ANALISI MATEMATICA 1

Anno accademico 2006-07

TRACCE D'ESAME

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 19 febbraio 1997

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = |x+1|e^{-x}$ e disegnarne approssimativamente il grafico. Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

2 - Classificare i punti di discontinuità e trovare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ arctg } (x^2/(x+1)) & \text{se } x < 0, \ x \neq -1, \\ 1 & \text{se } x \in \{-1, 0, 1\}, \\ x \log |x/(x-1)| & \text{se } x > 0, \ x \neq 1. \end{cases}$$

3 - Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{\text{cotg}^{\,3}(2^{\sqrt{x}} \text{ sen}^{\,4} x)}{\log_5(1 + \sqrt{x^2 + x - 1})}$.

4 - a) Dimostrare che risulta $t - \text{ sen}^{\,2} t > 0$ per ogni $t > 0$.

b) Dedurre da a) che $\sqrt{x} - \text{ sen } x > 0$ per ogni $x > 0$.

c) Dimostrare che l' equazione $1/(2\sqrt{x}) - \text{ sen } x = 0$ ha infinite soluzioni.

5 - Considerata la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t} - \text{ sen } t} \, dt$$

trovare l' insieme di definizione di F, e, (tenendo anche conto dell' esercizio n. 4), dire:

a) se F è continua e/o derivabile, crescente o decrescente, convessa o concava,
b) se F è dotata di punti di minimo o massimo (relativo o assoluto), e/o di punti flesso,
c) se esistono i limiti di F per x che tende agli estremi dell' insieme di definizione di F, e (in caso affermativo) se F è convergente o divergente.

6 - Calcolare l' integrale indefinito della funzione $\dfrac{4x+5}{x^2+4x+13}$ e impostare il calcolo degli integrali

$$\int \frac{x^3-3}{x^2-4} \, dx, \qquad \int \frac{x^3-3}{x^4-16} \, dx, \qquad \int \frac{x^3-3}{(x^4-16)^3} \, dx.$$

7 - Data la funzione $f(x) = \log(1 + 1/\sqrt{x+1})$,

a) dire se è convergente o divergente l' integrale improprio di f nell' intervallo $]-1, 0]$, e nell' intervallo $[0, +\infty[$,
b) calcolare l' integrale indefinito di f , l' integrale definito di f tra 0 ed 1 e l' integrale improprio tra -1 e 0.

8 - Trovare le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(1-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^3}$.

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 25 giugno 1997

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = x/\sqrt[3]{\log x}$, e disegnarne approssimativamente il grafico. Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = e$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione $f(x) = x \exp(1/(1-x))$.

3 - Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{2^{\sqrt{x^2+1}} \cos^5 x}{\operatorname{arccotg}^4(\log x)}.$$

4 - Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri di f estesi agli intervalli

$$]-2,-1], \quad [-1,0[, \quad]0,1], \quad [1,+\infty[, \quad]-2,0[, \quad]0,+\infty[, \quad]-2,+\infty[.$$

Calcolare poi l'integrale indefinito di f e l' integrale improprio di f esteso all' intervallo $[1,+\infty[$.

5 - Data la funzione $f(x) = xe^{1-x}$,

a) dimostrare che f è dotata di massimo assoluto e trovare i punti di massimo assoluto e il valore massimo;
b) dire per quali valori di α l'equazione $f(x) = \alpha$ ha una sola soluzione, più di una soluzione o nessuna;
c) dire se f è iniettiva e se è suriettiva;
d) dire per quali valori di α la funzione $g(x) = 1/[f(x) - \alpha]$ non ha asintoti verticali.

6 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$\sqrt{3} - i, \quad 1+i, \quad (\sqrt{3}-i)^3, \quad \frac{(\sqrt{3}-i)^3}{1+i}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^3}{1+i}$.

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 4 giugno 1997

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = 2\log|x-4| - \log|x-2|$ e disegnarne approssimativamente il grafico. *(N.B.: ricordarsi che* $2\log y = \ldots\ldots$ *).*

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

2 - Date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x}\log\Big(1+\frac{x^2}{1-x}\Big), \qquad g(x) = \begin{cases} \alpha x+\beta & \text{se } x \geq 0 \\ \left(1+\dfrac{x^2}{1-x}\right)^{1/x} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

a) calcolare i limiti di f per $x \to 1$, per $x \to 0$ e per $x \to -\infty$,
b) calcolare la derivata di f e il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$,
c) trovare per quali valori dei parametri α e β la funzione g risulta continua in 0,
d) trovare per quali valori dei parametri α e β la funzione g risulta derivabile in 0.

3 - Calcolare l' integrale indefinito delle funzioni

$$f(x) = (3x-2)e^{-3x}, \qquad g(x) = \frac{\cos x}{1+\ \mathrm{sen}^2 x}, \qquad h(x) = \frac{2x-5}{x^2-6x+13}.$$

4 - Dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx, \quad \int_{-2}^{0} f(x)\,dx, \qquad \text{dove} \quad f(x) = \frac{1}{(x+2)\sqrt[3]{x+1}}.$$

Calcolare poi l'integrale indefinito di f e i suddetti integrali impropri.

5 - Considerata la funzione $F(x) = \int_0^x \dfrac{1}{(t+2)\sqrt[3]{t+1}}\,dt$,

a) trovare l' intervallo di definizione di F,
b) dire in quali intervalli F ̀derivabile o continua, crescente o decrescente, convessa o concava,
c) se F è dotata di punti di minimo o massimo (relativo o assoluto), e/o di punti flesso,
d) se esistono i limiti di F per x che tende agli estremi dell' insieme di definizione di F, e (in caso affermativo) se F è convergente o divergente.

6 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$1-i, \quad 1-\sqrt{3}\,i, \quad (1-i)^2, \quad (1-\sqrt{3}\,i)^3, \quad \frac{(1-i)^2}{(1-\sqrt{3}\,i)^3}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(1-i)^2}{(1-\sqrt{3}\,i)^3}$.

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 16 luglio 1997

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = x\exp\Big(\dfrac{x-1}{x-2}\Big)$, e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{\text{arctg }(x^2 - x)\log x}{(e^{x^2} - e^x)^2}$.

3 - Calcolare l' integrale indefinito delle funzioni

$$f(x) = (3x - 2)\cos 3x, \qquad g(x) = (\cos x)\sqrt{1 - \text{ sen}x}.$$

4 - Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x}(x - 4\sqrt{x} + 5)}$, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri di f estesi agli intervalli

$$]0,1], \qquad [1,+\infty[, \qquad]0,+\infty[.$$

Calcolare poi

a) l'integrale indefinito di f,
b) l'integrale definito tra 1 e 4,
c) l' integrale improprio di f tra 0 ed 1.

5 - Considerata la funzione $F(x) = \int_0^x 2^{\text{ sen}^2 t} \text{ arctg}(t+1)\,dt$, trovare

a) il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine di F,
b) il punto di minimo assoluto di F,
c) i limiti di F per x che tende a $-\infty$ e per x che tende a $+\infty$, (dopo avere spiegato perchè tali limiti esistono).

6 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$1 - i, \qquad \sqrt{3} + i, \qquad (\sqrt{3} + i)^3, \qquad \frac{1-i}{(\sqrt{3}+i)^3}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{1-i}{(\sqrt{3}+i)^3}$.

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 15 settembre 1997

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\log^2 x + 2\log x}{x}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1/e$.

2 - Trovare il valore dei parametri a, b, c per cui la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{bx + c}$ ha:

(1) per asintoto verticale (destro e sinistro) la retta di equazione $x = 1$;
(2) per asintoto obliquo destro una retta di coefficiente angolare $m = 1/4$;
(3) un punto di massimo relativo nel punto $x_0 = -1$.

Dopo aver determinato f, trovare l'equazione completa dell'asintoto obliquo, gli eventuali ulteriori punti di minimo e massimo relativo o assoluto e l'insieme immagine di f.

3 - Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{\text{arcsen}\left(1/2 - \sqrt{x+3}\right)}{\log(1 + 3x + 2x^2)} .$$

4 - Calcolare l' integrale indefinito delle funzioni

$$f(x) = \frac{\log^2 x + 2\log x}{x}, \qquad g(x) = \frac{\log^2 x + 2\log x}{x^2}, \qquad h(x) = \frac{1}{x(\log^2 x + 2\log x)},$$

e calcolarne poi l'integrale definito tra e^{-4} ed 1 e l'area del rettangoloide di base $[e^{-4}, 1]$.

5 - Date le funzioni f e g dell'esercizio precedente dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri estesi agli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$, $]0, +\infty[$, e calcolare tali integrali impropri.

(Facoltativo). - Data la funzione h dell'esercizio precedente, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri di h estesi agli intervalli $]0, e^{-4}]$, $[e^{-1}, 1[$, $]1, e]$, $[e, +\infty[$, $]1, +\infty[$, e calcolare tali integrali impropri.

6 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$1 - i, \qquad (1 - i)^4, \qquad 1 - \sqrt{3}i, \qquad \frac{(1 - i)^4}{1 - \sqrt{3}i}.$$

Trovare infine le radici terze del numero complesso $\dfrac{(1 - i)^4}{1 - \sqrt{3}i}$.

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 15 dicembre 1997

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = \log \left|2e^{2x} - e^x - 1\right|$, e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = \log 2$.

2 - Calcolare uno almeno dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \log\left(\frac{(2x-1)^3}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0^+} (1+\sin 2x)^{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}.$$

n. 3 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f(x) = 3^{1+\operatorname{tg} x} \log_2(x^2 + 3\sqrt{x+5}),$$
$$g(x) = \frac{\arccos^3(1+x^2)}{\cos(\sqrt{x^2-x+1})}.$$

4 - Calcolare l' integrale indefinito delle funzioni

$$f(x) = (x^2-1)\cos 2x, \qquad g(x) = \frac{1}{(x+6)\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

e calcolare poi l'integrale definito di f tra 0 e $\pi/4$ e di g tra 0 ed 1 .

5 - Data la funzione g dell'esercizio precedente , dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri di g estesi agli intervalli

$$]-6,0], \quad [0,2[, \quad]2,3], \quad [3,+\infty[, \quad]-6,2[, \quad [0,+\infty[,$$

e calcolare almeno uno di tali integrali impropri.

6 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$1+i, \qquad (1+i)^4, \qquad \sqrt{3}-i, \qquad \frac{(1+i)^4}{\sqrt{3}-i}.$$

Trovare infine le radici terze del numero complesso $\dfrac{(1+i)^4}{\sqrt{3}-i}$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 12 novembre 1998 - Traccia A

****

1 - Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f(x) = 1 - 3|x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, dire se f è iniettiva, se è suriettiva, quale ne è l'insieme immagine, se f è limitata inferiormente o superiormente, se è dotata di minimo o massimo assoluto, quale è l'eventuale valore minimo o massimo e quali sono gli eventuali punti di minimo o massimo, se è crescente o decrescente in $\mathbf{R}$ o, in alternativa, quali sono gli intervalli in cui f è crescente o decrescente. Dire inoltre se f è invertibile (e trovarne l'inversa) e in caso negativo trovare una opportuna restrizione che sia invertibile e trovare l'inversa di tale restrizione.
Detta poi g la funzione $g : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ tale $g(y) = \arccos y$ per ogni $y \in [-1, 1]$, trovare la funzione composta $g \circ f$. Per tale funzione composta rispondere alle stesse domande poste sopra per f.

2 - Servendosi della definizione di limite verificare che

$$a) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+1} = 2, \qquad\qquad b) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty.$$

3 - Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}\Big(\frac{x-1}{x-4}\Big), \qquad b) \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}\Big(\frac{x^2+1}{x-4}\Big), \qquad c) \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}\Big(\frac{2x-1}{x^2+4}\Big),$$

4 - Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$ della funzione $f(x) = 2x + \operatorname{arctg}(x^2 - 1)$ e dedurne che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione.

5 - Calcolare il limite per $x \to 1$ da destra e da sinistra della funzione

$$f(x) = \exp\Big(-\frac{1}{x-1}\Big) - \operatorname{arcsen}\Big(\frac{1}{2-x}\Big)$$

e dedurne informazioni sul segno di $f(x)$ in un intorno di 1.

6 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0} \frac{(1-\cos 2x)\log^2(1+3\operatorname{arctg} x)}{(\sqrt{1-\arcsin^3 x}-1)\cdot(2x+\operatorname{tg}^3 x)}, \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^4-3x^2+1} - \sqrt{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x\log^2(x^3-x+4) + \sin x^2}{2^x - x^3 + x\log(x^2+3) + \operatorname{arctg}(x^3)}$$

8 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^{\sin^2 x} - 1}{x \operatorname{tg} x}, & \text{se} \quad x < 0, \\ \log(1+\sqrt{a+x}), & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

trovare i valori del parametro a per cui f è continua in 0 e classificare la discontinuità negli altri casi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
I esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 12 novembre 1998 - Traccia B
****

1 - Servendosi del principio di induzione dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha:

a) $n^3 + 5n$ è divisibile per 6 ; b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

2 - Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f(x) = 1 + 2|x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, dire se f è iniettiva, se è suriettiva, quale ne è l'insieme immagine, se f è limitata inferiormente o superiormente, se è dotata di minimo o massimo assoluto, quale è l'eventuale valore minimo o massimo e quali sono gli eventuali punti di minimo o massimo, se è crescente o decrescente in $\mathbf{R}$ o, in alternativa, quali sono gli intervalli in cui f è crescente o decrescente. Dire inoltre se f è invertibile e in caso negativo trovare una opportuna restrizione che sia invertibile; trovare quindi la funzione inversa di f o di tale restrizione.
Detta poi g la funzione $g : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ tale $g(y) = \text{arcsen} y$ per ogni $y \in [-1, 1]$, dire se esiste la funzione composta $g \circ f$ o trovare una opportuna restrizione di f che sia componibile con g e trovare la funzione composta con g di tale restrizione. Per tale funzione composta rispondere alle stesse domande poste sopra per f.

3 - Servendosi della definizione di limite verificare che

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+2} = 1, \qquad b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+2} = +\infty.$$

4 - Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3\left(\frac{2x-1}{x+4}\right), \qquad b) \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3\left(\frac{x^2-1}{x+4}\right), \qquad c) \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3\left(\frac{2x-1}{x^2+4}\right),$$

5 - Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$ della funzione $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \text{ arctg } x$ e dedurne che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione.

6 - Calcolare il limite per $x \to -2$ da destra e da sinistra della funzione

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x+2}\right) - \text{ arccos } \left(\frac{1}{1+x}\right)$$

e dedurne informazioni sul segno di $f(x)$ in un intorno di -2.

7 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-\sin^2(3x)} \cdot (2x^2 + \text{arctgtg}^3 x)}{(1-\cos 3x)\log^2(1 + 3 \text{ arctg } x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 1} - \sqrt{x^4+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x - x^4 + \text{ arccotg } (x^3)}{x^2 + 3x\log^2(x^3 - x + 4) + \arcsin(1/(x^2+1))}$$

8 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\text{arctg } x}{\sqrt{1+\text{ tg }^2 x} - 1}, & \text{se} \quad x < 0, \\ 2^{a+x} - 1, & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

trovare i valori del parametro a per cui f è continua in 0 e classificare la discontinuità negli altri casi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
II esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 17 dicembre 1998 - Traccia A
****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}\, e^{-1/x}$$
e tracciarne approssimativamente il grafico.
Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione
$$f(x) = \frac{\log(1 + e^{2x}) - \log(1 + e^x)}{\operatorname{arctg}\,(x^2 + x)}.$$

3 - Data la funzione
$$f(x) = \log_3\bigl(\pi/6 - \operatorname{arccotg}\,(2^x - 1)\bigr),$$
dire se f è strettamente crescente o strettamente decrescente, trovare l'insieme di definizione e l'insieme immagine di f e la funzione inversa.

4 - Calcolare la derivata delle funzioni
$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg}^2(1 + x^2) + \operatorname{sen}^3(x^2 - x + 1), \\ g(x) &= 3^{\cos^2 x}\, \log_2(x + 3\sqrt{x^2 - 1}), \\ h(x) &= \operatorname{cotg}^2\bigl(f(x)/g(x)\bigr). \end{aligned}$$

5 - Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione
$$f(x) = x^{\operatorname{sen}\,((\pi/2)x)}.$$

6 - Servendosi del teorema di Rolle, dimostrare che per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $x^3 - 2x^2 + a = 0$ non può avere due soluzioni nell'intervallo $]0, 1[$.
Dire poi per quali valori del parametro a tale equazione non ha soluzioni oppure ha una e una sola soluzione nel suddetto intervallo.

