ANALISI MATEMATICA 2

Anno accademico 2007-08

TRACCE D'ESAME

1. **Esoneri a.a 1997-98**	pag. 2
2. **Esami a.a 1997-98**	pag. 7
3. **Esoneri a.a 1999-00**	pag. 17
4. **Esami a.a 1999-00**	pag. 20
5. **Esoneri a.a 2001-02**	pag. 29
6. **Esami a.a 2001-02**	pag. 31
7. **Esoneri a.a 2003-04**	pag. 40
8. **Esami a.a 2003-04**	pag. 45
9. **Esoneri a.a 2007-08**	pag. 53

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica - 6 novembre 1997 - Numeri Pari

****

1 - Trovare l'insieme di definizione delle funzioni

$$f(x,y)=\log(1-x^2-y),\quad g(x,y)=\arcsin(1-x^2-y),\quad h(x,y)=\log\big(\arcsin(1-x^2-y)\big);$$

di tale insieme indicare l'insieme dei punti interni e l'insieme dei punti di frontiera e dire dunque se si tratta di un insieme aperto o chiuso in $\mathbf{R}^2$.

2 - Data la funzione $f(x,y)=x|x-y|$ spiegare perchè f è continua in $\mathbf{R}^2$. Dire poi se f è differenziabile nei punti $(0,0),\ (0,1),\ (1,1)$.

3 - Data la funzione $f(x,y,z)=xyz+y^2e^{y+z}$,

a) dire perchè f è differenziabile e perchè si può invertire l'ordine di derivazione,
b) trovare il gradiente e il differenziale di f nel punto $(1,-1,-1)$, nonchè la derivata direzionale nella direzione $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$,
c) scrivere l'equazione della superficie di livello di f passante per il punto $(1,-1,-1)$, e l'equazione del piano tangente e della retta normale a tale superficie nel suddetto punto,
d) scrivere la matrice hessiana e il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale $(1,-1,-1)$.

4 - Servendosi della regola della catena calcolare la derivata della funzione $F=F(t)$, composta della funzione $\gamma(t)=(t\cos t,1+t^2,e^{-2t})$ con la funzione $f(x,y,z)=e^{2x-y}-z^2$.

5 - Data la funzione $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+1$ e il punto $P_0=(0,-1)$, dire se può essere applicato il teorema del Dini.
In caso affermativo, dire se l'equazione $f(x,y)=0$ definisce implicitamente in un intorno di P_0 una funzione $y=\varphi(x)$ o una funzione $x=\psi(y)$. In tal caso si calcoli la derivata di φ in 0 o la derivata di ψ in -1.
Dire infine se esistono punti in cui il teorema del Dini non può essere applicato.

6 - Date le funzioni $f:\mathbf{R}^2\longmapsto\mathbf{R}^3$ e $g:\mathbf{R}^3\longmapsto\mathbf{R}^2$ e definite ponendo

$$f(u,v)=(u\cos v,u\sin v,uv),\qquad g(x,y,z)=\big(x^2+y^2,(x-y)e^z\big)$$

trovare le matrici Jacobiane di f e di g rispettivamente nei punti $(1,0)$ ed $(1,0,0)=f(1,0)$.
Trovare poi la funzione composta $h(u,v)=g(f(u,v)$ e verificare che è soddisfatto il teorema sul differenziale della funzione composta.(*Facoltativo*)

7 - Data la funzione $|x-y|(x^2+y^2-1)$, trovare i punti di minimo e massimo relativo di f.
Detto poi D l'insieme dei punti del piano compresi tra la retta di equazione $x+y=0$, la retta di equazione $x=2$ e la semicirconferenza di centro $(1,0)$ e raggio 2 contenuta nel I quadrante, spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f in D e trovare tali punti. (*N.B. nella ricerca dei punti di minimo o massimo sulla frontiera di D usare almeno una volta il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.)*
Dire se la ricerca di tali punti di minimo e massimo pu essere affrontata con il metodo dei moltiplicatori di John; in caso affermativo impostare i calcoli con tale metodo. *(Facoltativo)*

8 - Data la matrice quadrata simmetrica A, avente per righe i vettori $(-1,2,0),\ (2,-5,-2),\ (0,-2,-5)$, scrivere la forma quadratica ad essa associata. Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....
Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

9 - Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (rispett. di John) trovare i punti di minimo e massimo della funzione $f(x,y,z)=xy-zy$ sull'ellisse di equazione

$$\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ 2x-y-z=0. \end{cases}$$

(rispettiv. sulla regione limitata da tale ellisse).

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica - 6 novembre 1997 - Numeri Dispari

****

1 - Trovare l'insieme di definizione delle funzioni

$$f(x,y)=\log(1-x-y^2),\quad g(x,y)=\arcsin(1-x-y^2),\quad h(x,y)=\log\big(\arcsin(1-x-y^2)\big);$$

di tale insieme indicare l'insieme dei punti interni e l'insieme dei punti di frontiera e dire dunque se si tratta di un insieme aperto o chiuso in $\mathbf{R}^2$.

2 - Data la funzione $f(x,y)=x|x+y|$ spiegare perchè f è continua in $\mathbf{R}^2$. Dire poi se f è differenziabile nei punti $(0,0),\ (0,1),\ (1,-1)$.

3 - Data la funzione $f(x,y,z)=xyz+y^2e^{y-z}$,

a) dire perchè f è differenziabile e perchè si può invertire l'ordine di derivazione,
b) trovare il gradiente e il differenziale di f nel punto $(1,-1,1)$, nonchè la derivata direzionale nella direzione $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$,
c) scrivere l'equazione della superficie di livello di f passante per il punto $(1,-1,1)$, e l'equazione del piano tangente e della retta normale a tale superficie nel suddetto punto,
d) scrivere la matrice hessiana e il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale $(1,-1,1)$.

4 - Servendosi della regola della catena calcolare la derivata della funzione $F=F(t)$, composta della funzione $\gamma(t)=(t\cos t,1-t^2,e^{-3t})$ con la funzione $f(x,y,z)=e^{2x+y}+z^2$.

