),bisogna che il parametro k soddisfi alla condizione:

$$3-15+k=0 \rightarrow k=12$$

Dunque, l'equazione della retta s è:

$$3x+5y+12=0$$

Retta passante per un punto dato e parallela ad una retta data



Consideriamo un punto $P_1(x_1,y_1)$ e una retta r di equazione:

$$ax + by + c = 0$$

Vogliamo determinare l'equazione della retta parallela alla retta r e passante per il punto P_1

Ricordando che due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare m, con $\longrightarrow$ $m = -\dfrac{a}{b}$

L'equazione è data da:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

Retta passante per un punto dato e parallela ad una retta data

Esempio:

Scrivere l'equazione della retta parallela alla retta di equazione 3x-2y+5=0 e passante per il punto P_1(-1,4)

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{(-2)} = +\frac{3}{2}$$

Qundi:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{3}{2} \cdot (x - (-1)) \rightarrow\rightarrow y - 4 = \frac{3}{2} \cdot (x + 1)$$

$$\rightarrow 2y - 8 = 3x + 3 \rightarrow\rightarrow 3x - 2y + 11$$

Retta passante per un punto dato e parallela ad una retta data

Se l'equazione della retta r è sotto forma esplicita:

$$y = mx + q$$

Ricordando che due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare, l'equazione della retta parallela alla r e passante per il punto $P_1(x_1,y_1)$ è:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esempio: scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P_1(3,-1)$ e parallela alla retta di equazione y=5x-2:

$$y + 1 = 5 \cdot (x - 3) \rightarrow 5x - y - 16 = 0$$

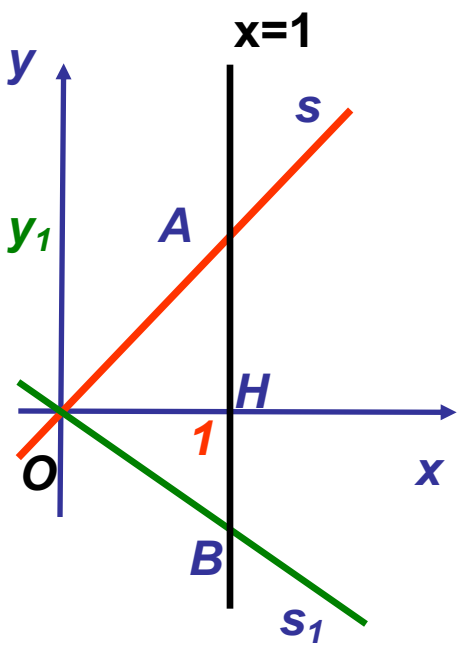
Condizione di perpendicolarità di due rette

Siano r ed r_1 fra loro perpendicolari:

$$r) \rightarrow y = mx + q$$

$$r_1) \rightarrow y = m_1 x + q_1$$

Condizione di perpendicolarità a mezzo coefficienti angolari m ed m_1



Siano s ed s_1 le rette parallele rispettivamente ad r e r_1, passanti per l'origine:

$$y = mx$$

$$y = m_1 x$$

risulta : $\overline{HA} = m$; $\overline{HB} = -m_1$

Triangolo AOB, 2° teorema di Euclide:

$$\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{OH}^2 \longrightarrow m \cdot (-m_1) = 1 \longrightarrow m = -\frac{1}{m_1}$$

La condizione affinché due rette siano perpendicolari è che i loro coefficienti angolari siano fra loro reciprochi e di segno contrario

Retta passante per un punto dato e perpendicolare ad una retta data

Consideriamo un punto $P_1(x_1,y_1)$ e una retta r di equazione:

$$ax + by + c = 0$$

Vogliamo determinare l'equazione perpendicolare alla retta r e passante per il punto P_1

$$m = -\frac{a}{b} \rightarrow m' = -\frac{1}{m} = \frac{b}{a}$$

L'equazione cercata è:

$$y - y_1 = m' \cdot (x - x_1) \rightarrow y - y_1 = \frac{b}{a} \cdot (x - x_1)$$

Esempio: scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla retta di equazione 3x-5y+7=0 e passante per il punto $P_1(3,-2)$ è:

$$y - (-2) = \frac{5}{3} \cdot (x - 3) \rightarrow y + 2 = \frac{5}{3} \cdot (x - 3) \rightarrow 5x + 3y - 9 = 0$$