7 - Data la funzione $f(x) = x|x| - |x + 3|$, dire dove f è continua e dove è derivabile.
Dire poi se la restrizione di f agli intervalli $] - \infty, -5]$ e $[-5, 1]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass e (in caso affermativo) trovare i punti previsti da tale teorema.
Dire infine se la restrizione di f agli intervalli $[-5, 1]$ e $[-3, 1]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange e (in caso affermativo) trovare i punti previsti da tale teorema.

8 - Trovare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \frac{\operatorname{arcsen}\,(2 - 3\log x)}{\sqrt{9^x - 3^x - 6}}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
II esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 17 dicembre 1998 - Traccia B
****

1 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2}\, e^{1/x}$ e tracciarne approssimativamente il grafico.
Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = -1$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\log(2 + e^{2x}) - \log(1 + 2e^x)}{\text{arctg}\ (x^2 - x)}.$$

3 - Data la funzione

$$f(x) = \log_{1/2}\big(\pi/3 - \ \text{arctg}\ (1 - 3^x)\big),$$

dire se f è strettamente crescente o strettamente decrescente, trovare l'insieme di definizione e l'insieme immagine di f e la funzione inversa.

4 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f(x) = \ \text{arcsen}^3(1 - x^2) + \text{tg}^2(x^2 - 2x + 5),$$
$$g(x) = 2^{\text{cotg}^3 x}\ \log_3(x - 2\sqrt{x^3 - 2x + 1}),$$
$$h(x) = \text{sen}^2\big(f(x)/g(x)\big).$$

5 - Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = x^{\cos(\pi x)}.$$

6 - Servendosi del teorema di Rolle, dimostrare che per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $-x^3+6x+a = 0$ non può avere due soluzioni nell'intervallo $]0, 1[$.
Dire poi per quali valori del parametro a tale equazione non ha soluzioni oppure ha una e una sola soluzione nel suddetto intervallo.

7 - Data la funzione $f(x) = x|x| + |x - 4|$, dire dove f è continua e dove è derivabile.
Dire poi se la restrizione di f agli intervalli $[-1, 5]$ $[5, +\infty[$, soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass e (in caso affermativo) trovare i punti previsti da tale teorema.
Dire infine se la restrizione di f agli intervalli $[-1, 5]$ e $[-1, 4]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange e (in caso affermativo) trovare i punti previsti da tale teorema.

8 - Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{\text{arccoss}\ (3 + 2\log x)}{\sqrt{2 + 2^x - 4^x}}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
III esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 12 gennaio 1999 - Traccia A
****

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 4}{x - 4}\ , \qquad g(x) = \frac{4x - 6}{x^2 + 6x + 18}\ , \qquad h(x) = 9x^2 \log^2 x.$$

2 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 3x + 4}{x^2(x^2 - 4)}\ , \qquad f_2(x) = \frac{x^2 - x + 5}{(x-1)^3(x^2 + 6x + 18)^2},$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}, \qquad f_4(x) = \frac{1}{3 - \cos^2 x}.$$

3 - Calcolare l'integrale definito $\int_0^4 \operatorname{arctg} \sqrt{2 - \sqrt{x}}\, dx.$

4 - Servendosi delle formule di Eulero calcolare l'integrale indefinito $\int \sin 3x \cos 5x\, dx.$

5 - Servendosi delle formule di Moivre scrivere in forma goniometrica il numero complesso

$$(2 + 2\sqrt{3}i)/(1 - i)^2.$$

Risolvere poi (nel campo complesso) l'equazione $z^4 - (1 - 2i)z^2 - (1 + i) = 0.$

6 - Studiare la funzione $f(x) = x/\log^2 |x|$ e tracciarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

7 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f(x) = \operatorname{arcsen}^3(1 + \sqrt{x}) \cos^4(2^x - x^2), \qquad g(x) = \log_2\big(x + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2 - 1}\big).$$

8 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin^3 x} - 1) \cdot (2\operatorname{tg} x + x^3)}{(1 - \cos 5x) \log^2(1 - 3 \operatorname{arcsen} x)}\ ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 1} - x^2 + \sin x}{a^x - x^3 + x \log(x^2 + 3)}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
III esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 12 gennaio 1999 - Traccia B
****

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x - 3}{x - 3}\,, \qquad g(x) = \frac{6x + 4}{x^2 - 4x + 8}\,, \qquad h(x) = 4x\log^2 x.$$

2 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 5x - 3}{(x+1)^2(x^2 - 9)}\,, \qquad f_2(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x^3(x^2 - 4x + 8)^2},$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x^2}}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}x + 2\ \mathrm{sen}^2 x}.$$

3 - Calcolare l'integrale definito $\int_{-1}^{0}$ arctg $\sqrt{1 - \sqrt{1+x}}\,dx$.

4 - Servendosi delle formule di Eulero calcolare l'integrale indefinito $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$.

5 - Servendosi delle formule di Moivre scrivere in forma goniometrica il numero complesso

$$(\sqrt{3} - i)^2/(-1 - i).$$

Risolvere poi (nel campo complesso) l'equazione $z^4 + (2 - i)z^2 + (1 - i) = 0$.

6 - Studiare la funzione $f(x) = x/\log^3|x|$ e tracciarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

7 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f(x) = \arccos^4(x - \sqrt{x})\ \mathrm{tg}^3(2^x + x^2), \qquad g(x) = \log_3\bigl(x + \frac{x^2 + 1}{\mathrm{arccotg}^3 x}\bigr).$$

8 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3^{\sin^2 x} - 1)\cdot(1 - \cos(\log(1 + 2x^2))}{\sqrt{1 + x^2\ \mathrm{tg}x} - 1)(\mathrm{arcsen}^2 x - 3x^4)}\,,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5 - 2x^3 + 1} - x^2 + \cos x}{a^x - x + x^2\log(x^2 + 3)}.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 20 gennaio 1999

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = e^x + \dfrac{2}{e^x - 3}$, e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione $f(x) = \log\left(\left|e^x + \dfrac{2}{e^x - 3}\right|\right)$.

3 - Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{2^{\,\mathrm{sen}^2 x} \ \mathrm{arctg}(x^2+1)}{\log_3(\cos x + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 1})}$.

4 - Calcolare l' integrale definito $\int_{-2}^{-1} 3\sqrt{2-x}\log(x^2 - 4x + 3)\, dx$.

5 - Dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x}(x - 4\sqrt{x} + 5)},$$

sugli intervalli $]0, 1]$, $[1, +\infty[$, $]0, +\infty[$.

In alternativa trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2 - \log_3(5 - x)}}{\arccos\big((x-4)/(3x)\big)} \ .$$

6 - Risolvere (nel campo complesso) l'equazione: $(1 - i)z^4 + (\sqrt{3} + i)^3 = 0$.

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 3 febbraio 1999

****

n. 1 - Calcolare l' integrale definito e il valor medio nell'intervallo $[6,9]$ della funzione

$$f(x) = \log\left(x - 4\sqrt{x-5}\right) .$$

n. 2 - Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log(x^2 - 2x) ,$$

e i limiti di f per x che tende agli estremi degli intervalli di definizione.

n. 3 - Studiare la funzione

$$f(x) = x\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|} = x\sqrt{\left|1 - \frac{4}{x+2}\right|}$$

e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 0$.

(Suggerimento: evitare di "eliminare" il valore assoluto; calcolare invece le derivate di f, dimostrando preliminarmente che $D\sqrt{|y|} = \sqrt{|y|}/(2y)$ per ogni $y \neq 0$ e calcolando a parte la derivata della funzione $g(x) = \sqrt{\left|(x-2)\,/\,(x+2)\right|}$).

4 - Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di centro $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = x^{\operatorname{arctg} x}.$$

5 - Dire per quali valori di x risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n(n^2-2)}.$$

In alternativa spiegare perchè è invertibile la funzione

$$f(x) = \sqrt{\pi - \operatorname{arctg}\,(\log(2-x))}$$

e trovare l'inversa di f.

6 - Risolvere (nel campo complesso) l'equazione: $(1+i)z^3 + (\sqrt{3} - i)^2 = 0.$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 17 febbraio 1999

****

n. 1 - Studiare la funzione $f(x) = x \exp(\ \mathrm{arctg}((1/x) - 1)$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

n. 2 - Calcolare uno almeno dei seguenti integrali definiti:

$$\int_0^1 \mathrm{arcsen}^2 x\, dx\ , \qquad \int_{1/e}^1 \frac{2\log x + 3}{x(\log^2 x + 4\log x + 5)}\, dx.$$

n. 3 - Servendosi delle formule di Eulero, calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = e^{-x}\cos 3x.$$

In alternativa, risolvere (nel campo complesso) l'equazione: $(1 - \sqrt{3}i)z^4 - (1 - i)^3 = 0.$

n. 4 - Calcolare uno almeno dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^{\sqrt{1+2\ \mathrm{sen}^2 x}} - 4}{\log(1 + \mathrm{arcsen}^2(2x)) +\ \mathrm{tg}^3 x}\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4^x - x^2 + 1} - x^4\log(x^2 + 1).$$

n. 5 - Trovare il valore dei parametri a e b per cui la funzione

$$f(x) = (ax + b)^{\ \mathrm{sen} x}$$

soddisfa le seguenti proprietà :

i) la tangente al grafico di f nel punto $(0, 1)$ è parallela alla retta di equazione $y = -x\log 2$,
ii) ha un punto di flesso nel punto $x_0 = \pi/2$.

n. 6 - Impostare il calcolo degli integrali indefiniti delle funzioni

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - x + 2}\,, \qquad g(x) = \frac{\mathrm{sen}^2 x + 2\mathrm{tg} x + 2}{1 + 3\cos^2 x}\, dx\ .$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica
24 marzo 1999 - Traccia A

****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x \log x}{2 \log x - 1}$$

e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

2 - Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^{\pi/2} 2^{\cos x}(1 + 2\cos^2 x) \text{ sen } x \, dx \ , \qquad\qquad \int_e^{e^3} \frac{2\sqrt{1 + \log x}}{x(\log^2 x + 2 \log x)} \, dx \ .$$

3 - Risolvere (nel campo complesso) l'equazione:

$$(1 - i)z^4 - (1 - \sqrt{3}i)^3 = 0.$$

4 - Trovare gli asintoti della funzione

$$f(x) = x \text{ arctg } \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + \exp\left(\frac{1}{1 + x}\right)$$

5 - Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{\log^2 x + 2 \log x - 3}}{\text{arcsen}((x - 4)/5)} \ .$$

6 - Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \ \text{arctg}^3 \left[\frac{2^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \log_3(2x + x^3)}{\text{cotg}^4 x + \sqrt{1 + \cos x}} \right].$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica
24 marzo 1999 - Traccia B

****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x(\log x - 4)}{2\log x + 1}$$

e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

2 - Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^{\pi/2} 2^{\,\text{sen}\, x}(1 - 2\ \text{sen}\,^2 x)\cos x\, dx\ , \qquad \int_e^{e^3} \frac{5\sqrt{4 - \log x}}{x(10\log x - 2\log^2 x)}\ dx\ .$$

3 - Risolvere (nel campo complesso) l'equazione:

$$(1 + \sqrt{3}i)z^4 - (1 + i)^3 = 0.$$

4 - Trovare gli asintoti della funzione

$$f(x) = x\ \text{arctg}\,\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) + \exp\left(\frac{1}{1 - x}\right)$$

5 - Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{\log^2 x - 3\log x + 2}}{\text{arcsen}((x - 2)/7)}\ .$$

6 - Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \ \text{arcsen}^3\left[\frac{\log_4(x - 2x^3) + \cos^2 x}{3^{\sqrt{1 - x^2}}\text{tg}^4 x}\right]\ .$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 16 giugno 1999

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = 2x + \frac{x}{\log|x|},$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = e$.

2 - Calcolare i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ delle funzioni
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2^x - x\log 2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 1}, \\ g(x) &= \text{ arccotg } (f(x)). \end{aligned}$$

3 - Trovare il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine della funzione
$$f(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{\sqrt{1 + \text{ sen}^2 x}}.$$

4 - Calcolare l' integrale indefinito delle funzioni
$$f(x) = \frac{1 - 2\cos x}{\sin^2 x}, \qquad g(x) = x\log^2(x), \qquad h(x) = \frac{x^3 - 2x + 12}{x^2 - 6x + 18}$$
Della funzione f si calcoli anche l'integrale definito tra $\pi/6$ e $\pi/2$ e l'area del rettangoloide di base $[\pi/6, \pi/2]$.

5 - Impostare il calcolo dell'integrale indefinito delle funzioni
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}{2x + 1}, \qquad g(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}{2x + 1}.$$

6 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $e^{1-(\pi/4)i}$ e risolvere (nel campo complesso) l'equazione:
$$(1 - i)^2 z^4 + (1 - \sqrt{3}i)^3 = 0.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica
7 LUGLIO 1999 - Traccia A

****

n. 1 - Data la funzione
$$f(x) = \frac{2 \text{ arctg } (1 - \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})^3},$$
calcolare l' integrale indefinito di f, l' integrale definito esteso all'intervallo $[-3/4,\ 3]$, e l'area del rettangoloide di f di base $[-3/4,\ 3]$.

n. 2 - Date le funzioni
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 6x + 13}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2(x^2 - 6x + 13)}, \qquad h(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2(x^2 - 6x + 13)^2},$$
calcolare l'integrale indefinito di f e impostare il calcolo dell'integrale di g ed h.

n. 3 - Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{|e^{-4x} - e^{-3x}|}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = \log(2)$.

(Suggerimento: evitare di "eliminare" il valore assoluto; calcolare invece le derivate di f, ricordando che $D|x| = |x|/x$ per ogni $x \neq 0$.)

n. 4 - Trovare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2\left(\text{ arcsen}\left(\frac{x}{2x-1}\right)\right)}$$
e i limiti di f per x che tende agli estremi degli intervalli di definizione.

n. 5 - Della funzione f dell'esercizio prcedente dire

a) se è strettamente crescente o decrescente negli intervalli di definizione,
b) qual'è l'insieme immagine,
c) se è dotata di minimo o massimo e (in caso affermativo) chi sono i punti di minimo o massimo assoluto,
d) se è invertibile e (in caso affermativo) quale ne è l'inversa .

n. 6 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $e^{2+(\pi/3)i}$ e risolvere (nel campo complesso) l'equazione:
$$(1 - \sqrt{3}i)^2 z^4 + (1 + \sqrt{3}i)^3 = 0.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica
7 LUGLIO 1999 - Traccia B

****

n. 1 - Data la funzione
$$f(x) = \frac{5 \text{ arctg } (2 - \sqrt{3-x})}{(\sqrt{3-x})^3},$$
calcolare l' integrale indefinito di f, l' integrale definito esteso all'intervallo $[-1,\, 2]$,e l'area del rettangoloide di f di base $[-1,\, 2]$.

n. 2 - Date le funzioni
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+4x+13}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2(x^2+4x+13)}, \qquad h(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2(x^2+4x+13)^2},$$
calcolare l'integrale indefinito di f e impostare il calcolo dell'integrale di g ed h.

n. 3 - Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{|e^{4x} - e^{3x}|}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = \log(2)$.