5 - Data la funzione $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+1$ e il punto $P_0=(-1,0)$, dire se può essere applicato il teorema del Dini.
In caso affermativo, dire se l'equazione $f(x,y)=0$ definisce implicitamente in un intorno di P_0 una funzione $y=\varphi(x)$ o una funzione $x=\psi(y)$. In tal caso si calcoli la derivata di φ in -1 o la derivata di ψ in 0.
Dire infine se esistono punti in cui il teorema del Dini non può essere applicato.

6 - Date le funzioni $f:\mathbf{R}^2\longmapsto\mathbf{R}^3$ e $g:\mathbf{R}^3\longmapsto\mathbf{R}^2$ e definite ponendo

$$f(u,v)=(u\sin v,u\cos v,uv),\qquad g(x,y,z)=\big(x^2+y^2,(x-y)e^{-z}\big)$$

trovare le matrici Jacobiane di f e di g rispettivamente nei punti $(1,0)$ ed $(0,1,0)=f(1,0)$.
Trovare poi la funzione composta $h(u,v)=g(f(u,v)$ e verificare che è soddisfatto il teorema sul differenziale della funzione composta.(*Facoltativo*)

7 - Data la funzione $|x+y|(x^2+y^2-1)$, trovare i punti di minimo e massimo relativo di f.
Detto poi D l'insieme dei punti del piano compresi tra la retta di equazione $x-y=0$, la retta di equazione $x=2$ e la semicirconferenza di centro $(1,0)$ e raggio 2 contenuta nel IV quadrante, spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f in D e trovare tali punti. (*N.B. nella ricerca dei punti di minimo o massimo sulla frontiera di D usare almeno una volta il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.)*
Dire se la ricerca di tali punti di minimo e massimo pu essere affrontata con il metodo dei moltiplicatori di John; in caso affermativo impostare i calcoli con tale metodo. *(Facoltativo)*

8 - Data la matrice quadrata simmetrica A, avente per righe i vettori $(1,2,0),\ (2,5,-2),\ (0,-2,5)$, scrivere la forma quadratica ad essa associata. Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....
Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

9 - Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (rispett. di John) trovare i punti di minimo e massimo della funzione $f(x,y,z)=xy+zy$ sull'ellisse di equazione

$$\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ 2x-y+z=0. \end{cases}$$

(rispettiv. sulla regione limitata da tale ellisse).

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica - 4 dicembre 1997 - traccia A

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = x/(y+1)$ spiegare perchè f è integrabile sul dominio D delimitato dalle rette $y = x,\ y = -\sqrt{3}x$ e dalle circonferenze con centro $(0,1)$ e $(0,2)$ e raggio 1 e 2 rispettivamente.

Impostare poi il calcolo del suddetto integrale mediante la formula di riduzione (decomponendo D sia in domini normali all'asse x sia in domini normali all'asse y), e mediante la trasformazione in coordinate polari.

Portare infine a termine il calcolo del suddetto integrale in uno dei suddetti modi.

2 - Dato il dominio dell'esercizio precedente spiegare perchè è ivi integrabile la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x/(y^2+1) & \text{se} \quad x < 0, \\ y/(y^2+1) & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

e impostare il calcolo del suddetto integrale.

3 - Dire in quale dei seguenti domini $D_1,\ D_2$ e D_3 la funzione $f(x,y) = x/(x+y+2)$ è integrabile:

D_1 è la regione compresa tra il semiasse positivo delle x, la retta $x+y=2$ e la curva di equazione $y = x^3$.

D_2 è la regione compresa tra il semiasse negativo delle y, la parabola $x^2 - 2y = 4$, la retta $x+y=2$ e la curva di equazione $y = x^3$.

D_3 è la regione compresa tra la parabola $x^2 - 2y = 4$, la retta $x+y=2$ e la curva di equazione $y = x^3$.

Se è integrabile impostare il calcolo dell'integrale.

4 - Dire per quale dei seguenti problemi di Cauchy vale il teorema di esistenza e unicit "in piccolo" o "in grande":

$$\begin{cases} x' = \dfrac{tx}{\log(4+x)} \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{tx}{\log(4+x^2)} \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{tx^2}{\log(4+x^2)} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Risolvere poi l'ultimo di tali problemi di Cauchy.

5 - Risolvere una almeno delle seguenti equazioni differenziali:

$$x'' - \frac{x'}{2(t+2)} = t, \qquad x' + 4\frac{x}{4t\log t} = \frac{t^2}{x^3}$$

6 - Sapendo che le radici del polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti sono rispettivamente

$$\lambda = -2 \text{ radice tripla e} \qquad \lambda = -1 \pm 2i \text{ radice doppia,}$$

scrivere la suddetta equazione differenziale e il suo integrale generale.
Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma

$$b_1(t) = (t^3-1)e^t, \qquad b_2(t) = (t+3)e^{-2t}, \qquad b_3(t) = t^2 e^{-t}\sin 2t.$$

7 - Servendosi della trasformata di Laplace o direttamente tramite l'integrale generale, risolvere o almeno impostare la risoluzione del problema di Cauchy

$$x'' + x' - 2x = te^t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

8 - Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari non non omogenee $X' = AX + B(t)$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare del precedente sistema nel caso

$$B(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \cos t\begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica - 4 dicembre 1997 - traccia B

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = x/(y+1)$ spiegare perchè f è integrabile sul dominio D delimitato dalle rette $y = -x,\ y = \sqrt{3}x$ e dalle circonferenze con centro $(0,1)$ e $(0,2)$ e raggio 1 e 2 rispettivamente.

Impostare poi il calcolo del suddetto integrale mediante la formula di riduzione (decomponendo D sia in domini normali all'asse x sia in domini normali all'asse y), e mediante la trasformazione in coordinate polari.

Portare infine a termine il calcolo del suddetto integrale in uno dei suddetti modi.

2 - Dato il dominio dell'esercizio precedente spiegare perchè è ivi integrabile la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x/(x^2+1) & \text{se} \quad x < 0, \\ y/(x^2+1) & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

e impostare il calcolo del suddetto integrale.