Retta passante per un punto dato e perpendicolare ad una retta data

Se l'equazione della retta r è sotto forma esplicita:

$$y = mx + q$$

L'equazione della retta passante per P_1 (x_1,y_1) e perpendicolare a r risulta:

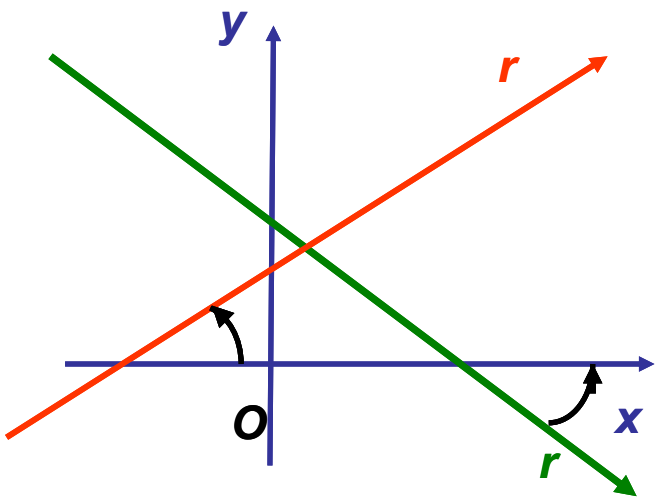
$$y - y_1 = -\frac{1}{m}\left(x - x_1\right)$$

Esempio: **scrivere l'equazione della retta passante per il punto P_1(-1,-1/2) e perpendicolare alla retta di equazione y=3x-1/5:**

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\cdot\left(x+1\right) \rightarrow 2x + 6y + 5 = 0$$

Orientamento di una retta in un piano cartesiano

Quando sul piano, nel quale sia stato fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, consideriamo una retta r, non parallela all'asse y, intenderemo sempre che essa sia orientata nel verso delle ascisse crescenti.



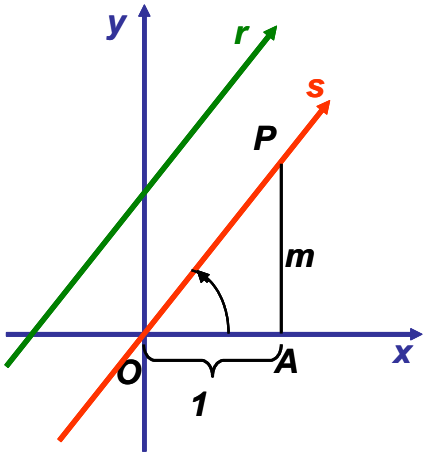
Con questa convenzione, l'angolo $\widehat{xr}$, che l'asse delle x forma con la retta r, è sempre un angolo acuto.

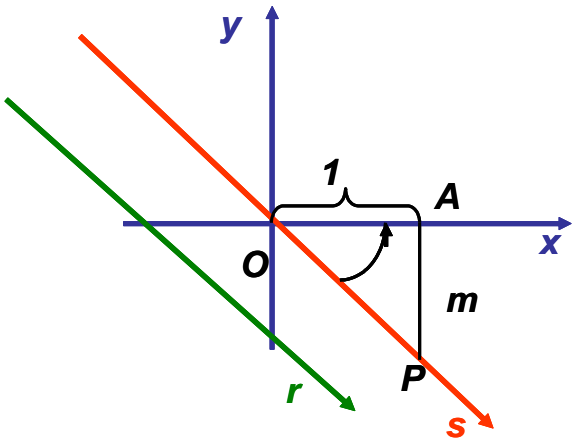
La sua misura è positiva o negativa a seconda che l'angolo $\widehat{xr}$ viene descritto dal semiasse positivo delle x in senso antiorario oppure in senso orario.