(Suggerimento: evitare di "eliminare" il valore assoluto; calcolare invece le derivate di f, ricordando che $D|x| = |x|/x$ per ogni $x \neq 0$.)

n. 4 - Trovare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \log_2\left(2 - \sqrt{\text{arcsen}\left(\frac{x}{2x-1}\right)}\right)$$
e i limiti di f per x che tende agli estremi degli intervalli di definizione.

n. 5 - Della funzione f dell'esercizio prcedente dire

a) se è strettamente crescente o decrescente negli intervalli di definizione,
b) qual'è l'insieme immagine,
c) se è dotata di minimo o massimo e (in caso affermativo) chi sono i punti di minimo o massimo assoluto,
d) se è invertibile e (in caso affermativo) quale ne è l'inversa .

n. 6 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $e^{4-(\pi/6)i}$ e risolvere (nel campo complesso) l'equazione:
$$(-1+\sqrt{3}i)^3 z^4 + (1+i)^2 = 0.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica
21 LUGLIO 1999

****

n. 1 - Trovare il valore medio nell'intervallo $[0, \pi/4]$ della funzione

$$f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} \log\left(\frac{2 - \operatorname{tg} x}{2 + \operatorname{tg} x}\right).$$

n. 2 - Trovare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \operatorname{arctg}(1/x) + \sqrt{x^2+1} - 2x.$$

n. 3 - Studiare la funzione

$$f(x) = (x+2)e^{-(x+1)^2}$$

e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

n. 4 - Data la funzione F definita ponendo

$$F(x) = 2x + \int_1^x \frac{e^t}{t+1}\, dt,$$

(a) dire dove F è definita, dove è strettamente crescente (o decrescente) e dove è strettamente convessa (o concava);
(b) dimostrare che l'equazione $F(x) = 0$ ha una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0, 1]$.

n. 5 - Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di centro $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = (2x^2 - 1)^{\operatorname{arctg} x}.$$

n. 6 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $e^{-4+(\pi/6)i}$ e risolvere (nel campo complesso) l'equazione:

$$(1 + \sqrt{3}i)^3 z^4 + (1+i)^2 = 0.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica
10 novembre 1999 -

****

n. 1 - Data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \log(3x-1),$$
trovare la primitiva di f che assume il valore 0 nel punto $x_0 = 3$, e calcolare l' integrale definito di f esteso all'intervallo $[3,\ 7]$.

n. 2 - Calcolare il limite
$$\lim_{x \to 0} \ \frac{\text{arcsen } (1 - 5^{\ \text{tg}^2 x})}{1 - \cos(5x)}.$$

n. 3 - Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^2}{|x+1| - 1}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

n. 4 - Trovare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \log_2\big(\pi - 3 \ \arccos(x-1)\big)$$
e i limiti di f per x che tende agli estremi dell'intervallo di definizione.
Dire poi se f è strettamente crescente o decrescente, qual'è l'insieme immagine di f, se f è limitata inferiormente o superiormente e se f è dotata di minimo o massimo valore; in caso affermativo trovare gli eventuali punti di minimo o massimo (assoluto) e gli eventuali valori minimo e massimo (assoluto).
Trovare infine la funzione inversa di f.

n. 5 - Trovare il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x) = xe^{-3x}$ di punto iniziale $x_0 = 1$.

n. 6 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $e^{3-(\pi/3)i}$ e risolvere (nel campo complesso) l'equazione:
$$(1 + \sqrt{3}i)^2 z^3 - (1 - \sqrt{3}i)^4 = 0.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica
15 dicembre 1999 -

****

n. 1 - Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = x\cos(1 + 2\log x),$$

e l'integrale definito tra 1 e 2.

n. 2 - Dire per quale valore dei parametri α e β la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2)/x & \text{per ogni } x < 0, \\ e^x(\alpha x + \beta) & \text{per ogni } x \geq 0, \end{cases}$$

a) è continua in 0, b) è derivabile in 0.

n. 3 - Studiare la funzione $f(x) = \log(e^x + 2e^{-x} - 2)$ e disegnarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 0$.
(*Suggerimento: ricordarsi che* $e^{-x} = 1/e^x$ *e (nel calcolo degli asintoti) che* $x = \log(e^x)$).

n. 4 - Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log_2\bigl(\pi - 3\ \arccos(x-1)\bigr)$$

e i limiti di f per x che tende agli estremi dell'intervallo di definizione.
Dire poi se f è strettamente crescente o decrescente, qual'è l'insieme immagine di f, se f è limitata inferiormente o superiormente e se f è dotata di minimo o massimo valore; in caso affermativo trovare gli eventuali punti di minimo o massimo (assoluto) e gli eventuali valori minimo e massimo (assoluto).
Trovare infine la funzione inversa di f.

n. 5 - Trovare il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x) = xe^{-3x}$ di punto iniziale $x_0 = 1$.

n. 6 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $e^{3-(\pi/3)i}$ e risolvere (nel campo complesso) l'equazione:

$$(1 + \sqrt{3}i)^2 z^3 - (1 - \sqrt{3}i)^4 = 0.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
I esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 15 novembre 2000 - Traccia A
****

1 - Data la funzione $f : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f(x) = (x-3)/(x+2)$, trovare l'insieme di definizione X e l'insieme immagine di f. Dire quindi se f è iniettiva, se è suriettiva, se graveaccent e invertibile (e in caso affermativo trovarne l'inversa), se è limitata inferiormente o superiormente, se è dotata di minimo o massimo assoluto, quale è l'eventuale valore minimo o massimo e quali sono gli eventuali punti di minimo o massimo, se è crescente o decrescente nel suo insieme di definizione o, in alternativa, quali sono gli intervalli in cui f è crescente o decrescente. (*Suggerimento: se occorre, effettuare la divisione dei polinomi* $x-3$ *ed* $x+2$.

Detta poi g la funzione arccos, dire se esiste la funzione composta $g \circ f$ o trovare una opportuna restrizione di f che sia componibile con g e trovare la funzione composta con g di tale restrizione. Per tale funzione composta rispondere alle stesse domande poste sopra per f.

2 - Trovare l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log_3(2 - |(2x+1)/(x-3)|)$.

3 - Servendosi della definizione di limite verificare che

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0, \qquad b) \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$$

4 - Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$, per $x \to 0$, per $x \to 1$ e per $x \to -1$ (eventualmente da destra e da sinistra) delle funzioni

$$f(x) = \exp(-\frac{x+1}{x-1}) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2-1}\exp(-\frac{x+1}{x-1}).$$

5 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2-3x+1} - \sqrt{x^2+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 2^x - x^3\log^2(x+2) + \arcsin(1/x^2)}{3^x - 2x^5 + x^2\log(x^2+3) + \text{ sen } (x+3)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(}{\sqrt[3]{(1+4xsin^2x)^2} - 1)\cdot(2x + 3\text{arctg}^2 x)} \sqrt{(1-\cos(3x)} \log^2(1+3x - \text{ arcsen }^2 x)$$

6 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x\sin^2 x} - \cos 2x}{\text{arctg } (\log(1+2\alpha x \text{ tg } x)}, & \text{se} \quad x<0, \\ 1 & \text{se} \quad x=0, \\ \dfrac{(1+\alpha x^2)^{1/x} - 1}{x}, & \text{se} \quad x>0, \end{cases}$$

trovare i valori del parametro a per cui f è continua in 0 e classificare la discontinuità negli altri casi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
I esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 15 novembre 2000 - Traccia B
****

1 - Data la funzione $f : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f(x) = (2-x)/(x+3)$, trovare l'insieme di definizione X e l'insieme immagine di f. Dire quindi se f è iniettiva, se è suriettiva, se graveaccent e invertibile (e in caso affermativo trovarne l'inversa), se è limitata inferiormente o superiormente, se è dotata di minimo o massimo assoluto, quale è l'eventuale valore minimo o massimo e quali sono gli eventuali punti di minimo o massimo, se è crescente o decrescente nel suo insieme di definizione o, in alternativa, quali sono gli intervalli in cui f è crescente o decrescente. (*Suggerimento: se occorre, effettuare la divisione dei polinomi* $2-x$ *ed* $x+3$.

Detta poi g la funzione arcsen, dire se esiste la funzione composta $g \circ f$ o trovare una opportuna restrizione di f che sia componibile con g e trovare la funzione composta con g di tale restrizione. Per tale funzione composta rispondere alle stesse domande poste sopra per f.

2 - Trovare l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{(2 - |(x+1)/(2x-3)|)}$.

3 - Servendosi della definizione di limite verificare che

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-1} = 0, \qquad\qquad b) \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = -1.$$

4 - Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$, per $x \to 0$, per $x \to 1$ e per $x \to -1$ (eventualmente da destra e da sinistra) delle funzioni

$$f(x) = \exp(\frac{1-x}{x+1}) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2-1}\exp(\frac{1-x}{x+1}).$$

5 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3-3x^2+1} - \sqrt{x^4+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x - x^3\log^2(x+2) + \arcsin(1/x^2)}{x^2 3^x - 2x^5 + x^2\log(x^2+3) + \text{ sen } (x+3)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(}{\sqrt[3]{(1+2x^2 sinx)^2} - 1)\cdot(2x^2+3\text{arctg}x)}\sqrt{(1-\cos(5x)}\log^2(1+3x^2 - x\text{ arcsen }^2 x)$$

6 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin^2 x} - \cos(2x^2)}{\text{arctg }(\log(1+\alpha x\text{ arctg }x)}, & \text{se} \quad x<0, \\ -1 & \text{se} \quad x=0, \\ \dfrac{(1+\alpha\text{ tg}^2 x)^{1/x} - 1}{x}, & \text{se} \quad x>0, \end{cases}$$

trovare i valori del parametro a per cui f è continua in 0 e classificare la discontinuità negli altri casi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 15 dicembre 2000 - Traccia A

****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left|\frac{x+1}{(x-1)^2}\right|$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.
Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = -2$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\ \mathrm{arctg}\ \big(1/(x^2+x)\big) & \text{per ogni } \ x < 0,\ x \neq -1, \\ 0 & \text{se } \ x = 0,\ x = -1,\ x = 1, \\ x \cdot \exp\big(1/(x-1)\big), & \text{per ogni } \ x > 0,\ x \neq 1, \end{cases}$$

e classificarne gli eventuali punti di discontinuità .

3 - Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2(3-2x)}$$

trovare l'insieme di definizione e l'insieme immagine di f, dire se f è iniettiva, se è strettamente crescente o strettamente decrescente, se è limitata inferiormente o superiormente , se è dotata di minimo o massimo; in caso affermativo trovare i punti di minimo o massimo e l'eventuale funzione inversa di f .

4 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f(x) = 2^{x^2 - 2x\cos^3 x} + \ \mathrm{arcsen}^3(x - \sqrt{x^2+1})$$

$$g(x) = \frac{x^2 \log|x^3+3|}{\mathrm{sen}^2 x + \ \mathrm{tg}\ (x^2-1)}$$

$$h(x) = (x + \ \mathrm{cotg}^2 x)^{\ \mathrm{sen}\ 5x}.$$

5 - Trovare il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine della funzione

$$f(x) = e^{-2x}\sqrt{1+3x}.$$

6 - Trovare il polinomio di terzo grado avente un punto di minimo relativo in $x_1 = 1$, un punto di flesso in $x_2 = 1/3$ e il cui grafico è tangente nel punto $(0,1)$ alla retta di equazione $y = 1 - x$.

7 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arcsen}\ (2^x - 1) \cdot \log(1 + 5x - \ \mathrm{tg}^2 x)}{e^{\ \mathrm{sen}\ x} - \cos x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 \log x - \sqrt{4^x - x^3 + \cos x}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
II esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 15 dicembre 2000 - Traccia B
****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \log\left|\frac{x-1}{(x+1)^2}\right|$$
e tracciarne approssimativamente il grafico.
Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \exp\bigl(1/(x+2)\bigr), & \text{per ogni } \ x < 0,\ x \neq -1, \\ 0 & \text{se } \ x = 0,\ x = -1,\ x = 1, \\ x \text{ arctg } \bigl(1/(x^2 - x)\bigr) & \text{per ogni } \ x > 0,\ x \neq 1, \end{cases}$$
e classificarne gli eventuali punti di discontinuità .

3 - Data la funzione
$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2(5+3x)}$$
trovare l'insieme di definizione e l'insieme immagine di f, dire se f è iniettiva, se è strettamente crescente o strettamente decrescente, se è limitata inferiormente o superiormente , se è dotata di minimo o massimo; in caso affermativo trovare i punti di minimo o massimo e l'eventuale funzione inversa di f .

4 - Calcolare la derivata delle funzioni
$$f(x) = 3^{x^3 + 2x\cos^2 x} + \ \arccos^3(x + \sqrt{1-x^2})$$
$$g(x) = \frac{x^3 \log|x^4+2|}{\cos^2 x + \ \text{cotg } (x^2+1)}$$
$$h(x) = (x + \ \text{tg}^2 x)^{\cos 2x}$$

5 - Trovare il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine della funzione
$$f(x) = e^{3x}\sqrt{1-2x}.$$

6 - Trovare il polinomio di terzo grado avente un punto di minimo relativo in $x_1 = -1$, un punto di flesso in $x_2 = -2/3$ e il cui grafico è tangente nel punto $(0, 1)$ alla retta di equazione $y = 1 + x$.

7 - Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\text{ arctg } (3^x - 1)) \cdot \log(1 + 5 \ \text{tg}^2 x + x^4)}{e^{\text{ tg } x} - \cos 3x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 + x\log x} - 2^x.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

III esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 9 gennaio 2001 - Traccia A

****

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{4x^4 - 1}{2x + 1}\ , \qquad g(x) = \frac{2x - 5}{4x^2 - 4x + 5}\ , \qquad h(x) = (x^2 - 3x)\cos(2x).$$

2 - Calcolare l'integrale definito $\int_5^9 \log(x + 2\sqrt{x - 5}\, dx.$

3 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^3 + 1}{(x + 2)^2(4x^2 - 1)}\ , \qquad f_2(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x + 1)^3(x^2 - 4x + 13)^2},$$
$$f_3(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2}}, \qquad f_4(x) = \frac{1 - \sin x}{3 - \cos^2 x}.$$

4 - Servendosi delle formule di Eulero calcolare l'integrale indefinito $\int e^{-2x}\cos^2 3x\, dx.$

5 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$-2 - 2i, \quad 1 + \sqrt{3}i, \quad \sqrt{3} - i, \qquad (-2 - 2i)\cdot(1 + \sqrt{3}i), \qquad (\sqrt{3} - i)^3, \qquad \frac{(-2 - 2i)(1 + \sqrt{3}i)}{(\sqrt{3} + i)^3}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(-2 - 2i)(1 + \sqrt{3}i)}{(\sqrt{3} + i)^3}.$

6 - Studiare la funzione $f(x) = e^{-x}(3|x| - 2x^2)$ e tracciarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

7 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f(x) = \ \mathrm{arctg}^3(x + \sqrt{2x - 1})\cdot\log^4(\cos(2x) - x^2), \qquad g(x) = \sin^2\Big(x + \frac{x^3 + 2^x}{\mathrm{arcsen}^2 x}\Big).$$

8 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log^3(1 - 2\ \mathrm{arctg}\ ^2 x)\cdot(1 - \cos 2x + \mathrm{tg}^3 x)}{(2^{x^2\ \mathrm{arcsen}\ 2x} - 1)(\sqrt{1 - \sin^3 x} - 1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - 2^x + \sin x}{x^2\log(x^2 + 3) - x^3}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
III esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 9 gennaio 2001 - Traccia B
****

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{9x^4+1}{3x-1}\,, \qquad g(x) = \frac{2x+7}{4x^2+4x+5}\,, \qquad h(x) = (x^2+2x)\sin(3x).$$

2 - Calcolare l'integrale definito $\int_8^{12} \log(x - 4\sqrt{x-8}\,dx$.

3 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^3-2}{(2x+1)^2(x^2-4)}\,, \qquad f_2(x) = \frac{x^3+5}{(3x-1)^3(x^2+2x+5)^2},$$
$$f_3(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x+x^2}}, \qquad f_3(x) = \frac{1-\cos x}{\mathrm{tg}x + 3\ \mathrm{sen}x}.$$

4 - Servendosi delle formule di Eulero calcolare l'integrale indefinito $\int e^{2x}\sin^2 3x\,dx$.

5 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$2-2i, \quad 1-\sqrt{3}i, \quad \sqrt{3}+i, \quad (2-2i)\cdot(1-\sqrt{3}i), \qquad (\sqrt{3}+i)^3, \qquad \frac{(2-2i)\cdot(1-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}+i)^3}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(2-2i)\cdot(1-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}+i)^3}$.

6 - Studiare la funzione $f(x) = e^{x/2}(x^2 - 3|x|)$ e tracciarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

7 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f(x) = \ \mathrm{arccotg}^4(x^2 - \sqrt{3x-2})\ \log^3(\sin(3x) - x^2), \qquad g(x) = \cos^3\bigl(x + \frac{\arccos^3 x}{x^2+2^x}\bigr).$$

8 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3^{x\sin^2 x}-1)\cdot(\mathrm{arcsen}^2 x - 3x^4)}{\sqrt{1+x^2\mathrm{arctg}x}-1)(1-\cos(\log(1+x+2x^2))}\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5-2x^3} - x^2 + \cos x}{3^x - x^3 + x^2\log(x^2+3)}.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 17 gennaio 2001

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = x\left(\dfrac{2\log x - 1}{\log x - 1}\right)$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = e^2$.

(Punti 9)

2 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare uno almeno dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x-2\sqrt{x}))\cdot(\sqrt{1+x\text{arctg}x}-1)}{(5^{x\sin 2x}-1)\cdot\log(1+2x^2+\ \text{tg}\ x))}\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5+2x^2}-x^2+\cos 2x}{2^x-x^4+x^3\log(x^3+2)}.$$

(Punti 5)

3 - Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{3^{\ \text{arcsen}^2 x}\ \text{arccotg}(x^3+2x)}{\log_3(\sin^2 x + \sqrt{x^3-3x+1})}$.