3 - Dire in quale dei seguenti domini $D_1,\ D_2$ e D_3 la funzione $f(x,y) = x/(x+y-2)$ è integrabile:

D_1 è la regione compresa tra il semiasse negativo delle x, la retta $x + y = -2$ e la curva di equazione $y = x^3$.

D_2 è la regione compresa tra il semiasse positivo delle y, la parabola $x^2 + 2y = 4$, la retta $x + y + 2 = 0$ e la curva di equazione $y = x^3$.

D_3 è la regione compresa tra la parabola $x^2 + 2y = 4$, la retta $x + y = -2$ e la curva di equazione $y = x^3$.

Se è integrabile impostare il calcolo dell'integrale.

4 - Dire per quale dei seguenti problemi di Cauchy vale il teorema di esistenza e unicit "in piccolo" o "in grande":

$$\begin{cases} x' = \dfrac{tx}{\log(9+x)} \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{tx}{\log(9+x^2)} \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{tx^2}{\log(9+x^2)} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Risolvere poi l'ultimo di tali problemi di Cauchy.

5 - Risolvere una almeno delle seguenti equazioni differenziali:

$$x'' - \frac{x'}{2(t+2)} = t, \qquad x' + 4\frac{x}{4t\log t} = \frac{t^2}{x^3}$$

6 - Sapendo che le radici del polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti sono rispettivamente

$$\lambda = 2 \text{ radice tripla e} \qquad \lambda = -2 \pm i \text{ radice doppia,}$$

scrivere la suddetta equazione differenziale e il suo integrale generale.

Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma

$$b_1(t) = (t^3-1)e^t, \qquad b_2(t) = (t+3)e^{2t}, \qquad b_3(t) = t^2e^{-2t}\sin t.$$

7 - Servendosi della trasformata di Laplace o direttamente tramite l'integrale generale, risolvere o almeno impostare la risoluzione del problema di Cauchy

$$x'' + 3x' + 2x = te^{-t}, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

8 - Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari non non omogenee $X' = AX + B(t)$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare del precedente sistema nel caso

$$B(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \cos t\begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

III esonero di Analisi Matematica - 9 gennaio 1998 - traccia A

****

1 - Dire in quale dei seguenti domini D_1, D_2 e D_3 è integrabile la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)/x & \text{se } x > 0, \\ x+y & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

D_1 è la parte del I quadrante limitata dalla circonferenza con centro $(0,0)$ e raggio 2;

D_2 è la parte di D_1 che giace sotto la retta $y = x$;

D_3 è la la parte di D_2 che giace sopra la retta $x + y = 2$.

Se f è integrabile, impostare il calcolo dell'integrale mediante la formula di riduzione e mediante la trasformazione in coordinate polari.

Portare infine a termine il calcolo dei suddetti integrali almeno in uno dei suddetti modi.

2 - Studiare il carattere di due almeno delle seguenti serie numeriche:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(3^{1/n^2} - 1\right), \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}\, \operatorname{arcsen}(1/n^2),$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(1/n))(n - \log n), \qquad d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{nx} \log(1 + 1/n^2),$$

3 - Verificare che la serie di termine generale $2n/(-3)^n$ è convergente e calcolarne la somma con un errore minore di 10^{-2}.

4 - Studiare due almeno delle seguenti serie di potenze, precisandone il raggio di convergenza, l'intervallo di convergenza e il comportamento della serie agli estremi di tale intervallo.

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}(x+1)^n \qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}}(x-1)^n$$

$$c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \log(1 + \frac{1}{n^2})(x-2)^n, \qquad d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5n-1}\left(\frac{3x+2}{5}\right)^n.$$

5 - Trovare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2}.$$

Detta f la funzione somma di tale serie di funzioni, dire se f è continua in tale insieme e se può essere applicato il teorema di integrazione termine a termine.

(Facoltativo) Dire se può essere applicato il teorema di derivazione termine a termine.

6 - Date le funzioni

$$f(x) = \sin x \operatorname{arctg}(\sqrt{\cos x}), \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sin x\, e^{\sqrt{\cos x}},$$

calcolare per serie l' integrale definito tra 0 e $\pi/6$ di f o di g .

(Facoltativo) Spiegare perchè con lo stesso procedimento si può calcolare anche l'integrale di f tra 0 e $\pi/2$ e calcolare tale integrale con un errore minore di 10^{-2}.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 16 gennaio 1998

****

1 - Data la funzione $f(x,y,z) = xy + \cos(y+z)$,

a) dire perchè f è differenziabile e perchè si può invertire l'ordine di derivazione,

b) trovare il gradiente di f nel punto $(0,-1,1)$, nonchè la derivata direzionale nella direzione del vettore $(1,1,-1)$,

c) scrivere l'equazione della superficie di livello di f passante per il punto $(0,-1,1)$, e le equazioni del piano tangente e della retta normale a tale superficie nel suddetto punto,

d) servendosi della regola della catena, calcolare la derivata della funzione composta

$$F(t) = f(\, t\cos t,\ t^2-1,\ 1-2t).$$

2 - Data la funzione $f(x,y) = e^{2x-y}(x^2 - xy)$,

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f,

b) usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare poi i punti di minimo e massimo relativo di f sulla retta di equazione $x+y=0$,

c) detto poi D l'insieme dei punti del piano compresi tra la suddetta retta e la parabola di equazione $y = x^2 + 3x$, spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f in D e trovare tali punti.

(Facoltativo) - Dire se la ricerca di tali punti di minimo e massimo può essere affrontata con il metodo dei moltiplicatori di John; in caso affermativo impostare i calcoli con tale metodo.

3 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica A, avente per righe i vettori $(1,-2,3)$, $(-2,-5,-6)$, $(3,-6,10)$.

Servirsi poi del criterio di Sylvester o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....

Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

4 - Detti D_1 e D_2 i domini limitati dalle parabole di equazione $y = x^2$, $x = y^2$ e dall'iperbole di equazione $8xy = 1$, dire in quale dei suddetti domini è integrabile la funzione $f(x,y) = (1+x)/y$ e calcolare il suddetto integrale.