Significato del coefficiente angolare di una retta

Sia r una retta non parallela all'asse y: $y = mx + q$

Sia s la retta parallela ad r, passante per l'origine: $y = mx$





$m = tg\ \widehat{xs} = tg\ \widehat{xr}$

Il coefficiente angolare di una retta, non parallela all'asse delle y, è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che l'asse x forma con la retta stessa

N.B. : ***Bisettrice I e III quadrante (angolo 45°)*** $\longrightarrow$ $y = x$

Bisettrice II e IV quadrante (angolo -45°) $\longrightarrow$ $y = -x$

Esempio

Determinare l'angolo che ciascuna delle rette:

$$y = -\sqrt{3} \cdot x - 5 \qquad 2x - 2y + 7 = 0$$

forma con l'asse delle x

Detti α e β gli angoli cercati, si ha:

$$tg\alpha = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = -60° \qquad tg\beta = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \beta = 45°$$

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P_1(1/2,5)$ e che forma con l'asse x un angolo di -45°

Il coefficiente angolare della retta considerata è m = tg(-45°) = -1

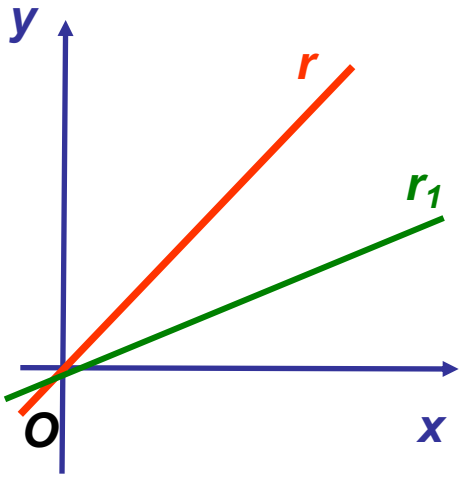
$$y - 5 = -1 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) \longrightarrow 2x + 2y - 11 = 0$$

Angolo di due rette

Siano r ed r_1 le equazioni di due rette:

$$r) \rightarrow y = mx + q$$

$$r_1) \rightarrow y = m_1 x + q_1$$



La tangente trigonometrica dell'angolo rr_1, in funzione dei coefficienti angolari delle due rette è la seguente:

$$tg\widehat{rr_1} = \frac{m_1 - m}{1 + m \cdot m_1}$$

Esempio. – Sono date due rette r , r1 , non parallele, di equazioni:

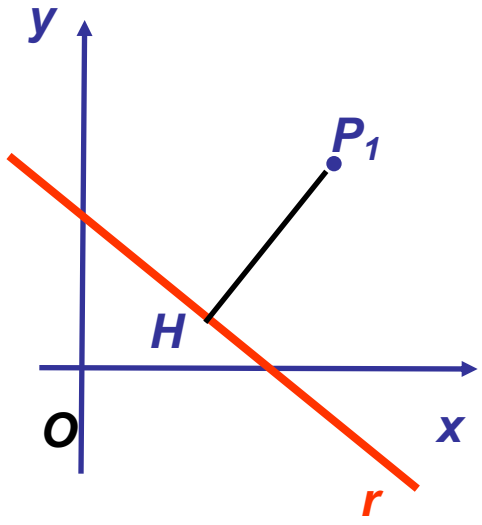
$$r) \rightarrow 2x - 3y + 1 = 0$$

$$r_1) \rightarrow 5x - 4y - 7 = 0$$

Calcolare la tangente trigonometrica dell'angolo formato da queste due rette

$$\widehat{tgrr_1} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{7}{22}$$

Distanza di un punto da una retta



La distanza di un punto $P_1(x_1,y_1)$ da una retta r di equazione:

$$ax + by + c = 0\,,$$

è data da una frazione che ha per:

-numeratore: il valore assoluto del valore che assume il primo membro dell'equazione della retta r quando al posto delle variabili x e y si sostituiscono, rispettivamente, le coordinate x_1 e y_1 del punto P_1 ;

-denominatore la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti della x e della y dell'equazione della retta; cioè si ha:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esempio

Determinare la distanza del punto P(3, -2) dalla retta di equazione:

$$4x+3y-2=0$$

Detta d tale distanza, si ha:

$$d=\frac{|4\times 3+3\times(-2)-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}$$

Determinare l'area del triangolo di vertici (1,-2), B(3,2), C(-1,6).

Facilmente si trova che l'equazione della retta BC è: $x+y-5=0$

La distanza del punto A tale retta, cioè l'altezza del triangolo rispetto alla base BC, è:

$$d=\frac{|1-2-5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\cdot\sqrt{2}$$

Si ha inoltre:

$$BC=\sqrt{(-1-3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{32}=4\cdot\sqrt{2}$$

L'area S del triangolo è:

$$S=\frac{4\cdot\sqrt{2}\times 3\cdot\sqrt{2}}{2}=12$$