(Punti 4)

4 - Calcolare l' integrale definito $\int_e^{e^2} \dfrac{\text{arctg}\ (1-\log x)}{x\log^2 x}\, dx$.

(Punti 5)

5 - Trovare il polinomio di Mac Laurin del II ordine della funzione $F(x) = \int_0^x \sqrt{t^3+2t^2+3t+4}\, dt$.

(Punti 4)

6 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$-1-i, \quad e^{1-(\pi/4)i}, \quad \sqrt{3}-3i, \quad (-1-i)\cdot e^{1-(\pi/4)i}, \quad (\sqrt{3}-3i)^2; \quad \frac{(-1-i)\cdot e^{1-(\pi/4)i}}{(\sqrt{3}-3i)^2}.$$

Trovare infine le radici terze del numero complesso $\dfrac{(-1-i)\cdot e^{1-(\pi/4)i}}{(\sqrt{3}-3i)^2}$.

(Punti 5)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 31 gennaio 2001 - Numeri DISPARI

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = e^{2x}\left(\frac{5x-3}{1-x}\right)$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1/2$.

(Punti 9)

2 - Calcolare uno almeno dei seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{x\,\operatorname{tg}^2 x} - \cos(\operatorname{arctg} x)}{\log(1 + x \operatorname{arcsen} 5x))}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x^3 + 2} - x^2 + \cos(2x-1)}{3^x - x^3 \log x}.$$

(Punti 5)

3 - Calcolare l'integrale definito tra $-\pi/3$ e $\pi/2$ della funzione
$$f(x) = \cos^2 x \cdot \log(\cos^2 x - 4\cos x + 8) \cdot \sin x.$$

(Punti 5)

4 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi
$$-1-\sqrt{3}i, \qquad -2+2i, \quad e^{2-(\pi/3)i}, \quad (-1-\sqrt{3}i)^2, \qquad (-2+2i)\cdot e^{2-(\pi/3)i}, \qquad \frac{(-1-\sqrt{3}i)^2}{(-2+2i)\cdot e^{2-(\pi/3)i}}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(-1-\sqrt{3}i)^2}{(-2+2i)\cdot e^{2-(\pi/3)i}}$.

(Punti 5)

5 - Trovare il polinomio di terzo grado avente un punto di massimo nel punto $x_1 = 1$, un punto di flesso nel punto $x_2 = 0$, e tale che la tangente al grafico nel punto di flesso è la retta di equazione $y = 3x - 2$.

(Punti 4)

6 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:
$$f_1(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x+2)^2(x^2 - 6x + 10)^3}, \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 3x}}, \qquad f_3(x) = \frac{1 + 2\cos^2 x}{3 + 10 \sin x \cos x}.$$

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 31 gennaio 2001 - Numeri PARI

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = e^{-x}\left(\frac{5x+6}{x+2}\right)$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1/2$.

(Punti 9)

2 - Calcolare uno almeno dei seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x \text{ arcsen } x} - \cos(x \text{ arctg } x)}{\log(1+2x \text{ tg } x))}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - x^2\log x}{\sqrt{x^3-x+2} - x^2 + \cos(2x-1)}.$$

(Punti 5)

3 - Calcolare l'integrale definito tra $\pi/6$ e π della funzione
$$f(x) = \sin^2 x \cdot \log(\sin^2 x + 2\sin x + 5)\cdot \cos x.$$

(Punti 5)

4 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi
$$-1+\sqrt{3}i, \qquad 2+2i, \quad e^{2-(\pi/6)i}, \quad (-1+\sqrt{3}i)^2, \qquad (2+2i)\cdot e^{2-(\pi/6)i}, \qquad \frac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{(2+2i)\cdot e^{2-(\pi/6)i}}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{(2+2i)\cdot e^{2-(\pi/6)i}}$.

(Punti 5)

5 - Trovare il polinomio di terzo grado avente un punto di massimo nel punto $x_1 = -1$, un punto di flesso nel punto $x_2 = 0$, e tale che la tangente al grafico nel punto di flesso è la retta di equazione $y = -3x + 4$.

(Punti 4)

6 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:
$$f_1(x) = \frac{x^3-3x}{(x-2)^3(x^2+6x+10)^2}, \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x+x^2}}, \qquad f_3(x) = \frac{1+2\sin^2 x}{2-5\sin x\cos x}.$$

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 14 febbraio 2001 - Numeri DISPARI

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = 1 - \log|\sqrt{1-x} - 1|$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = -1$.

(Punti 9)

2 - Calcolare i limiti per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ della funzione:
$$f(x) = \Big(1 + \frac{\log^2 x}{x^3}\Big)^{3x - \sqrt{x^4+1}}$$

(Punti 5.5)

3 - Calcolare l'integrale definito tra $(\pi/6)^2$ e $(\pi/2)^2$ della funzione $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x}}$.

Calcolare inoltre l'integrale indefinito della funzione $\quad g(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - x}}{2x - 1}$.

(N.B. - Se non si ha tempo di trovare le costanti, porle tutte uguali ad 1. *)*

(Punti 5.5)

4 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi
$$\sqrt{3} - i, \qquad 3 + 3i, \quad e^{1-(\pi/4)i}, \quad (\sqrt{3} - i)^2, \qquad (3+3i)\cdot e^{1-(\pi/4)i}, \qquad \frac{(\sqrt{3}-i)^2}{(3+3i)\cdot e^{1-(\pi/4)i}}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^2}{(3+3i)\cdot e^{1-(\pi/4)i}}$.

(Punti 5)

5 - Trovare l'insieme di definizione della funzione $\quad f(x) = \dfrac{\log(2 - \sqrt{1-x})}{\arcsin\big((2x+3)/4\big)}$.

Dire poi se f è strettamente crescente o strettamemnte decrescente in un intorno di 0.

(Punti 5)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 14 febbraio 2001 - Numeri PARI

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = 1 + \log|\sqrt{1+x} - 1|$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

(Punti 9)

2 - Calcolare i limiti per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ della funzione:

$$f(x) = \Big(1 + (x^2 - 1)e^{-x}\Big)^{\sqrt{x^2+x}+\log^4 x}$$

(Punti 5.5)

3 - Calcolare l'integrale definito tra 0 e $(\pi/3)^2$ della funzione $\quad f(x) = \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$.

Calcolare inoltre l'integrale indefinito della funzione $\quad g(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x - x^2}}{2x^2 - x}$.

(N.B. - Se non si ha tempo di trovare le costanti, porle tutte uguali ad 1. *)*

(Punti 5.5)

4 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$-1 - \sqrt{3}i, \qquad 3 - 3i, \quad e^{1+(\pi/4)i}, \quad (-\sqrt{3} + i)^2, \qquad (3 - 3i) \cdot e^{1+(\pi/4)i}, \qquad \frac{(-\sqrt{3} + i)^2}{(3 - 3i) \cdot e^{1+(\pi/4)i}}.$$

Trovare infine le radici terze del numero complesso $\dfrac{(-\sqrt{3} + i)^2}{(3 - 3i) \cdot e^{1+(\pi/4)i}}$.

(Punti 5)

5 - Trovare l'insieme di definizione della funzione $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - \log(1 - x)}}{\arcsin\big((2x + 3)/4\big)}$.

Dire poi se f è strettamente crescente o strettamemnte decrescente in un intorno di 0.

(Punti 5)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 4 aprile 2001 - TRACCIA A

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x(\log x + 1)}{\log^2 x}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = e$.

(Punti 9)

2 - Classificare i punti di discontinuità e trovare gli asintoti (verticali, orizzontali o obliqui) della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{1}{x} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right) & \text{se } x \notin \{-1, 0, 2\}, \\ 1 & \text{se } x \in \{-1, 0, 2\}. \end{cases}$$

(N.B. Può essere utile osservare che $x^2/(x+1) = x - x/(x+1)$. *)*

(Punti 5)

3 - Calcolare il valore medio nell' intervallo $[1, e]$ della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\log x}{1+\log x}\right)$.

(Punti 5)

4 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$\sqrt{3} - i, \qquad 3+3i, \quad e^{1-(\pi/6)i}, \quad (\sqrt{3}-i)^3, \qquad (3+3i)\cdot e^{1-(\pi/6)i}, \qquad \frac{(\sqrt{3}-i)^3}{(3+3i)\cdot e^{1-(\pi/6)i}}.$$

Trovare infine le radici quinte del numero complesso $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^3}{(3+3i)\cdot e^{1-(\pi/6)i}}$.

(Punti 5)

5 - Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di centro $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = \big(2x-1\big)^x.$$

(Punti 4)

6 - Data la funzione $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-\log x}\right)$, trovare l'insieme di definizione e l'insieme immagine di f, dire se f è invertibile e quale è la sua inversa. Dire infine se f è strettamente crescente o strettamente decrescente.

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 4 aprile 2001 - TRACCIA B

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x(\log x - 6)}{\log^2 x}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = e$.

(Punti 9)

2 - Classificare i punti di discontinuità e trovare gli asintoti (verticali, orizzontali o obliqui) della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - \dfrac{x^2}{x+2} - \dfrac{1}{x} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) & \text{se } x \notin \{-2, 0, 1\}, \\ 0 & \text{se } x \in \{-2, 0, 1\}. \end{cases}$$

(N.B. Può essere utile osservare che $x^2/(x+2) = x - 2x/(x+2)$. *)*

(Punti 5)

3 - Calcolare il valore medio nell' intervallo $[1, e]$ della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\log x}{2 - \log x}\right)$.

(Punti 5)

4 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$2 - 2\sqrt{3}i, \qquad -1+i, \quad e^{2+(\pi/3)i}, \quad (2-2\sqrt{3}i)^3, \qquad (-1+i)\cdot e^{2+(\pi/3)i}, \qquad \frac{(2-2\sqrt{3}i)^3}{(-1+i)\cdot e^{2+(\pi/3)i}}.$$

Trovare infine le radici quinte del numero complesso $\dfrac{(2-2\sqrt{3}i)^3}{(-1+i)\cdot e^{2+(\pi/3)i}}$.

(Punti 5)

5 - Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di centro $x_0 = -1$ della funzione

$$f(x) = \big(2x+3\big)^x.$$

(Punti 4)

6 - Data la funzione $f(x) = \log\big(\arccos(\sqrt{1-x})\big)$, trovare l'insieme di definizione e l'insieme immagine di f, dire se f è invertibile e quale è la sua inversa. Dire infine se f è strettamente crescente o strettamente decrescente.

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 13 giugno 2001 - TRACCIA A

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x\sqrt{|x|}}{x+1}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

(Suggerimento: evitare di "sdoppiare "la funzione; semmai calcolare a parte $D\sqrt{|x|}$ *.)*

(Punti 9)

2 - Dire per quali valori di α risulta continua in 0 la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2}\ \mathrm{arcsen}(4^x - 1)\right)^{1/\ \mathrm{arctg}\ (2x)} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Di f si trovi poi l'intervallo di definizione e i limiti per x che tende agli estremi di tale intervallo.

(Punti 5)

3 - Calcolare il valore medio nell' intervallo $[0, 1]$ della funzione $f(x) = xe^{\sqrt{1-x}}$.

(Punti 5)

4 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$3 - 3i, \quad 1 + \sqrt{3}i, \quad e^{3-(\pi/3)i}, \quad (3 - 3i)^4, \quad (1 + \sqrt{3}i) \cdot e^{3-(\pi/3)i}, \quad \frac{(3 - 3i)^4}{(1 + \sqrt{3}i) \cdot e^{3-(\pi/3)i}}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(3 - 3i)^4}{(1 + \sqrt{3}i) \cdot e^{3-(\pi/3)i}}$.

(Punti 5)

5 - Della funzione $f(x) = \dfrac{x\sqrt{|x|}}{x+1}$ dell'esercizio 1),

a) dire se $x_0 = 0$ è un punto in cui f è derivabile o se è un suo punto angoloso o cuspidale,
b) dire se $x_0 = 0$ è un punto in cui f è crescente o decrescente o se è un suo punto di minimo o massimo relativo,
c) trovare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_1 = 1$ e il polinomio di Taylor del secondo ordine di centro x_1.

(Punti 4)

6 - Calcolare l'integrale indefinito delle funzioni $f_1(x) = \dfrac{x^3}{x-3}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 5}$, ed impostare il calcolo dell' integrale indefinito delle funzioni

$$f_3(x) = \frac{x^2}{(x-3)(x^2 - 2x + 5)}, \qquad f_4(x) = \frac{x^3}{(x-3)^3(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 13 giugno 2001 - TRACCIA B

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x\sqrt{|x|}}{x-1}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

(Suggerimento: evitare di "sdoppiare "la funzione; semmai calcolare a parte $D\sqrt{|x|}$ *).*

(Punti 9)

2 - Dire per quali valori di α risulta continua in 0 la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2}\ \text{arcsen}(2^x - 1)\right)^{1/\ \text{arctg}\ (x/4)} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Di f si trovi poi l'intervallo di definizione e i limiti per x che tende agli estremi di tale intervallo.

(Punti 5)

3 - Calcolare il valore medio nell' intervallo $[-1, 0]$ della funzione $f(x) = xe^{-\sqrt{1+x}}$.

(Punti 5)

4 - Trovare il modulo e un argomento dei numeri complessi

$$3 + 3i, \qquad 1 - \sqrt{3}i, \quad e^{3+(\pi/2)i}, \quad (3+3i)^4, \qquad (1-\sqrt{3}i)\cdot e^{3+(\pi/2)i}, \qquad \frac{(3+3i)^4}{(1-\sqrt{3}i)\cdot e^{3+(\pi/2)i}}.$$

Trovare infine le radici quarte del numero complesso $\dfrac{(3+3i)^4}{(1-\sqrt{3}i)\cdot e^{3+(\pi/2)i}}$.

(Punti 5)

5 - Della funzione $f(x) = \dfrac{x\sqrt{|x|}}{x-1}$ dell'esercizio 1),

a) dire se $x_0 = 0$ è un punto in cui f è derivabile o se è un suo punto angoloso o cuspidale,
b) dire se $x_0 = 0$ è un punto in cui f è crescente o decrescente o se è un suo punto di minimo o massimo relativo,
c) trovare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_1 = -1$ e il polinomio di Taylor del secondo ordine di centro x_1.

6 - Calcolare l'integrale indefinito delle funzioni $f_1(x) = \dfrac{x^3}{x+4}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+5}$, ed impostare il calcolo dell' integrale indefinito delle funzioni

$$f_3(x) = \frac{x^2}{(x+4)(x^2+2x+5)}, \qquad f_4(x) = \frac{x^3}{(x+4)^3(x^2+2x+5)^2}.$$

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 11 luglio 2001 - TRACCIA A

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = xe^{1/(x-6)}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

(Punti 9)

2 - Calcolare l'integrale indefinito e l'integrale definito tra 4 e 6 della funzione
$$f(x) = 2x \text{ arccotg}(\sqrt{x-3}).$$

(Punti 5)

3 - Trovare le radici quarte del numero complesso
$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^4}{(e^{2-(\pi/3)i)^2}}.$$

(Punti 5)

4 - Calcolare uno almeno dei seguenti limiti:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\text{arctg } x}{x}\right)^{\sqrt{x+1}}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{3^x - x^2 + 1} - 2^x, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3^{x\sin x}-1}{\log_3(1-x\text{tg }(3x))}$$

(Punti 6)

5 - Trovare il polinomio di Taylor del II ordine di punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione
$$\sqrt{x}^{\text{ arctg } x}.$$

(Punti 4)

6 - Calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4x+8}$, ed impostare il calcolo dell' integrale indefinito delle funzioni
$$g_1(x) = \frac{x^2-1}{(x+3)(x^2-4x+8)}, \qquad g_2(x) = \frac{x^2-1}{(x+3)^4(x^2-4x+8)^2}.$$

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 13 giugno 2001 - TRACCIA B

****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{-1/(x+2)}$$

e disegnarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

(Punti 9)

2 - Calcolare l'integrale indefinito e l'integrale definito tra -1 ed 1 della funzione

$$f(x) = 2x \text{ arctg}(\sqrt{2-x}).$$

(Punti 5)

3 - Trovare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{(e^{3-(\pi/2)i})^3}.$$

(Punti 5)

n. 4 - Calcolare uno almeno dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{\text{arccotg } x}{x}\Big)^{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} 3^x - \sqrt{4^x - x^2 + 1}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1 + x \text{ arctg } (2x))}{2^{x \arcsin x} - 1}$$

(Punti 6)

5 - Trovare il polinomio di Taylor del II ordine di punto iniziale $x_0 = 1$ della funzione

$$\sqrt{x}^{\text{ arccotg } x}.$$

(Punti 4)

6 - Calcolare l'integrale indefinito della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4x+20}$, ed impostare il calcolo dell' integrale indefinito delle funzioni

$$g_1(x) = \frac{x^2-1}{(x+4)(x^2-4x+20)}, \qquad g_2(x) = \frac{x^2-1}{(x+4)^4(x^2-4x+20)^2}.$$

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 12 settembre 2001

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = 5x - 4\sqrt{x^2 + 2x}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

(Punti 9)

2 - Calcolare l'integrale indefinito delle funzioni

$$f_1(x) = (x^2 - 2x)\cos(4x), \qquad f_2(x) = \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 5}.$$

(Punti 5)

3 - Trovare le radici (complesse) dell'equazione: $z^6 + 2iz^3 - 4 = 0.$

(Punti 4)

4 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 - \sqrt{4^x - x^3 + 2x - 1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_3(1 - x^2 \text{arctg }(3x))}{e^{\text{arcsen}(5x)} - \cos(2x)}$$

(Punti 4)

5 - Trovare il polinomio di Mac Laurin del II ordine della funzione

$$f(x) = (1-2x)^{\text{ tg } x}.$$

(Punti 4)

6 - Data la funzione
$$f(x) = \log_2\big(\text{ arccos }(1-2x) - \pi/6\,\big),$$
trovare l'insieme di definizione e l'insieme immagine di f, dire se f è invertibile e quale è la sua inversa. Dire infine se f è strettamente crescente o strettamente decrescente, se è limitata o illimitata inferiormente o superiormente, se è dotata di minimo o massimo, indicando gli eventuali punti di minimo o massimo assoluto .