(*Facoltativo*) - Impostare il calcolo dell'integrale con la formula di riduzione, (decomponendo il dominio sia in domini normali all'asse x che in domini normali all'asse y), e con la trasformazione in coordinate polari.

5 - Dire se il problema di Cauchy $x' + x - 2(t-1)x^3 = 0$, $x(1) = 1$, ha una e una sola soluzione "in piccolo" o "in grande ".

Calcolare poi tale soluzione e confrontare il risultato ottenuto con quello previsto dalla teoria.

6 - Trovare l'insieme X di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2-1)^{2n}}{2n(2n-1)},$$

precisando in quale intervallo la convergenza è uniforme.

Detta f la funzione somma di tale serie di funzioni, dire se f è continua in X, se è ivi derivabile, e se può essere integrata per serie nell'intervallo $[0,1]$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 4 febbraio 1998

****

1 - Data la funzione $f(x,y,z) = e^{x-y} - x^3 + yz + z^2$ e il punto $P = (1,1,0)$, trovare:

a) il gradiente di f nel punto P e la derivata direzionale di f in P nella direzione tangente in tale punto alla curva di equazioni parametriche $x(t) = \cos t,\ y(t) = e^{2t},\ z(t) = t - t^2$,

b) la matrice hessiana di f in P, precisando se la forma quadratica ad essa associata è definita positiva, definita negativa, ecc....

c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P.

2 - Data la funzione $f(x,y) = x^3 + x^2y + xy^2 + 3x^2 + 6xy$,

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f,

b) usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare poi i punti di minimo e massimo relativo di f sulla circonferenza di centro $(0,-3)$ e raggio 3,

c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sul cerchio chiuso di centro $(0,-3)$ e raggio 3 e trovare tali punti.

3 - Trovare la matrice Jacobiana nel punto $(0,1,-1)$ della funzione $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ tale che

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - \sin(y - z^2) \\ xz + \log(1 + y^2) \end{pmatrix}.$$

4 - Dopo aver spiegato perchè la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x^2 + y^2 < 1, \\ x/(x^2 + y^2) & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1, \end{cases}$$

è integrabile sul rettangolo di vertici $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},1)$, $(0,1)$, calcolare tale integrale adoperando sia le formule di riduzione che la trasformazione in coordinate polari.

5 - Trovare l'integrale generale dell' equazione differenziale lineare

$$x^{IV} + x'' + 10x' = (1 + t^2)e^{-2t} + t\sin t.$$

Adoperando la trasformata di Laplace risolvere (o almeno impostare la risoluzione) del problema di Cauchy

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1, \quad x'''(0) = -1.$$

6 - Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione $f(x) = (1 - e^{-x^2})/x$ precisando di tale serie l'insieme di convergenza, e gli intervalli di convergenza totale o uniforme.

Spiegare poi perchè ci si può servire di tale sviluppo per calcolare l'integrale di f tra 0 ed 1 e calcolare tale integrale con un errore minore di $1/100$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 18 febbraio 1998

****

1 - Servendosi della definizione, spiegare perchè la funzione $f(x,y) = |x|(x-y)$ è differenziabile in $(0,0)$ e n nel punto $(0,1)$.

2 - Data la funzione $f(x.y.z) = y\cos(x^2+yz)$ trovare il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto $P = (0, 2, \pi/4)$.

Precisare poi se la forma quadratica associata alla matrice hessiana di f in P è definita positiva, definita ne ecc....

3 - Data la funzione $f(x,y) = xy^2(1-x+2y)$,

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare poi i punti di minimo e massimo relativo di parabola di equazione $x = 1+2y-y^2$.
c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione piana limitata dalla p Γ e dalla retta di equazione $3x+2y=0$ e trovare tali punti.

4 - Dopo aver spiegato perchè la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

è integrabile sulla regione del I quadrante limitata dall'asse x, dalla retta $y=1$ e dalle circonferenze di centro raggi 1 e 2, impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione che con la trasformazione in coo polari e portare a termine il calcolo in uno dei due modi.

5 - In base ai teoremi di esistenza e unicità conosciuti, dire se il problema di Cauchy

$$x' = \frac{x}{t} + \frac{x^2\log t}{t}\,, \qquad\qquad x(1) = 1$$

ha una e una sola soluzione "in grande" o "in piccolo".

Risolvere poi tale problema di Cauchy e confrontare i risultati ottenuti con quelli previsti dalla teoria.

6 - Sapendo che -2 è una radice tripka del polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare om a coefficienti costanti, e che $1+i$ ed $1-i$ sono radici doppie dello stesso polinomio, scrivere la suddetta equazi suo integrale generale.

7 - Dette rispettivamente f e g le funzioni somma delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-5x+2)^n}{n^2 2^n}\,, \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-5x+2)^n}{n^2+2^n},$$

trovare l'insieme di definizione di f e di g e spiegare perchè f e g sono ivi continue.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 30 marzo 1998

****

1 - Data la funzione $f(x,y,z) = x^3 + \log(y^2+z)$ e il punto $P=(-1,-2,-3)$, scrivere l'equazione della superficie di livello di f passante per P, nonchè l'equazione del piano tangente e della retta normale a tale superficie nel punto P.

Servendosi poi della regola della catena, calcolare la derivata in $t=0$ della funzione composta

$$F(t) = f(x(t),\ y(t),\ z(t)) \quad \text{dove} \quad x(t) = -e^{2t}, \quad y(t) = 1+\cos t, \quad z(t) = \sin^2 t.$$

2 - Trovare il polinomio di Taylor del II ordine di punto iniziale $P=(1,0,2)$ della funzione

$$f(x.y.z) = (y+1)z^x.$$

Precisare poi se la forma quadratica associata alla matrice hessiana di f in P è definita positiva, definita negativa, ecc....

3 - Data la funzione $f(x,y) = xy(3-2x-y)$,

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare poi i punti di minimo e massimo relativo di f sulla iperbole Γ di equazione $xy=2$.
c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione del primo quadrante limitata dall' iperbole Γ e dalle rette di equazione $y=2x$ ed $y=x/2$ e trovare tali punti.

4 - Detto D il semicerchio di centro $(2,0)$ e raggio $r=2$ contenuto nel primo quadrante, e detti D_1 e D_2 i due domini in cui la retta di equazione $y=\sqrt{3}(2-x)$ divide D,

a) dire (motivando la risposta) in quale dei due domini D_1 e D_2 è integrabile la funzione $f(x,y) = y/x^2$,
b) calcolare tale integrale, impostando il calcolo sia con le formule di riduzione che con la trasformazione in coordinate polari.

5 - Trovare l'integrale generale di una almeno delle seguenti equazioni differenziali:

$$x' + \frac{x}{t+1} = \frac{(t+1)^3}{2}x^3, \qquad x''' - x = t^2e^t.$$

(Facoltativo) - Per la prima di tali equazioni differenziali, dire se il problema di Cauchy di punto iniziale $x(0)=-1$ ha una e una sola soluzione "in grande" o "in piccolo".

6 - Scrivere le serie ottenute rispettivamente derivando ed integrando termine a termine la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\log^2(n+2)}.$$

Per ciascuna di tali serie trovare poi il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza.

(Facoltativo) - Dire infine se alla serie data si possono applicare i teoremi di derivazione e di integrazione termine a termine in tutto l'insieme di convergenza.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 17 giugno 1998

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = x^3 + \log(x - y^2)$ e il punto $P = (2,1)$, trovare:

a) il gradiente di f nel punto P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(1,2)$,
b) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1,8)$,
c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .
d) Servendosi poi della regola della catena, calcolare la derivata in $t = 0$ della funzione composta
$F(t) = f(x(t),\ y(t))$ dove $x(t) = 2e^{2t}$, $y(t) = 1 + t^2$.

2 - Data la matrice quadrata simmetrica A avente per righe i vettori $(-1,2,0)$, $(2,-5,1)$, $(0,1,-2)$, scrivere la forma quadratica ad essa associata e stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc.... usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

3 - Data la funzione $f(x,y) = xy(x^2 - 5x + y)$:

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare poi gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla parabola Γ di equazione $y = 8x - x^2$;
c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione D del primo quadrante limitata dalla parabola Γ e dalla retta di equazione $x + y = 0$ e trovare tali punti.

(Facoltativo) Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f su D con il metodo dei moltiplicatori di Kuhn Tucker.

4 - Data la funzione $f(x,y) = y/x^2$ e dette D_1 e D_2 le regioni del primo quadrante limitate dall'asse x e dalle circonferenze rispettivamente di centri $(0,0)$ e $(5/2,0)$ e raggi $\sqrt{5}$ e $5/2$,

a) dire (motivando la risposta) in quale dei domini D_1 e D_2 la funzione f è integrabile ,
b) calcolare tale integrale, impostando il calcolo sia con le formule di riduzione che con la trasformazione in coordinate polari.

5 - Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti $x^{(4)} + 2x^{(3)} + 8x' + 16x = 2te^{-2t}$,

a) trovare 4 soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata e scrivere la matrice wronskiana relativa a tali soluzioni ,
b) trovare direttamente una soluzione particolare dell' equazione nonomogenea e impostarne la ricerca con il metodo di variazione delle costanti
c) scrivere l'integrale generale dell' equazione omogenea e di quella nonomogenea,
d) *(Facoltativo)* servirsi della trasformata di Laplace per impostare la risoluzione del problema di Cauchy di dati iniziali: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$, $x'''(0) = -1$.

6 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5 - x^2)^n}{4^n(3n + 2)},$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 3 luglio 1998

****

1 - Dire se per il seguente problema di Cauchy vale il teorema di esistenza e unicit "in piccolo" o "in grande":

$$x' = -\frac{1}{t}\,x + \frac{2\log t}{t}\,x^2, \qquad x(1) = 1/2.$$

Risolvere poi tale problema di Cauchy e confrontare i risultati ottenuti con quelli previsti dalla teoria.

2 - Data la funzione $f(x,y,z) = x^3 + \log(z+y^2)$ e il punto $P = (1,2,-3)$, trovare il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .
Stabilire poi se la matrice hessiana di f in P è definita positiva, definita negativa, ecc.... usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

3 - Data la funzione $f(x,y) = (x-1)^3 - y^3 + (y-x)^3$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla retta di equazione $x - y = 0$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,
c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sul triangolo T limitato dalle rette di equazione $x - y = 0$, $y = 0$ e $x = 1$. e trovare tali punti.

(Facoltativo) Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f su T con il metodo dei moltiplicatori di Kuhn Tucker.

4 - Detto D la regione del I quadrante limitata dalla circonferenza con centro $(0,0)$ e raggio 2, e detti rispettivamente D_1 e D_2 i due domini in cui la retta di equazione $x + y = 1$ divide D,

a) dire (motivando la risposta) in quale dei domini D_1, e D_2 è integrabile la funzione $f(x,y) = \dfrac{x-y+1}{x^2+y^2}$,
b) calcolare tale integrale, impostando il calcolo sia con le formule di riduzione che con la trasformazione in coordinate polari.

5 - Sapendo che le radici del polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti sono rispettivamente

$$\lambda = -1 \text{ radice doppia} \qquad \lambda = 1 \pm 2i \text{ radice semplici},$$

scrivere la suddetta equazione differenziale e il suo integrale generale.
Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma

$$b_1(t) = (t^3-1)e^t, \qquad b_2(t) = (t+3)e^{-t}, \qquad b_3(t) = t^2 e^t \sin 2t.$$

6 - Trovare l'insieme di convergenza S delle serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \cos\frac{1}{n})(x^2-1)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.
Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 20 luglio 1998

****

1 - Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare nonomogenea

$$x^{(6)} + 2x^{(4)} - 7x^{(2)} + 4x = t^2 e^t.$$

Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma

$$b_1(t) = (t^3 - 1)e^{-t}, \qquad b_2(t) = (t + 3)\sin 2t.$$

(Facoltativo) Servendosi della trasformata di Laplace, impostare la ricerca della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(6)} + 2x^{(4)} - 7x^{(2)} + 4x = t^2 e^t, \\ x(0) = 0, \quad x^1(0) = 0, \quad x^{(2)}(0) = 1, \quad x^3(0) = 0, \quad x^{(4)}(0) = -1, \quad x^5(0) = 1. \end{cases}$$

2 - Detta D la regione del I quadrante limitata dagli assi coordinati e dalle rette di equazione $y = 3$ ed $y = 6 - \sqrt{3}x$, e detti rispettivamente D_1 e D_2 i due domini in cui la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 3$ divide D,

a) dire (motivando la risposta) in quale dei domini D_1 e D_2 è integrabile la funzione $f(x, y) = \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^2}$,

b) calcolare tale integrale, impostando il calcolo sia con le formule di riduzione che con la trasformazione in coordinate polari.