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 17 dicembre 2001

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{1 - \log|x-1|}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico. Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 0$.

(Punti 9)

2 - Calcolare l'integrale indefinito delle funzioni

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+1)(1-\sqrt[3]{x+1})^2}, \qquad f_2(x) = x\cos(2x+1).$$

(Punti 5)

3 - Trovare le radici (complesse) dell'equazione: $\quad z^4 + 2iz^2 + 8 = 0.$

(Punti 4)

4 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+2x-1}}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{(1-e^{x-1})\text{arctg }(1-x))}{(x^2-1)^2}.$$

(Punti 4)

5 - Trovare l'insieme di definizione X della funzione

$$F(x) = \int_0^x \sqrt[6]{t^2-4t+3}\,dt;$$

dire poi se F è crescente o decrescente, convessa o concava in tutto X, o indicare gli intervalli in cui F è crescente o decrescente, convessa o concava.

(Punti 4)

6 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \text{arcsen } x + \alpha & \text{per ogni } x \in [-1, 0[, \\ \arccos x & \text{per ogni } x \in [0, 1], \end{cases}$$

a) dire se f è continua in 0, altrimenti classificare il tipo di discontinuità,
b) dire se f è derivabile in 0 o se 0 è un punto angoloso o cuspidale.

(Punti 4)

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
I esonero di Matematica I, (Analisi Matematica) - 13 novembre 2002

****

1 - Della funzione di cui in figura é rappresentato il grafico, indicare l'insieme di definizione e l'insieme immagine, dire se é suriettiva, se é iniettiva, se é bigettiva, se é crescente (strettamente) o decrescente (strettamente), se é limitata o illimitata, inferiormente o superiormente, se é dotata di minimo o massimo valore (indicando gli eventuali estremi inferiore o superiore, minimo o massimo valore e i corrispondenti punti di minimo o massimo).

Se le suddette proprietá non sono soddisfatte da f, trovare opportune restrizioni che le soddisfano.

Indicare infine i limiti di f per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$, nonché il limite sinistro e destro per $x \to 0$.

2 - Data la funzione composta $y = \text{arcsen}\,\big(1/(2x-1)\big)$ individuarne le funzioni componenti, precisando l'insieme di definizione e l'insieme immagine delle funzioni componenti e della funzione composta.
Dire se le funzioni componenti e la funzione composta sono iniettive (e quale ne é l'inversa), se sono crescenti (strettamente) o decrescenti (strettamente), se sono limitate o illimitate, inferiormente o superiormente, se sono dotate di minimo o massimo valore (indicando il o gli eventuali punti di minimo o massimo).
Calcolare infine il limite delle funzioni componenti e della funzione composta per x che tende agli estremi degli intervalli di cui l'insieme di definizione di tali funzioni é l'unione .

3 - Servendosi della definizione di limite verificare almeno uno dei seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x-3} = +\infty, \qquad\qquad b) \quad \lim_{x\to 1} \sqrt{2x-3} = 1.$$

4 - Calcolare i limiti per x che tende a $-\infty$ a $+\infty$ e a 0 di una almeno delle seguenti funzioni

$$f(x) = \text{ arctg } \big(|x|/(x-1)\big), \qquad g(x) = \exp\big(x^2/(x-1)\big), \qquad h(x) = \sqrt[3]{x/(1+\log^2|x|)}$$

5 - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^4-3x^2+1} - \sqrt[4]{x^3-2x+1}, \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} x2^x + x^3 - 3^x,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2x^3-3x^2+5)}{x^2+x\log^2(x^3+1)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(2x+\sin^2 x))\log^3(1+4x \text{ tg } x)}{(\sqrt{1+2x\arcsin^2 x}-1)\cdot(\exp(2x+\text{arctg }^3x)-1)}.$$

6 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \text{arccotg } (1/x^2) & \text{se} \quad x<0, \\ 0 & \text{se} \quad x=0, \\ \big(\log(1+x^\alpha)\big)/x), & \text{se} \quad x>0, \end{cases}$$

trovare i valori del parametro α per cui f è continua in 0 e classificare la discontinuità negli altri casi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
II esonero di MATEMATICA I (Analisi Matematica) - 16 dicembre 2002
****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = |x| \cdot e^{1/x}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.
Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 1$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \log\bigl|1 - (1/x^2)\bigr| & \text{per ogni } \; x < 1, \; x \neq -1, x \neq 0, \\ 0 & \text{se } \; x = 0, \; x = -1, \\ x \cdot \; \text{arctg}\, x, & \text{per ogni } \; x \geq 1, \end{cases}$$

e classificare gli eventuali punti di discontinuità di f.

3 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f_1(x) = \frac{\text{sen}\,(\log x)}{1 + \sqrt[3]{\text{sen}^2\, x + e^x}}, \qquad f_2(x) = e^{\,\text{arctg}\,(\text{sen} x)} \cdot \log(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}),$$

$$f_3(x) = \frac{x^{\,\text{arcsen}\, x}}{\text{sen}\, x}, \qquad f_4(x) = \frac{\text{arctg}\,(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot \text{sen}\,(2^x)}{\text{tg}\,(x^3 \log x) \cdot \text{arcsen}\,(\cos x)}.$$

4 - Trovare gli eventuali punti angolosi o cuspidali della funzione

$$f(x)0 \begin{cases} x^2/(x+1) & \text{per ogni } \; x > 1, \\ \\ \sqrt{|x|}/(x^2+1) & \text{per ogni } \; x \leq 1, \end{cases}$$

e scrivere le equazioni delle semirette tangenti al grafico di f nei punti angolosi.

5 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \quad \sqrt[7]{x^5 - x^3} - \sqrt[4]{2x^3 - \cos x}\,, \qquad \lim_{x \to 0} \quad \frac{\text{arctg}\,(x^2 - 3x^3) \cdot (e^{\,\text{sen}\, x^2} - 1)}{\log(1 - 2x^3 + x^5) \cdot \; \text{tg}(\; \text{arcsen}\; x)}\,,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \quad \frac{2x^2 - 5^{\,\text{sen}\, x} + \; \text{sen}\,(x^3)}{e^{2x} + \sqrt[4]{\text{arcsen}\,\bigl(1/(1+x^2)\bigr)}}\,, \qquad \lim_{x \to 0^+} \quad \frac{\bigl(\cos(1 - 3^x) - 1\bigr) \cdot \sqrt{\text{sen}\,(x^3)}}{(\sqrt{1 + x^2} - 1) \cdot \; \text{arcsen}\,(x^2 \;\text{cotg}\; x)}\,.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

III esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 20 gennaio 2003 - Traccia A

****

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}\ , \qquad g(x) = \frac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x+10}\ , \qquad h(x) = \frac{\operatorname{arccotg}^2 x}{1+x^2}.$$

2 - Calcolare l'integrale definito $\int_0^3 e^{\sqrt{4-\sqrt{4-x}}}\,dx.$

3 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^3-2x-1}{x^3(x^2-4)^2}, \qquad f_2(x) = \frac{x^3-2x-1}{x^6+4x^4+4x^2},$$
$$f_3(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-x}}{3x-4}, \qquad f_4(x) = \frac{1+\sin x}{\sin x - 2\cos x - 1}.$$

4 - Servendosi delle formule di Eulero calcolare l'integrale definito $\int_0^\pi xe^{2x}\cos^2 x\,dx.$

5 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = e^{2-(\pi/3)i}$ e scrivere in forma esponenziale il numero complesso $z = 1-\sqrt{3}i$.
Trovare poi il modulo e un argomento del numero complesso $(-1+i)^5/(1-\sqrt{3}i)^8$.
Trovare infine le soluzioni complesse dell'equazione $z^6 - 2iz^3 - 2 = 0$.

6 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\log^2(x)}{x^3}$ e tracciarne approssimativamente il grafico.

7 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$\frac{x^{\sqrt{x+1}}}{x^2+\cos^3 x}, \qquad \frac{\operatorname{arcsen}\big(\cos^2(x+1)\big)\cdot\sqrt[4]{x^2-3x}}{\log(x^3-2\cos x)\cdot\operatorname{arctg}\,(e^x)}.$$

8 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\big(1-\cos(\operatorname{tg} x)\big)\,\sqrt[4]{\log(1+\operatorname{arcsen}\,(x^9))}}{\big(\sqrt[3]{e^{-x}}-1\big)\ \operatorname{arctg}\,(\sin^4 x)}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3^x+\sqrt[3]{x^2+3x-1}-5\cos(e^x)}{x^4\log\Big(1+\ \operatorname{arctg}\,\big(\frac{1}{1+x^2}\big)\Big)+2^{2x}}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
III esonero di Istituzioni di Analisi Matematica - 20 gennaio 2003 - Traccia B
****

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x+6}{x^2-4}\ , \qquad g(x) = \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-2x+10}\ , \qquad h(x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}.$$

2 - Calcolare l'integrale definito $\int_0^{3/4} e^{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}\,dx.$

3 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^3-2x-1}{x^3(x^2-1)^2}, \qquad f_2(x) = \frac{x^3-2x-1}{x^6+2x^4+x^2},$$
$$f_3(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{4x+3}, \qquad f_4(x) = \frac{1+\cos x}{2\sin x - \cos x + 1}.$$

4 - Servendosi delle formule di Eulero calcolare l'integrale definito $\int_0^{\pi} xe^{2x}\cos^2 x\,dx.$

5 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = e^{-2+(\pi/6)i}$ e scrivere in forma esponenziale il numero complesso $z = \sqrt{3} - i.$
Trovare poi il modulo e un argomento del numero complesso $(1-i)^5/(\sqrt{3}-i)^8.$
Trovare infine le soluzioni complesse dell'equazione $z^6 + 2iz^3 - 2 = 0.$

6 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\log^3(x)}{x^2}$ e tracciarne approssimativamente il grafico.

7 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$\frac{(x+1)^{\sqrt{x}}}{x^3-\sin^3 x}, \qquad \frac{\operatorname{arctg}\left(\sin^2(x+1)\right)\cdot\sqrt[4]{x^2+3x}}{\log(x^4+2\cos x)\cdot\operatorname{arcsen}(e^x)}.$$

8 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1-\cos(\operatorname{arctg} x)\right)\sqrt[4]{\log(1+\operatorname{sen}(x^7))}}{\left(\sqrt[3]{e^{2x}}-1\right)\ \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg}^4 x)}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3^x + \sqrt[5]{x^4+3x^2-1} - 5\sin(e^x)}{x^3\log\left(1+\ \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)+2^{2x}}.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 29 gennaio 2003

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = (x-1)e^{4x-x^2}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

(Punti 9)

2 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x^3-x+1|} - \sqrt{x^4+2x^2+5}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^x + \sqrt[3]{x^7-1}}{e^{1/(1+x^2)} + x^{\sqrt{x}}},$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+x^2+2\ \mathrm{arctg}\ x)}{\left(4^{x-2\sqrt{x}}-1\right)^2}, \qquad \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos(2x)\cdot\sin(4x)}{1-\sin\left(x+(\pi/4)\right)}.$$

(Punti 6)

3 - Calcolare la derivata delle funzioni seguenti

$$\sin\left(e^x + \log x\right)\cdot\sqrt[7]{\arccos(x^2)}, \qquad \frac{(\cos x)^{\sin x}}{\sqrt[3]{x^3+e^{\sin^2(x)}}}.$$

(Punti 4)

4 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$\frac{1}{x-2\sqrt{x-5}}, \qquad \frac{e^{4x}}{e^{2x}-1}, \qquad x^2\sin(2x-3).$$

Calcolare infine l' integrale definito $\int_0^1 2x\ \mathrm{arctg}\ (\sqrt{2x+1})\, dx$.

(Punti 6)

5 - Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi $z_1 = \sqrt{2}e^{-(5/4)\pi i}$ e $z_2 = 4e^{1-(7/6)\pi i}$.

Scrivere in forma esponenziale il numero complesso $z = \dfrac{(\sqrt{3}-i)^4}{(-1+i)^3}$.

Risolvere l' equazione nel campo complesso $z^4 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

(Punti 5)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 12 febbraio 2003

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = -1$.

(Punti 9)

2 - Trovare gli asintoti (verticali, orizzontali o obliqui) della funzione
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + \sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x + e^x - 1}$$
.

(Punti 5)

3 - Calcolare la derivata della funzione:
$$\frac{\sin\left(\sqrt[4]{\cos^3 x + 1}\right) \cdot \sqrt[3]{\log^2(x)}}{\arcsin^2(x^4+1) + x^{\,\mathrm{tg}\, x}}.$$

(Punti 4)

4 - Calcolare i seguenti integrali definiti
$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\, dx, \qquad \int_0^1 2 \ \ \mathrm{arctg}\ \left(\frac{1}{2x-1}\right) dx.$$

(Punti 5)

5 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = e^{2-(\pi/3)i}$ e scrivere in forma esponenziale il numero complesso $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)^5}{(1-i)^3}$.

Risolvere poi l' equazione nel campo complesso $(1-i)^3 z^4 - (1+\sqrt{3}i)^5 = 0$.

(Punti 4)

6 - Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di punto iniziale $x_0 = e$ della funzione
$$f(x) = \log x - 2\log|\log x|.$$

(Punti 3)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 9 aprile 2003

****

1 - Studiare la funzione $f(x) = x\Big(1 - \dfrac{2}{\log^2 x}\Big)$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = e$.

(Punti 9)

2 - Calcolare il limite per x che tende a $+\infty$ delle funzioni

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 3x + \operatorname{arctg} x} - \sqrt[3]{x - e^{\cos(x^2)}}, \qquad g(x) = \Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)^{\operatorname{arctg} x}.$$

(Punti 4)

3 - Calcolare la derivata delle funzioni:

$$\operatorname{arcsen}(\cos x) \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x), \qquad \frac{x^{x+\operatorname{tg}^2 x}}{\sin\Big(x^2 + \sqrt[4]{\log^3 x + 1}\Big)}.$$

(Punti 4)

4 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$\cos\big(\sqrt[3]{x-2}\big), \qquad \frac{x^3+1}{x^2+1}, \qquad \frac{x^3+x}{x^4+2x^2+2}.$$

(Punti 5)

5 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $e^{-3+(\pi/4)i}$ e scrivere in forma esponenziale il numero complesso $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^3}{(1-i)^5}$. Di quest'ultimo numero complesso trovare infine le radici quarte.

(Punti 4)

6 - Data la funzione $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta:

a) se f é integrabile, allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ se e solo se é $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$;
b) se f é crescente, allora f é dotata di minimo e massimo;
c) se f é continua in $[a,b]$, allora l'immagine di f é l'intervallo $[f(a), f(b)]$;
d) se l'immagine di f é l'intervallo $[f(a), f(b)]$, allora f é continua in $[a,b]$.