3 - Data la funzione $f(x, y) = (x + y)^2 + y^2(2 - x)$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,

b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla parabola di equazione $x = y^2$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,

c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione piana D limitata dalla suddetta parabola e dalla retta di equazione $x - y = 2$, e trovare tali punti.

(Facoltativo) Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f su D con il metodo dei moltiplicatori di Kuhn Tucker.

4 - Trovare l'insieme di convergenza S delle serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(4^{-1/n^2} - 1)(x^2 - 1)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Data la funzione $f(x, y, z) = z^3 e^{y^2 - x}$ e il punto $P = (1, 1, 1)$, trovare il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .

Stabilire poi se la matrice hessiana di f in P è definita positiva, definita negativa, ecc.... usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

6 - Servendosi della regola della catena calcolare la derivata in $t_0 = 0$ della funzione composta

$$F(t) = f(1 - t^2, \cos t, \sqrt{1 + 2t}),$$

dove f è la funzione dell'esercizio precedente.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 20 luglio 1998

****

1 - Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare nonomogenea

$$x^{(6)} + 6x^{(4)} + 9x^{(2)} + 4x = t^2 e^t.$$

Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma

$$b_1(t) = (t^3 - 1)e^{-t}, \qquad b_2(t) = (t + 3)\sin 2t.$$

(Facoltativo) Servendosi della trasformata di Laplace, impostare la ricerca della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(6)} + 6x^{(4)} + 9x^{(2)} + 4x = t^2 e^t, \\ x(0) = 0, \quad x^1(0) = 0, \quad x^{(2)}(0) = 1, \quad x^3(0) = 0, \quad x^{(4)}(0) = -1, \quad x^5(0) = 1. \end{cases}$$

2 - Detta D la regione del I quadrante limitata dagli assi coordinati e dalle rette di equazione $y = 3$ ed $y = 6 - \sqrt{3}x$, e detti rispettivamente D_1 e D_2 i due domini in cui la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 3$ divide D,

a) dire (motivando la risposta) in quale dei domini D_1 e D_2 è integrabile la funzione $f(x, y) = \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$,

b) calcolare tale integrale, impostando il calcolo sia con le formule di riduzione che con la trasformazione in coordinate polari.

3 - Data la funzione $f(x, y) = (x - y)^2 + y^2(2 + x)$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,

b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla parabola di equazione $x = -y^2$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,

c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione piana D limitata dalla suddetta parabola e dalla retta di equazione $x + y + 2 = 0$, e trovare tali punti.

(Facoltativo) Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f su D con il metodo dei moltiplicatori di Kuhn Tucker.

4 - Trovare l'insieme di convergenza S delle serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2^{1/n^3} - 1)(x^2 - 3)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Data la funzione $f(x, y, z) = y^3 e^{z^2 - x}$ e il punto $P = (1, 1, 1)$, trovare il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .

Stabilire poi se la matrice hessiana di f in P è definita positiva, definita negativa, ecc.... usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

6 - Servendosi della regola della catena calcolare la derivata in $t_0 = 0$ della funzione composta

$$F(t) = f(1 - t^2, \cos t, \sqrt{1 + 2t}),$$

dove f è la funzione dell'esercizio precedente.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 14 settembre 1998

****

1 - Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare nonomogenea

$$x''' + x' = 4t\cos t.$$

(Facoltativo) - Impostare la ricerca di una soluzione particolare della suddetta equazione nonomogenea sia direttamente che con il metodo di variazione delle costanti.

Servirsi infine della trasformata di Laplace per impostare la risoluzione del problema di Cauchy di dati iniziali

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = -1.$$

2 - Trovare l'insieme di convergenza S della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-2x)^n}{n3^n + n^2 - 1},$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata o derivata termine a termine.

3 - Della funzione $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2(1+2x)$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo,
b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo sulla circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 = 4$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana D contenente l'origine $(0,0)$ e limitata dalla circonferenza Γ e dalla retta di equazione $x + y + 2 = 0$, (dopo avere spiegato perchè essi esistono).

(Facoltativo) Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f su D con il metodo dei moltiplicatori di Kuhn Tucker.

4 - Dopo aver spiegato perchè la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 4}$$

è integrabile sulla regione D limitata dalla circonferenza con centro $(1,0)$ e raggio 1, e dalle rette di equazione $y = -x$ ed $y = \sqrt{3}x$, calcolare tale integrale impostando il calcolo sia con le formule di riduzione che con la trasformazione in coordinate polari.

5 - Data la funzione $f(x,y,z) = (x^3 - 2y^2)e^{-2z}$ e il punto $P = (-1,1,0)$, scrivere l'equazione della retta normale e del piano tangente in P alla superficie di livello di f che passa per il punto P.

6 - Detti f e P la funzione e il punto dell'esercizio precedente, trovare il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P. Stabilire poi se la matrice hessiana di f in P è definita positiva, definita negativa, ecc.... usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 16 dicembre 1998

****

1 - Servendosi dei teoremi di esistenza ed unicità conosciuti dire se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' + \dfrac{2}{t}x &= 2\dfrac{\log t}{t}\sqrt{x^3} \\ x(1) &= 1 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione "in grande"o "in piccolo ".
Risolvere poi tale problema di Cauchy e confrontare i risultati ottenuti con quelli previsti dalla teoria.

2 - Trovare l'insieme di convergenza S della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n} + n - 1}{n^2 + 1}(3 - 2x)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.
Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata o derivata termine a termine.