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 18 giugno 2003

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = e^{-3/\log x}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = e$, e i limiti di $f'(x)$ per $x \to 0^+$, per $x \to +\infty$ e per $x \to 1^{\pm}$.

(Punti 11)

2 - Trovare gli asintoti verticali, orizzontali ed obliqui della funzione
$$f(x) = \log|1 - 2e^{-x}|.$$

(Punti 5)

3 - Calcolare la derivata delle funzioni:
$$\cos^4(2x+3) \cdot \text{arctg }(x + 2\sqrt{x}), \qquad \frac{\log(x^3 - 2x\sqrt{x-1})}{x + 2^{\text{ tg } x}}, \qquad x^{\text{ sen}^2 x}.$$

(Punti 5)

4 - Calcolare i seguenti integrali definiti :
$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos(4x)\, dx, \qquad \int_1^{e^2} \frac{2\log x - 3}{x(\log x + 1)(\log^2 x + 4)}\, dx.$$

(Punti 5)

5 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $e^{2-(\pi/6)i}$ e scrivere in forma esponenziale il numero complesso $(1 - \sqrt{3}i)^2/(-1+i)^3$.

Di quest'ultimo numero complesso trovare infine le radici quarte.

(Punti 4)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 2 luglio 2003

****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x-1}$$

e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

(Punti 9)

2 - Calcolare l'integrale indefinito di una almeno delle funzioni

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + 2x}, \qquad f_2(x) = \frac{x^2}{x^6 - 1},$$

e l'integrale definito tra 1/2 e 3 della funzione

$$g(x) = \log(x + \sqrt{2x+3}).$$

(Punti 6)

3 - Trovare le radici complesse dell'equazione

$$(1+i)z^6 + (3-i)z^3 - 2i = 0.$$

In alternativa, trovare le radici terze del numero complesso

$$\frac{(1-\sqrt{3}i)^4}{(1+i)^3}.$$

(Punti 5)

4 - Trovare gli asintoti verticali, orizzontali ed obliqui della funzione

$$f(x) = e^{-1/x} + \sqrt{x^2 + x + 4} - x.$$

(Punti 5)

5 - Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + \cos^2 x} \cdot \log_2\left(x^2 + \operatorname{arcsen}(x^2)\right)}{x^3 + \operatorname{arctg}\left(e^{x - \operatorname{tg} x}\right)}.$$

(Punti 5)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 16 luglio 2003

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = x \cdot e^{1/(x-1)}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 3$.

(Punti 9)

2 - Calcolare gli integrali definiti

$$\int_0^1 \frac{x-1}{e^{\sqrt{x}}}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^2}{x^6 - 4x^3 + 5}\, dx.$$

(Punti 6)

3 - Trovare le radici complesse dell'equazione

$$(1-i)z^6 + (3+i)z^3 + 2i = 0.$$

In alternativa, trovare le radici quinte del numero complesso

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^4}{(1-i)^3}.$$

(Punti 5)

4 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x + \operatorname{sen} x + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \operatorname{arcsen}(2x^2 - 3x^4)}{1 - \cos(\log(1+x))}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[7]{x^5 + \cos(e^x)} - \sqrt[4]{2x^3 - x^2}$$

(Punti 5)

5 - Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{\log(x^4 - 3\cos^2 x) \cdot \sqrt{x^2 + \operatorname{arcsen}(x^2)}}{e^{\operatorname{tg}(x^3)} + \operatorname{arctg}^4 x}.$$

(Punti 5)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di MATEMATICA I, (Istituzioni di Analisi Matematica)
10 settembre 2003

****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}$$

e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = e$.

(Punti 9)

2 - Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{x+2}{x^4+4x^2}\,dx\,, \qquad \int_0^1 \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx.$$

(Punti 6)

3 - Trovare le radici complesse dell'equazione

$$z^4 + (2+i)z^2 + (1+i) = 0.$$

In alternativa, trovare le radici terze del numero complesso

$$\frac{(1-\sqrt{3}i)^5}{(1+i)^4}.$$

(Punti 5)

4 - Calcolare uno almeno dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\Big(2\operatorname{arctg}\Big(\frac{x^4-2}{x^3+1}\Big)\Big) + \frac{\sqrt{x^2+6\log x}}{1-3x}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(1+(4/x)\big)^{\sqrt{x^2+1}}$$

(Punti 5)

5 - Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{x^{\sqrt{x}} - 3\cos^2 x}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x + \operatorname{sen} x}}}.$$

(Punti 5)

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 12 novembre 2003

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = (x+1)e^{-x^2}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 2$.

2 - Trovare gli asintoti della funzione $\quad f(x) = e^x + \dfrac{2}{e^x - 3}$.

3 - Calcolare la derivata della funzione $\quad f(x) = \dfrac{2^{\,\mathrm{sen}x} \operatorname{arctg}(x^2+1)}{\log_3(x-3) + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 1}}$.

4 - Calcolare l' integrale definito $\quad \int_{-2}^{-1} 3\sqrt{2-x}\log(x^2-4x+3)\,dx$.

5 - Trovare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt{2 - \log_3(5-x)}}{\arccos\big(1/(x-1)\big)} \ .$$

6 - Risolvere (nel campo complesso) l'equazione: $\quad (1-i)z^5 + (\sqrt{3} - i)^3 = 0$.

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di MATEMATICA I, (Istituzioni di Analisi Matematica)
11 dicembre 2003

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{4\log x - 1}{(2\log x - 1)^2}$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Trovare poi l' equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = e$.

(Punti 9)

2 - Calcolare il seguente integrale definito
$$\int_1^4 \log(2x + \sqrt{x})\, dx.$$

(Punti 6)

3 - Trovare le radici quinte del numero complesso
$$\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(1-i)^3}.$$

(Punti 5)

4 - Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\exp\Big(\dfrac{1}{x-1}\Big) & \text{per ogni } \ x < 1, \\ 0 & \text{se } \ x = 1 \ \text{ o } \ x = 2, \\ \dfrac{\pi}{x-3} + \ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{per ogni } \ x > 1, x \neq 2, \end{cases}$$
dire se f è continua in 1 e trovare gli asintoti di f.

(Punti 5)

5 - Calcolare la derivata della funzione:
$$f(x) = \frac{3^{\sqrt{x}} - 2\cos^3(x+1)}{\operatorname{arctg} x + \sqrt[3]{x^2+1}}.$$

(Punti 5)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ESAME DI ANALISI MATEMATICA I
CDL SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
19 GENNAIO 2005

Esercizio 1. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = e^{|x-1|/x}\,.$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_5\big(1+\operatorname{arcsen}(2x^3)\big)\cdot\Big(\sqrt[3]{1-2\,x}-1\Big)}{(1-2^{\arctan(3x)})^2\cdot\Big(1-\cos(e^{\tan 2x}-1)\Big)}; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3^{-x}+\cos(e^x+1)+2\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt{e^x+3x^4}+e^{\arctan(3x)}}.$$

Esercizio 3. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:
$$\operatorname{arcsen}\Big(\frac{x}{e^x}\Big)\cdot\log_2\big(\operatorname{sen}(3x^2)\big); \qquad \frac{\big(\tan(x)\big)^{\operatorname{sen}(x)}}{1+\arctan\big(\sqrt[3]{1+e^x}\big)}.$$

Esercizio 4. Risolvere la seguente equazione a coefficienti complessi:
$$\big(\sqrt{3}+i\big)z^6+\big(2\,i\sqrt{3}-6\big)z^3-8\,i=0\,.$$

In alternativa calcolare le radici quinte del numero complesso: $\dfrac{(1+i)^5}{1-i\sqrt{3}}$.

Esercizio 5. Dire, a seconda del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ se la forma quadratica associata alla matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & \alpha\end{pmatrix}$$
è definita positiva, definita negativa o indefinita.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

Esercizio 6. Data la funzione $f(x,y)=9x^3-5y^3+9x^2y+3xy^2-3x+3y$,

(1) trovare i punti di minimo e massimo relativo;

(2) trovare gli eventuali punti di minimo o massimo relativo sulla retta di equazione $3x+y=1$, adoperando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange .

In alternativa agli esercizi 5 e 6:

Esercizio 7. Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_0^1 \log\big(x+\sqrt{x}+2\big)\,dx; \qquad \int_3^5 \frac{2t^3-6t^2+6t-1}{(t-1)(2t^2-5t+2)}\,dx.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica - 16 febbraio 2005

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x}{1+\log x}\,,$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = e$.

2 - Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2+2\,\text{arcsen}\,x)}{\log_2\big(1+\ \text{arcsen}\,(3x^2)\big)}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+4x^2}-\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{3x+1}}\,.$$

3 - Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:
$$\sqrt[4]{\frac{\text{arctg}\,\big(\cos(2x)+e^{-x}\big)}{1+\sin^2(3x)}}\,, \qquad 5^{\sin(3x)} + x^{\cos(\sqrt{x}+\tan(x))}\,.$$

4 - Risolvere l' equazione a coefficienti complessi: $2\,iz^8-\big(\sqrt{3}+i\big)z^4+\sqrt{3}-i=0\,.$

In alternativa calcolare le radici terze del numero complesso: $\dfrac{(1+i)^2}{\big(\sqrt{3}-i\big)^5}\,.$

5 - Dire, a seconda del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, se la forma quadratica associata alla matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$
è definita positiva, definita negativa o indefinita.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6- Data la funzione $f(x,y) = xy(x-y-1)$,
(1) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f;
(2) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f sulla curva di equazione $xy^2+xy+2=0$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

In alternativa agli esercizi 5 e 6:

7 - Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\,dx \qquad \int_0^1 \frac{e^{4x}+1}{e^{2x}+e^x}\,dx\,.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Analisi Matematica 1 - 30 marzo 2005

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+2}}\,,$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

2 - Calcolare uno almeno dei seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2\big(1+\ \text{arcsen}\ (x)\big)\cdot\ \text{tg}\ ^2 x}{\big(1-\cos(x/5)\big)\cdot\big(\sqrt{1-\ \text{sen}\ x}-1\big)}\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{x^3}{x^5+5}\Big)^{x^2}$$

3 - Calcolare la derivata della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{\text{arctg}^2(1+x^2)+\ \text{sen}^3(x^2-x+1)}{3^{\cos^2 x}\cdot\log_2(x+3\sqrt{x^2-1})}.$$

4 - Risolvere l' equazione a coefficienti complessi: $\quad iz^6 + (2+i)z^3 + (1-i) = 0\,.$

In alternativa calcolare le radici quinte del numero complesso: $\dfrac{(-1+i)^4}{\big(\sqrt{3}+i\big)^3}$.

5 - Dire, a seconda del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, se la forma quadratica associata alla matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
è definita positiva, definita negativa o indefinita.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Data la funzione $\quad f(x,y) = x^3 - x^2y + xy^2 + 3x^2 - 6xy,$

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare poi i punti di minimo e massimo relativo di f sulla circonferenza di centro $(0,3)$ e raggio 3,
c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sul cerchio chiuso di centro $(0,3)$ e raggio 3 e trovare tali punti.

In alternativa agli esercizi 5 e 6:

7 - Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_0^{\pi^3} \sin(\sqrt[3]{x})\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{x+1}{4x^2+4x+5}\,dx\,.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Analisi Matematica 1 - Istituzioni di Analisi Matematica
7 settembre 2005

****

1 - Studiare la funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

2 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^{\sin x}-1)\cdot\log_2(1+x)}{\big(1-\cos(\arcsin x)\big)\cdot\sin(3\,x\tan x)}\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{2^x-x^2+\cos(e^x)}-\sqrt{9\,x^4-e^{\arctan(x)}}\,.$$

3 - Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$\sqrt[5]{\sin(x^2)-3x\,e^{\arctan x}}\,,\qquad \frac{\cos(3x)-\sin^2(x)}{\log(x-3\,x^2)}\,.$$

4 - Risolvere la seguente equazione a coefficienti complessi:

$$(8-8\,i)z^4-(9+9\,i)z^2-1+i=0\,.$$

In alternativa calcolare le radici terze del numero complesso: $\dfrac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}-i)^2}$.

5 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

è definita positiva, definita negativa o indefinita.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Data la funzione $f(x,y)=4\,x^3+3\,x^2y-3\,x^2-3\,xy-16\,y^3-6\,y^2$:
(1) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f in $\mathbf{R}^2$;
(2) usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla curva di equazione $x^2+xy+2\,y^2=1$

In alternativa agli esercizi 5 e 6:

7 - Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^{\pi^3/8}\sin\big(\sqrt[3]{x}\,\big)\,dx\,,\qquad \int\frac{e^{2\,x}}{(e^x-1)(e^{2\,x}+4)}\,dx\,.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica 1 - 26 ottobre 2006 - Traccia A

****

1 - Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 15 \text{ ed } x \text{ é pari}\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 15 \text{ ed } x \text{ é divisibile per } 3\ \}$, e $C = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 15 \text{ ed } x \text{ é primo }\}$, trovare gli insiemi

$$A \cap B, \qquad A \cup B, \qquad A - B, \qquad A \cap C, \qquad A \cup C, \qquad A - C, \qquad (A \cap B) \cup C.$$

2 - Servendosi del principio di induzione dimostrare che risulta: $3^n \geq 1 + 2^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

3 - Delle curve rappresentate in figura dire se esse sono il grafico di una funzione reale $y = f(x)$.

In caso affermativo, indicarne l'insieme di definizione e l'insieme immagine, dire se é suriettiva, se é iniettiva, se é bigettiva, se é crescente (strettamente) o decrescente (strettamente), se é limitata o illimitata, inferiormente o superiormente, se é dotata di minimo o massimo valore (indicando gli eventuali estremi inferiore o superiore, minimo o massimo valore e i corrispondenti punti di minimo o massimo).

Se le suddette proprietá non sono soddisfatte da f, trovare opportune restrizioni che le soddisfano.

Indicare infine i limiti di f per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$, nonché il limite sinistro e destro per $x \to 0$.

2 - Data la funzione composta $y = \sqrt{2 - \log_3(x^2 - 16)}$ individuarne le funzioni componenti, precisando l'insieme di definizione e l'insieme immagine delle funzioni componenti e della funzione composta.
Dire quindi se le funzioni componenti e la funzione composta sono limitate o illimitate, inferiormente o superiormente, se sono dotate di minimo o massimo valore (indicando il o gli eventuali punti di minimo o massimo), se sono iniettive o suriettive, se sono crescenti (strettamente) o decrescenti (strettamente).
Se non sono monotone in tutto l'insieme di definizione, indicare degli intervalli in cui lo sono.

4 - Servendosi della definizione di limite verificare che risulta:

$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = +\infty, \qquad\qquad b) \quad \lim_{x \to 1} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2.$$

5 - Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$, per $x \to \pm 1$ (eventualmente da destra e/o sinistra) delle seguenti funzioni:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 7}{x^2 - 3x + 2}, \qquad \frac{3^x - x^3 - 6x + 1}{x^2 - 1}, \qquad \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x - 1}}, \qquad \log\left(\frac{x^2}{|x - 1|}\right) \qquad \exp\left(\frac{x^2}{x - 1}\right)$$

6 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x/\sqrt{1 - x + \alpha^2 x^2} & \text{se} \quad x < 1, \\ 1/2 & \text{se} \quad x = 1, \\ \sqrt{x/(2x + \alpha)} & \text{se} \quad x > 1, \end{cases}$$

trovare i valori del parametro $\alpha \geq -2$ per cui f è continua in 1 e classificare la discontinuità negli altri casi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
I esonero di Analisi Matematica 1 - 26 ottobre 2006 - Traccia B
****

1 - Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 15 \text{ ed } x \text{ é dispari}\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 15 \text{ ed } x \text{ é divisibile per 3 }\}$, e $C = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 15 \text{ ed } x \text{ é primo }\}$, trovare gli insiemi

$$A \cap B, \qquad A \cup B, \qquad A - B, \qquad A \cap C, \qquad A \cup C, \qquad A - C, \qquad (A \cap B) \cup C.$$

2 - Servendosi del principio di induzione dimostrare che risulta: $5^n \geq 1 + 4^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

3 - Delle curve rappresentate in figura dire se esse sono il grafico di una funzione reale $y = f(x)$.

In caso affermativo, indicarne l'insieme di definizione e l'insieme immagine, dire se é suriettiva, se é iniettiva, se é bigettiva, se é crescente (strettamente) o decrescente (strettamente), se é limitata o illimitata, inferiormente o superiormente, se é dotata di minimo o massimo valore (indicando gli eventuali estremi inferiore o superiore, minimo o massimo valore e i corrispondenti punti di minimo o massimo).

Se le suddette proprietá non sono soddisfatte da f, trovare opportune restrizioni che le soddisfano.

Indicare infine i limiti di f per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$, nonché il limite sinistro e destro per $x \to 0$.

2 - Data la funzione composta $y = \sqrt{3 - \log_2(x^2 - 1)}$ individuarne le funzioni componenti, precisando l'insieme di definizione e l'insieme immagine delle funzioni componenti e della funzione composta.
Dire quindi se le funzioni componenti e la funzione composta sono limitate o illimitate, inferiormente o superiormente, se sono dotate di minimo o massimo valore (indicando il o gli eventuali punti di minimo o massimo), se sono iniettive o suriettive, se sono crescenti (strettamente) o decrescenti (strettamente).
Se non sono monotone in tutto l'insieme di definizione, indicare degli intervalli in cui lo sono.

4 - Servendosi della definizione di limite verificare che risulta:

$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = +\infty, \qquad\qquad b) \quad \lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1.$$

5 - Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$, per $x \to \pm 1$ (eventualmente da destra e/o sinistra) delle seguenti funzioni:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1}, \qquad \frac{2^x - x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}, \qquad \sqrt{\frac{x^3 + 8}{x + 1}}, \qquad \log\Big(\frac{x^2}{|x + 1|}\Big) \qquad \exp\Big(\frac{x^2}{x + 1}\Big)$$

6 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (2 - x)/\sqrt{x^2 - x + \alpha^2} & \text{se} \quad 0 < x < 1, \\ 1 & \text{se} \quad x = 1, \\ \sqrt{x/(3x + 2\alpha)} & \text{se} \quad x > 1, \end{cases}$$

trovare i valori del parametro $\alpha \geq -3/2$ per cui f è continua in 1 e classificare la discontinuità negli altri casi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica 1 - 24 novembre 2006 - Traccia A

****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\log x - 1}{\log^2 x}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.
Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = e$.

2 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x - \sqrt{3^x - x^2 + \log x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{3^{x\sin x} - 1}{1 - \cos(3x))}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \Big(1 + \frac{\text{arctg } x}{x}\Big)^{\sqrt{x+1}}.$$

3 - Trovare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\exp\Big(\dfrac{1}{x+2}\Big) & \text{per ogni } \ x < -2, \\ \dfrac{\pi}{x+1} + \ \text{arccotg} \ \Big(\dfrac{x}{x+2}\Big) & \text{per ogni } \ x > -2, x \neq -1. \end{cases}$$

4 - Calcolare la derivata delle funzioni

$$f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}} + \log_3(1 + 2x + x^3)$$
$$g(x) = \text{cotg}^4 x \cdot \ \text{sen} \ (x^2 - x + 1),$$
$$h(x) = \ \text{arctg}^3 \Big[f(x)/g(x)\Big].$$

5 - Dire per quale valore dei parametri α e β la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \cos 2x)/x & \text{per ogni } x < 0, \\ e^x(\alpha x + \beta) & \text{per ogni } x \geq 0, \end{cases}$$

a) è continua in 0, b) è derivabile in 0.

6 - Trovare il polinomio di terzo grado avente un punto di massimo nel punto $x_1 = 1$, un punto di flesso nel punto $x_2 = 0$, e tale che la tangente al grafico nel punto di flesso è la retta di equazione $y = 3x - 2$.

7 - Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log_3[\pi/6 - \ \text{arcsen} \ (2^x - 3)]$$

e dire se f è strettamente crescente o strettamente decrescente; trovare poi l'insieme immagine e l'eventuale funzione inversa di f, dire se f è limitata inferiormente o superiormente , se è dotata di minimo o massimo e trovare gli eventuali punti di minimo o massimo (assoluto) di f .

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
II esonero di Analisi Matematica 1 - 24 novembre 2006 - Traccia B
****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{1 + 4\log x}{\log^2 x}$$
e tracciarne approssimativamente il grafico.
Trovare poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = e$.

2 - Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to+\infty} 3^x - \sqrt{4^x - x^2 + x\log x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\ \mathrm{arctg}\ (2x)} - 1}{2^{x \arcsin x} - 1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \Big(1 + \frac{\mathrm{arccotg}\ x}{x}\Big)^{\sqrt{x^2+1}}$$

3 - Trovare gli asintoti della funzione
$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\exp\Big(\dfrac{1}{x-1}\Big) & \text{per ogni } \ x < 1, \\ \dfrac{\pi}{x-2} + \ \mathrm{arctg}\ \Big(\dfrac{1}{x-1}\Big) & \text{per ogni } \ x > 1, x \neq 2. \end{cases}$$

4 - Calcolare la derivata delle funzioni
$$f(x) = \log_4(1 + x - 2x^3) + \ \mathrm{arcsen}^3(2x),$$
$$g(x) = 3^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{tg}^4 x,$$
$$h(x) = \ \mathrm{sen}^3\big(f(x)/g(x)\big).$$

5 - Dire per quale valore dei parametri α e β la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2)/x & \text{per ogni } x < 0, \\ e^x(\alpha x + \beta) & \text{per ogni } x \geq 0, \end{cases}$$

a) è continua in 0, b) è derivabile in 0.

n. 6 - Trovare il polinomio di terzo grado avente un punto di massimo nel punto $x_1 = -1$, un punto di flesso nel punto $x_2 = 0$, e tale che la tangente al grafico nel punto di flesso è la retta di equazione $y = -3x+4$.

7 - Trovare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \log_2[\pi/3 - \ \arccos\ (3^x - 2)]$$
e dire se f è strettamente crescente o strettamente decrescente; trovare poi l'insieme immagine e l'eventuale funzione inversa di f, dire se f è limitata inferiormente o superiormente , se è dotata di minimo o massimo e trovare gli eventuali punti di minimo o massimo (assoluto) di f .

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
III esonero di Analisi Matematica 1 - 13 dicembre 2006 - Traccia A
****

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{e^{\,\mathrm{tg}\,x}}{\cos^2 x}\ , \qquad g(x) = x^3 \ \mathrm{sen}\ (2x)\ , \qquad h(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^3 + 8}\ .$$

2 - Calcolare l'integrale definito $\int_0^1 \log(x + \sqrt{2-x}\ )\, dx.$

3 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-2)^3(x^2 + 4x + 8)}\ , \qquad f_2(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-2)^2(x^2 + 4x + 8)^2}\ ,$$

$$f_3(x) = \frac{2\ \mathrm{sen}\ x + \ \mathrm{tg}\ x}{\cos^2 x + 2}\ , \qquad f_4(x) = \frac{x + 2\sqrt{x^2 - 3x}}{x^2 - 4}\ .$$

4 - Servendosi delle formule di Eulero calcolare l'integrale definito $\int_0^{\pi/3} x e^{3x} \cos(2x)\, dx.$

5 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = e^{4+3i}$ e scrivere in forma esponenziale il numero complesso $z = 2\sqrt{3} - 2i$. Trovare poi il modulo e un argomento del numero complesso

$$\frac{(1 - \sqrt{3}i)^4}{(2-2i)^3(\sqrt{3} - i)}$$

e le sue radici quarte

6 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1 - e^{-x}}$ e tracciarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

7 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^7 - 5^{\cos x}} - \sqrt[5]{x^9 + \ \mathrm{arctg}\ (e^x)} \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^x + \sqrt[3]{x^4 + 2}}{x^3 + x^2 \log^2(1 + x^2)}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
III esonero di Analisi Matematica 1 - 13 dicembre 2006 - Traccia B
****

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{e^{\text{ arcsen } x}}{\sqrt{1-x^2}}\ , \qquad g(x) = x^3 \cos\,(4x)\ , \qquad h(x) = \frac{x^4 - 9x}{x^3 - 27}\ .$$

2 - Calcolare l'integrale definito $\int_0^2 \log(x + \sqrt{2+x}\ )\, dx.$

3 - Impostare il calcolo dell'integrale delle funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^3+1}{(x+1)^3(x^2-6x+10)}\ , \qquad f_2(x) = \frac{x^3+1}{(x+1)^2(x^2-6x+10)^2}\ ,$$

$$f_3(x) = \frac{\text{sen}\ ^2 x + 2 \text{ tg } x}{\cos^2 x + 3}\ , \qquad f_4(x) = \frac{x - \sqrt{3x - x^2}}{x^2 - 1}\ .$$

4 - Servendosi delle formule di Eulero calcolare l'integrale definito $\int_0^{\pi/4} xe^{2x} \cos(3x)\, dx.$

5 - Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = e^{2-4i}$ e scrivere in forma esponenziale il numero complesso $z = 2 - 2i$. Trovare poi il modulo e un argomento del numero complesso

$$\frac{(-1+\sqrt{3}i)(1+i)^5}{(-1-i)^3}$$

e le sue radici quarte.

6 - Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{2x}}$ e tracciarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

7 - Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^7 - 5^{\sin x}} - \sqrt[5]{x^8 + \text{ arccotg } (e^{2x})} \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^8+1}}{3^x - x^2 - \log^5(1+x^2)}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica 1 – 26 ottobre 2006

****

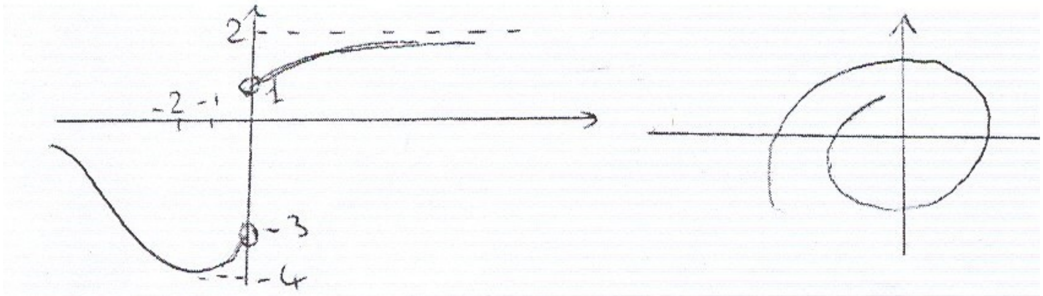
Esercizio 1. Dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \leq 15 \text{ ed } x \text{ è pari} \},$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \leq 15 \text{ ed } x \text{ è divisibile per } 3 \},$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \leq 15 \text{ ed } x \text{ è primo} \},$$

trovare gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $(A \cap B) \cup C$.

Esercizio 2. Servendosi del principio di induzione dimostrare che risulta: $3^n \geq 1 + 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Delle curve rappresentate in figura dire se esse sono il grafico di una funzione reale $y = f(x)$.



In caso affermativo, indicarne l'insieme di definizione e l'insieme immagine, dire se è suriettiva, se è iniettiva, se è bigettiva, se è crescente (strettamente) o decrescente (strettamente), se è limitata o illimitata, inferiormente o superiormente, se è dotata di minimo o massimo valore (indicando gli eventuali estremi inferiore o superiore, minimo o massimo valore e i corrispondenti punti di minimo o massimo). Se le suddette proprietà non sono soddisfatte da f, trovare opportune restrizioni che le soddisfano.

Indicare infine i limiti di f per x che tende a $+1$ e a -1, nonché il limite sinistro e destro per $x \to 0$.

Esercizio 4. Data la funzione composta

$$y = \sqrt{2 - \log_3(x^2 - 16)}\,,$$

individuarne le funzioni componenti, precisando l'insieme di definizione e l'insieme immagine delle funzioni componenti e della funzione composta. Dire quindi se le funzioni componenti e la funzione composta sono limitate o illimitate, inferiormente o superiormente, se sono dotate di minimo o massimo valore (indicando il o gli eventuali punti di minimo o massimo), se sono iniettive o suriettive, se sono crescenti (strettamente) o decrescenti (strettamente). Se non sono monotone in tutto l'insieme di definizione, indicare degli intervalli in cui lo sono.

Esercizio 5. Servendosi della definizione di limite verificare che risulta:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = +\infty\,, \qquad b)\ \lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1\,.$$

Esercizio 6. Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$, per $x \to \pm 1$ (eventualmente da destra e/o sinistra) delle seguenti funzioni:

$$a)\ \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 7}{x^2 - 3x + 2}\,, \quad b)\ \frac{3^x - x^3 - 6x + 1}{x^2 - 1}\,, \quad c)\ \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x - 1}}\,, \quad d)\ \log\Big(\frac{x^2}{|x-1|}\Big)\,, \quad e)\ \exp\Big(\frac{x^2}{x-1}\Big)\,.$$

Esercizio 7. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - x}{\sqrt{x^2 - x + \alpha^2}} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \sqrt{\dfrac{x}{3x + 2\alpha}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

trovare i valori del parametro $\alpha \geq -\dfrac{3}{2}$ per cui f è continua in 1 e classificare la discontinuità negli altri casi.

Soluzioni

Soluzione dell'esercizio 1. Banalmente si ha:

$$
\begin{aligned}
A &= \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \}, \\
B &= \{ 3, 6, 9, 12, 15\}, \\
C &= \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 15\},
\end{aligned}
$$

dunque:

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{ 6, 12, \}, \\
A \cup B &= \{ 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}, \\
A \setminus B &= \{ 2, 4, 8, 10, 14, \}, \\
A \cap C &= \{ 2, 15\}, \\
A \cup C &= \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, \\
A \setminus C &= \{ 4, 6, 8, 10, 12, 14, \}, \\
(A \cap B) \cup C &= \{ 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15\}.
\end{aligned}
$$

□

Soluzione dell'esercizio 2. Per $n = 1$ si ha:

$$3^1 = 3 \geq 1 + 2^1 ,$$

quindi l'affermazione è vera. Supponiamo che l'affermazione sia vera per un certo n, mostriamola per $n+1$. Si ha:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \underset{\text{(induzione)}}{\geq} 3 \cdot (1 + 2^n) = 3 + 3 \cdot 2^n \geq 1 + 2 \cdot 2^n = 1 + 2^{n+1} .$$

□

Soluzione dell'esercizio 3. Solo la prima curva è il grafico di una funzione, mentre la seconda non lo è.

Dal grafico ne deduciamo che la funzione è definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e l'insieme immagine è $[-4, 0[\cup]1, 2[$.

La funzione non è iniettiva dal momento che ogni retta del tipo $y = y_0$ con $y_0 \in]-4, -3[$ interseca la curva in due punti. La funzione non è surgettiva, dal momento che è limitata, sia inferiormente che superiormente. L'estremo inferiore di f vale -4 ed è anche il minimo valore della funzione; l'estremo superiore di f vale 2 ma non è massimo valore. Il minimo valore di f è raggiunto per $x = -2$, che è dunque punto di minimo.

La funzione non è né crescente né decrescente.

Se consideriamo la restrizione di f all'intervallo $]-\infty, -2]$, possiamo notare che f è strettamente decrescente, quindi iniettiva, mentre se consideriamo la restrizione di f all'intervallo $]-2, -0[\cup]0, +\infty[$, possiamo notare che f è strettamente crescente, e ancora iniettiva.

Dal grafico si vede facilmente che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 , \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 , \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -3 .$$

□

Soluzione dell'esercizio 4. Siano

$$f_1(x) = x^2 - 16 , \qquad f_2(x) = \log_3(x) , \qquad f_3(x) = 2 - x , \qquad f_4(x) = \sqrt{x} ,$$

in modo che risulti

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 .$$

f_1 è definita su $\mathbb{R}$, è limitata inferiormente, ma non superiormente. Il valore minimo è -16, e il punto di minimo è 0. f_1 non è né iniettiva, né surgettiva, né crescente né decrescente. Tuttavia, la restrizione di f_1 all'intervallo $]-\infty, 0]$ è strettamente decrescente, quindi iniettiva, mentre la restrizione di f_1 all'intervallo $]0, +\infty]$ è strettamente crescente, quindi ancora iniettiva.

f_2 è definita per $x > 0$, è illimitata, sia inferiormente, sia superiormente, quindi non ammette né minimo valore né massimo valore. f_2 è sia iniettiva, sia surgettiva, dunque bigettiva, strettamente crescente.

f_3 è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è illimitata, sia inferiormente, sia superiormente, quindi non ammette né minimo valore né massimo valore. f_3 è sia iniettiva, sia surgettiva, dunque bigettiva, strettamente decrescente.

f_4 è definita per $x \geq 0$, è limitata inferiormente, ma non superiormente. Il valore minimo è 0, e il punto di minimo è 0. f_4 è iniettiva, ma non surgettiva, strettamente crescente.