3 - Della funzione $f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - 3x$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo,
b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo sulla circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 = 3$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana D limitata dalla circonferenza Γ e dalla retta di equazione $x = \sqrt{2}$ e contenente l'origine $(0, 0)$.

(Facoltativo) Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f su D con il metodo dei moltiplicatori di Kuhn Tucker.

4 - Dette D_1 e D_2 le regioni piane in cui la retta di equazione $y = 1 - \sqrt{3}x$ divide il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1, dire in quale di tali regioni è integrabile la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^3}$$

e calcolare tale integrale impostando il calcolo sia con le formule di riduzione che con la trasformazione in coordinate polari.

5 - Sapendo che le radici del polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti sono rispettivamente

$$\lambda = 2 \text{ radice doppia} \qquad \text{e} \qquad \lambda = 2 \pm i \text{ radici semplici},$$

scrivere la suddetta equazione differenziale e il suo integrale generale.
Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma

$$b_1(t) = (t^3 - 1)e^t, \qquad b_2(t) = (t + 3)e^{2t}.$$

6 - Trovare il polinomio di Taylor del II ordine della funzione $f(x, y, z) = y^2 e^{z^2 - 2x}$ di punto iniziale $P = (0, 1, 0)$.
Stabilire poi se la matrice hessiana di f in P è definita positiva, definita negativa, ecc.... usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica - 19 novembre 1999 - traccia A

****

1 - Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti o divergenti

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{x(x+\sqrt{x+1})}, \qquad \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x+1})}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x(x+\sqrt{x+1})} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x+1})}.$$

2 - Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\log(1-(1/n^{\alpha})), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n^2+3)}{\sqrt{n^3+1}}.$$

3 - Trovare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-5^{-1/n})(x^2-2)^n}{2^n+n}.$$

Detta f la funzione somma di tale serie di funzioni, dire se f è continua in tale insieme e se può essere applicato il teorema di integrazione termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x,y,z) = xy - \cos(x^2+yz)$ spiegare perchè f è differenziabile e trovare:

a) il gradiente e il differenziale di f nel punto $P = (0, \pi/4, 2)$, e la derivata direzionale di f in P nella direzione tangente in tale punto alla curva di equazioni parametriche

$$x(t) = 1 - t,\ y(t) = \text{ arctg } t,\ z(t) = t + t^2,$$

b) il piano tangente e la retta normale alla superficie di livello di f passante per P,

c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P.

5 - Dire per quali valori del parametro α la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è definita positiva, definita negativa o indefinita. Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere ?

6 - Della funzione $f(x,y) = x^3 + (x-y)^2 - 3y$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo,

b) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana D limitata dalla parabola Γ di equazione $y = x^2 - x$ e dalle rette di equazione $x = 1$ e $y = x$.

(Facoltativo) Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f su D con il metodo dei moltiplicatori di Kuhn Tucker.

7 - Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo della funzione $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 + yz - z^2$, soggetta ai vincoli

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4, \\ 4x^2+9y^2+z^2=1 \end{cases} \quad (\text{ rispettiv. } \begin{cases} 2x+3y-z\le 4, \\ 4x^2+9y^2+z^2\le 1 \end{cases}),$$

usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, (rispettivamente di John).

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica - 19 novembre 1999 - traccia B

****

1 - Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti o divergenti

$$\int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{x(x-\sqrt{x+1})}, \qquad \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x+1})}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{x(x-\sqrt{x-1})} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x-1})}.$$

2 - Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\log(1+(1/n^{\alpha})), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+3)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

3 - Trovare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3^{-1/n})(x^2-3)^n}{3^n-n}.$$

Detta f la funzione somma di tale serie di funzioni, dire se f è continua in tale insieme e se può essere applicato il teorema di integrazione termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x,y,z) = xz + \cos(x^2 - yz)$ spiegare perchè f è differenziabile e trovare:

a) il gradiente e il differenziale di f nel punto $P = (0,-2,\pi/4)$, e la derivata direzionale di f in P nella direzione tangente in tale punto alla curva di equazioni parametriche

$$x(t) = 1-t,\ y(t) = 1-3t^2,\ z(t) = \text{ arctg } t,$$

b) il piano tangente e la retta normale alla superficie di livello di f passante per P,

c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P.

5 - Dire per quali valori del parametro α la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è definita positiva, definita negativa o indefinita. Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere ?

6 - Della funzione $f(x,y) = y^3 + (x+y)^2 + 3x$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo,

b) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana D limitata dalla parabola Γ di equazione $x = y - y^2$ e dalle rette di equazione $y = 1$ e $y = -x$.

(Facoltativo) Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f su D con il metodo dei moltiplicatori di Kuhn Tucker.

7 - Impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo della funzione $f(x,y,z) = z^3 - xy^2 + yz - x^2$, soggetta ai vincoli

$$\begin{cases} 2x-3y-z = 4, \\ x^2+9y^2+4z^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{ rispettiv. } \begin{cases} 2x-3y-z \le 4, \\ x^2+9y^2+4z^2 \le 1 \end{cases}),$$

usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, (rispettivamente di John).

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica - 12 gennaio 2000

****

1 - Dire in quale dei seguenti domini D', D'' è integrabile la funzione: $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-3/2}$, dove
D' è il trapezio limitato dagli assi x ed y, e dalle rette di equazione $y = 2$ ed $x + y = 4$;
D'' è la parte di D' esterna alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1.
Se f è integrabile, impostare il calcolo del suddetto integrale mediante la formula di riduzione e mediante la trasformazione in coordinate polari. Portare infine a termine il calcolo del suddetto integrale in uno dei suddetti modi.

2 - Risolvere i problemi di Cauchy : $x' = \dfrac{3x-t}{2x-3t}$, $x(1) = 0$; $x' = x\sin t - x^2 \sin t \cos t$, $x(0) = 1$.