Ricordiamo che se D_f è l'insieme di definizione di f e D_g è l'insieme di definizione di g allora l'insieme di definizione di $g \circ f$, è dato da

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in D_g \right\} .$$

Quindi

$$D_{f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1} = \left\{ x \in D_{f_3 \circ f_2 \circ f_1} \;\middle|\; (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) \in D_{f_4} \right\} ,$$

inoltre:

$$D_{f_3 \circ f_2 \circ f_1} = \left\{ x \in D_{f_2 \circ f_1} \;\middle|\; (f_2 \circ f_1)(x) \in D_{f_3} \right\} ,$$

similmente:

$$D_{f_2 \circ f_1} = \left\{ x \in D_{f_1} \;\middle|\; f_1(x) \in D_{f_2} \right\} ,$$

quindi:

$$D_{f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1} = \left\{ x \in D_{f_1} \;\middle|\; f_1(x) \in D_{f_2} ,\ (f_2 \circ f_1)(x) \in D_{f_3} ,\ (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) \in D_{f_4} \right\} .$$

Otteniamo quindi il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 16 > 0 & \big(f_1(x) \in D_{f_2}\big) \\ \log_3(x^2 - 16) \in \mathbb{R} & \big((f_2 \circ f_1)(x) \in D_{f_3}\big) \\ 2 - \log_3(x^2 - 16) \geq 0 & \big((f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) \in D_{f_4}\big) . \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta per $x \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$, mentre la seconda è sempre soddisfatta. La terza diventa:

$$\log_3(x^2 - 16) \leq 2 ,$$

e dal momento che la funzione $x \mapsto \log_3 x$ è strettamente crescente, tale disequazione è equivalente a:

$$x^2 - 16 \leq 3^2 ,$$

ovvero

$$x^2 - 25 \leq 0 ,$$

che ha soluzione per $x \in [-5, 5]$.

L'insieme di definizione di f è ottenuto dall'intersezione delle soluzioni delle tre disequazioni, quindi:

$$D_f = [-5, -4[\cup]4, 5] .$$

f non è iniettiva, dal momento che $f(-5) = f(5) = 0$, e neanche surgettiva, dal momento che f_4 non lo è.

Per determinare gli intervalli in cui f è monotona, osserviamo che la restrizione di f_1 all'intervallo $[-5, -4[$ è strettamente decrescente, mentre f_2, f_3 e f_4 sono rispettivamente strettamente crescente, strettamente decrescente e strettamente crescente, quindi la composta è strettamente crescente, quindi iniettiva.

Analogamente si vede che essendo la restrizione di f_1 all'intervallo $]4,5]$ strettamente crescente, la composta è strettamente decrescente, quindi iniettiva. $\square$

Soluzione dell'esercizio 5. Osserviamo innanzitutto che l'insieme di definizione della funzione è tutto $\mathbb{R}$.

a) Ricorando la definizione di limite all'infinito, occorre mostrare che

$$\text{per ogni } M \in \mathbb{R} \text{ esiste } \overline{X} \in \mathbb{R} \text{ tale che se } x > \overline{X}, \text{ allora } \sqrt{x^2 - 4\,x + 5} > M\,.$$

Risolviamo dunque la disequazione

$$\sqrt{x^2 - 4\,x + 5} > M\,,$$

al variare del parametro $M \in \mathbb{R}$. Osserviamo che se $M < 0$, allora la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi ci interessiamo al caso $M \geq 0$.

Se $M \geq 0$, la disequazione è equivalente alla disequazione ottenuta elevando al quadrato ambo i membri:

$$x^2 - 4\,x + 5 > M^2\,,$$

ovvero

$$x^2 - 4\,x + 5 - M^2 > 0\,. \tag{1}$$

Il discriminante della (1) è:

$$\Delta = 16 - 4(5 - M^2) = 4\,(M^2 - 1)\,,$$

e quindi per $M \in]-1,1[$ la disequazione (1) è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se $M \geq 1$, la disequazione è verificata per $x < 2 - \sqrt{M^2 - 1}$ e $x > 2 + \sqrt{M^2 - 1}$.

Per la verifica del limite basta dunque prendere un qualsiasi $\overline{X} \in \mathbb{R}$ se $M < 1$, e $\overline{X} = 2 + \sqrt{M^2 - 1}$, se $M \geq 1$.

b) Ricorando la definizione di limite, occorre mostrare che

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che se } |x - 2| < \delta, \text{ allora } \left|\sqrt{x^2 - 4\,x + 5} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Risolviamo dunque la disequazione

$$\left|\sqrt{x^2 - 4\,x + 5} - 1\right| < \varepsilon\,,$$

al variare del parametro $\varepsilon > 0$. Tale disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4\,x + 5} - 1 < \varepsilon \\ \sqrt{x^2 - 4\,x + 5} - 1 > -\varepsilon \end{cases}. \tag{2}$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni. Osservando che $\varepsilon > 0$ e il trinomio $x^2 - 4\,x + 5$ è sempre positivo, la prima disequazione è equivalente a

$$x^2 - 4\,x + 5 < (1 + \varepsilon)^2\,,$$

che ha come soluzione

$$2 - \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1} < x < 2 + \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}\,. \tag{3}$$

La seconda disequazione del sistema (2) è sempre soddisfatta se $\varepsilon > 1$, mentre per $\varepsilon \in]0,1[$ la disequazione è equivalente a

$$x^2 - 4\,x + 5 - (1 - \varepsilon)^2 > 0\,.$$

Si vede facilmente che la disequazione è sempre verificata, essendo il discriminante del trinomio negativo.

Le soluzioni del sistema (2) sono dunque date dalla (3). Basta dunque prendere $\delta = \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}$, e il limite è verificato.

$\square$

Soluzione dell'esercizio 6. *a*)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-5\,x^2+6\,x-7}{x^2-3\,x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\,\frac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=+\infty\,,$$

dal momento che $\dfrac{5}{x}\to 0$, $\dfrac{6}{x^2}\to 0$, ... Analogamante:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-5\,x^2+6\,x-7}{x^2-3\,x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}x\,\frac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=-\infty\,.$$

Quando x tende a 1 il numeratore della funzione tende a -5 quindi, in virtù del Teorema della Permanenza del Segno, è negativo in un intorno di 1; il denominatore è invece positivo per $x\in\,]-\infty,1[\,\cup\,]2,+\infty[$ e negativo per $x\in\,]1,2[$, in particolare è positivo in un intorno destro di 1 ed è negativo in un intorno sinistro di 1. Dal Teorema del Limite delle forme 1/0, si ottiene dunque:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-5\,x^2+6\,x-7}{x^2-3\,x+2}=+\infty\,,\qquad\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-5\,x^2+6\,x-7}{x^2-3\,x+2}=-\infty\,.$$

La funzione è continua in -1, dunque $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3-5\,x^2+6\,x-7}{x^2-3\,x+2}=-\frac{19}{6}$.

b) Procedendo in modo analogo al punto *a*):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-x^3-6\,x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(1-\dfrac{x^3}{3^x}-\dfrac{6\,x}{3^x}+\dfrac{1}{3^x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x^2}\,\frac{1-\dfrac{x^3}{3^x}-\dfrac{6\,x}{3^x}+\dfrac{1}{3^x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=+\infty$$

dato che $\dfrac{3^x}{x^2}\to+\infty$, $\dfrac{x^3}{3^x}\to 0$, $\dfrac{6\,x}{3^x}\to 0$, ... quando x tende a $+\infty$. Analogamente:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-x^3-6\,x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{3^x}{x^3}-1-\dfrac{6\,x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=+\infty\,.$$

Per il calcolo del limite in 1, osserviamo che il numeratore vale -3 per $x=1$, ed è quindi negativo in un intorno di 1. Il denominatore è positivo in un intorno destro di 1 e negativo in un intorno sinistro di 1, quindi, usando ancora il Teorema del Limite delle forme 1/0:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{3^x-x^3-6\,x+1}{x^2-1}=-\infty\,,\qquad\lim_{x\to1^-}\frac{3^x-x^3-6\,x+1}{x^2-1}=+\infty\,.$$

Analogamente si vede che:

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{3^x-x^3-6\,x+1}{x^2-1}=-\infty\,,\qquad\lim_{x\to-1^-}\frac{3^x-x^3-6\,x+1}{x^2-1}=+\infty\,.$$

c) Osserviamo innanzitutto che la funzione è definita solo per $x \in \,]-\infty, 1[\, \cup \,]2, +\infty[$, ed è sempre positiva. Inoltre:

$$\sqrt{\frac{x^3-8}{x-1}} = \sqrt{\frac{x^3\left(1-\frac{8}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \sqrt{x^2\,\frac{1-\frac{8}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}} = |x|\sqrt{\frac{1-\frac{8}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}}\,,$$

da cui, otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3-8}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\frac{1-\frac{8}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3-8}{x-1}} = \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\frac{1-\frac{8}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}} = +\infty\,.$$

Come osservato prima, la funzione è definita solo a sinistra di 1, ed è ovviamente positiva, quindi:

$$\lim_{x\to1^-}\sqrt{\frac{x^3-8}{x-1}} = +\infty\,.$$

In -1 la funzione è continua, quindi:

$$\lim_{x\to-1}\sqrt{\frac{x^3-8}{x-1}} = \sqrt{\frac{9}{2}}\,.$$

d) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{|x-1|} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x-1|} = +\infty$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2}{|x-1|} = +\infty \qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^2}{|x-1|} = \frac{1}{2}\,,$$

quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}\log\Big(\frac{x^2}{|x-1|}\Big) \underset{\left(y=\frac{x^2}{|x-1|}\right)}{=} \lim_{y\to+\infty}\log y = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\log\Big(\frac{x^2}{|x-1|}\Big) \underset{\left(y=\frac{x^2}{|x-1|}\right)}{=} \lim_{y\to+\infty}\log y = +\infty$$
$$\lim_{x\to1}\log\Big(\frac{x^2}{|x-1|}\Big) \underset{\left(y=\frac{x^2}{|x-1|}\right)}{=} \lim_{y\to0^+}\log y = -\infty$$
$$\lim_{x\to-1}\log\Big(\frac{x^2}{|x-1|}\Big) \underset{\left(y=\frac{x^2}{|x-1|}\right)}{=} \lim_{y\to\frac{1}{2}}\log y = -\log 2\,.$$

e) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^2}{x-1} = -\frac{1}{2}\,,$$

quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}\exp\Big(\frac{x^2}{x-1}\Big) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\exp\Big(\frac{x^2}{x-1}\Big) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \exp\Big(\frac{x^2}{x-1}\Big) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \exp\Big(\frac{x^2}{x-1}\Big) = 0 \qquad \lim_{x\to -1} \exp\Big(\frac{x^2}{x-1}\Big) = e^{-1/2}\,.$$

□

Soluzione dell'esercizio 7. Ricordiamo innanzitutto che $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$. Da ciò, se $\alpha \neq 0$ si ha:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2-x}{\sqrt{x^2-x+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}} = \frac{1}{|\alpha|}\,.$$

Se $\alpha = 0$, ricordando il Teorema del Limite delle forme $1/0$, e osservando che la funzione $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{2-x}$ è positiva e infinitesima quando x tende a 1^-, si ha:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2-x}{\sqrt{x^2-x}} = +\infty\,.$$

Analogamente, se $\alpha \neq -\dfrac{3}{2}$ si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x}{3\,x+2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{3+2\,\alpha}}\,,$$

mentre se $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x}{3\,x-3}} = +\infty\,.$$

Possiamo osservare subito che per $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ e $\alpha = 0$ la funzione presenta una discontinuità di II specie, e quindi non è continua.

Il limite destro è uguale al limite sinistro se

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\,\alpha}} = \frac{1}{|\alpha|}\,,$$

ovvero se

$$3+2\,\alpha = \alpha^2\,,$$

da cui $\alpha = -1$ oppure $\alpha = 3$.

Per $\alpha = -1$ il limite destro e il limite sinistro sono dunque uguali al valore della funzione in 1, quindi la funzione è continua. Per $\alpha = 3$ il limite destro è uguale al limite sinistro, ma i due limiti sono diversi dal valore della funzione in 1 e quindi si ha una discontinuità di III specie (discontinuità eliminabile).

Per i valori non considerati il limite destro e il limite sinistro esistono, ma sono diversi, quindi la funzione ha una discontinuità di II specie (discontinuità di tipo salto).

In conclusione:

se $\alpha = -1$**:** la funzione è continua;

se $\alpha \in \Big]-\dfrac{3}{2}, +\infty\Big[\setminus \{-1, 0, 3\}$**:** la funzione ha una discontinuità di I specie (discontinuità di tipo salto);

se $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ **oppure** $\alpha = 0$**:** la funzione ha una discontinuità di II specie;

$\alpha = 3$**:** la funzione ha una discontinuità di III specie (discontinuità eliminabile).

□

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Analisi Matematica 1 - 17 gennaio 2007

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = \log|\sqrt{x+1} - 1|,$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

2 - Calcolare i seguenti integrali:
$$\int \frac{1}{e^{2x} + 4e^x + 8}\, dx, \qquad \int_0^{\pi^2/9} \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})}\, dx, \qquad .$$

3 - Trovare gli asintoti della funzione
$$f(x) = \log\ |\ e^{2x} + e^x - 2\ |\ .$$
o calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen }(2x) \cdot \text{ tg }^2(5x + x^2)}{\big(1 - \cos(5x)\big) \cdot \big(\log(1 - 3 \text{ sen } x)\big)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^7 - 5^{\cos x}} - \sqrt[5]{x^9 - \cos(5^x)}$$

4 - Calcolare la derivata della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{\text{arcsen}^3(1 - x^2) + \sqrt[3]{x^2 - x + 1}}{5^{\cos^2 x} \cdot \log_3(x^3 + \text{ arctg }(x^2))}.$$

5 - Risolvere l' equazione a coefficienti complessi: $\quad (1 - i)z^4 + 2iz^2 - (1 + i) = 0\,.$

In alternativa calcolare le radici quarte del numero complesso: $\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})^4}{\big(-1 + i\big)^3}\ .$

n. 6 - Trovare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt{2 - \log_2(x^2 - 5x + 4)}}{\text{arcsen}((2x - 6)/5)}\ .$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Analisi Matematica 1 - 7 febbraio 2007

****

1 - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{(\log x + 3)^2},$$

e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = e$.

2 - Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{5\,x - 8}{x^2 - 8\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx\,.$$

3 - Calcolare almeno uno dei seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big(\cos(2\,x) - 1\big)\big(2^{\operatorname{sen}\,x} - 1\big)}{\big(\sqrt[3]{1 - \arctan(5\,x)} - 1\big)\log_{10}(1 + \tan(x^2))}\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^x - 3^x + \arctan(10^x)}{1 - \cos(5^x) - x^{10}}\,.$$

4 - Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$\frac{\log_2(2^x + x^3 - 1)}{\sqrt{\operatorname{arcsen}\,(x - 2)}}\,.$$

5 - Risolvere l' equazione a coefficienti complessi: $(2 + i)\,z^6 + (4 + 7\,i)\,z^3 + 2 + 6\,i = 0\,.$

In alternativa, calcolare modulo e argomento delle radici seste di $\dfrac{\sqrt{3} - i}{i - 1}$.

n. 6 - Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione:

$$f(x) = \log_3\Big(\frac{2^x - 1}{x + 2}\Big) - \sqrt[6]{(4^x - 2^x)(x - 1)}\,.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Analisi Matematica 1 - 11 aprile 2007

****

1 - Studiare la funzione
$$f(x) = e^{-x/2}\,|x^2 - 3x|\,,$$
e disegnarne approssimativamente il grafico.

Scrivere poi l' equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

2 - Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_{-2}^{2} e^{-x/2}\,(x^2 - 3x)\,dx\,, \qquad\qquad \int_{1}^{2} \frac{x+1}{\sqrt{3x - x^2}}\,dx, \qquad .$$

3 - Trovare gli asintoti della funzione
$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg}\,(x^3/(x^2-1)) & \text{se } x < 1,\ x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = \pm 1 \\ \sqrt{x^3/(x-1)} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

4 - Calcolare la derivata della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{\text{arctg}^3(2x - x^2) + \sqrt[4]{x^2 - 2^x}}{5^{x+\cos x}\cdot \log_4(1 + \text{ arcsen }(x^2+1))}.$$

5 - Risolvere l' equazione a coefficienti complessi: $\quad (1+i)z^6 - 2iz^3 - (1-i) = 0\,.$

In alternativa calcolare le radici quarte del numero complesso: $\quad \dfrac{(\sqrt{3} - i)^5}{\left(-1+i\right)^3}\quad .$

n. 6 - Trovare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt{2 - \log_3(x^2 - 8x)}}{\text{arcsen}((2x-9)/10)}\,.$$