3 - Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti: $x^{(4)} + 2x^{(3)} + 2x^{(2)} + 2x^{(1)} + x = 2te^{-2t}$,

a) trovare 4 soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata e scrivere la matrice wronskiana relativa a tali soluzioni ,
b) trovare direttamente una soluzione particolare dell' equazione nonomogenea e impostarne la ricerca con il metodo di variazione delle costanti
c) scrivere l'integrale generale dell' equazione omogenea e di quella nonomogenea,
d) dire di che forma va trovato un integrale particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma $b_1(t) = (t^2-1)e^t$, $b_2(t) = (t+3)e^{-t}$, $b_3(t) = t^2 e^{-t}\sin 2t$.

4 - Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari omogenee $\begin{cases} x' = 5x - 3y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

Dire poi di che forma va cercata una soluzione particolare del sistema nonomogeneo in cui il vettore dei "termini noti "del sistema è: $B(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}$, $B(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $B(t) = \cos t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5 - Data la funzione $f(x,y) = (x+y)/\sqrt{x^2+y^2}$, e dette D_1 e D_2 le regioni del primo quadrante comprese tra l'asse x e le circonferenze di centro $(0,0)$ e $(1,0)$ e raggio 1, dire in quali di tali regioni f è integrabile ed impostare poi il calcolo dell'integrale mediante la formula di riduzione e mediante la trasformazione in coordinate polari.

6 - Senza risolvere le equazioni differenziali, dire per quale dei seguenti problemi di Cauchy vale il teorema di esistenza e unicit "in piccolo" o "in grande":

$$x' = \frac{tx}{\text{arctg }(1+x)},\quad x(0) = 1\,; \qquad x' = \frac{tx}{\text{arctg }(1+x^2)},\quad x(0) = 1\,; \qquad x' = \frac{tx^2}{\text{arctg }(1+x^2)},\quad x(0) = 1.$$

5 bis - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}\log\big(1+\frac{1}{n^2}\big)(x-3)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.
Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

6 bis - Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti o divergenti

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sin x}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x+1}}{2^x+x}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 19 gennaio 2000

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = 2x^2 + (x+1)e^{y^2-z}$ e il punto $P = (0,1,1)$, trovare:

a) il gradiente di f nel punto P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(1,2,-2)$;
b) l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per P;
c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .

2 - Detta A la matrice hessiana della funzione f dell'esercizio precedente nel punto $P = (0,1,1)$, dire se la forma quadratica ad essa associata è definita positiva, definita negativa, ecc.... usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

3 - Data la funzione $f(x,y) = 4x^2y + y^3 - 3y$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo di f sulla circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 = 3$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione D del primo quadrante limitata dalla circonferenza Γ e dalla retta di equazione $y = 1$.

4 - Data la funzione $f(x,y) = (y+1)/(x^2+1)$,

a) spiegare perchè è integrabile sul quadrato Q di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(-1,1)$;
b) impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, (scomponendo Q in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari o con un altro cambio di variabili;
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

5 - Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti $x^{(4)} - 3x^{(2)} - 4x = 2te^{-2t}$,

a) scrivere l'integrale generale dell' equazione omogenea associata,
b) trovare una soluzione particolare dell' equazione nonomogenea con il metodo diretto e impostarne la ricerca con il metodo di variazione delle costanti,
c) scrivere l'integrale generale dell' equazione nonomogenea.

6 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{3^n(e^{1/n}-1)},$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 2 febbraio 2000

****

1 - Data la funzione $f(x,y,z) = x^2 - x\log|y^2+z|$ e il punto $P=(1,0,-1)$, trovare:

a) l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per P;
b) la derivata in 0 della funzione composta di f con la funzione $t \in \mathbf{R} \mapsto (1-t^2, \sin^2 t, -\cos t) \in \mathbf{R}^3$,
c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .

2 - Detta A la matrice hessiana della funzione f dell'esercizio precedente nel punto $P=(1,1,0)$, dire se la forma quadratica ad essa associata è definita positiva, definita negativa, ecc.... usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

3 - Data la funzione $f(x,y) = e^{2y}(x^3 - 3x^2 + 2y^2)$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo di f sulla curva Γ di equazione $x^3 + 2y^2 = 0$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

4 - Data la funzione $f(x,y) = \dfrac{(2x+1)y}{y^2+1}$, e il dominio D limitato dalle rette di equazione $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$ e dal ramo di iperbole equilatera di equazione $y^2 - x^2 = 8$ che giace sopra l'asse x,

a) spiegare perchè è integrabile su D;
b) impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, (scomponendo D in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

5 - Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 1 + t, \\ y' = 3y - 2z + 2, \\ z' = 5y - 3z - t. \end{cases}$$

In alternativa risolvere il problema di Cauchy

$$x' = 6x/t + (3\log t)\,\sqrt[3]{x^2}\,, \qquad x(1) = -1,$$

precisando se la soluzione esiste ed è unica in tutto l'intervallo $]0,+\infty[$, e se questo era prevedibile in base ai teoremi di esistenza e unicit conosciuti.

6 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3n+2}{n^2+3}}\,\Big(1 - \frac{2}{x}\Big)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 16 febbraio 2000

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = 4xy/(x^2+1)$,

a) spiegare perchè f è integrabile sul dominio D limitato dall'asse x, dalle rette di equazione $x=-1$ ed $x+y=2$ e dalle circonferenze di equazione $x^2+y^2=1$ ed $x^2+y^2=4$;

b) impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, (scomponendo D in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;

c) portare a termine i calcoli di uno almeno di tali integrali doppi.

2 - Data l'equazione differenziale lineari a coefficienti costanti

$$x''' - 2x'' + 2x' = (5t+1)e^{-t},$$

a) trovare tre soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata, dimostrando che sono linearmente indipendenti;

b) trovare una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea con il metodo diretto e impostarne la ricerca con il metodo di variazione delle costanti ;

c) scrivere l'integrale generale dell'equazione omogenea e di quella nonomogenea.

3 - Data la funzione $f(x,y) = 2x^2 + y\log|x^2-y|$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;

b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla curva Γ di equazione $2x^2 - y = 0$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^4+3}} \left(1-|x|\right)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Dire per quali valori del parametro α sono convergenti o divergenti gli integrali impropri della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x^\alpha)}{x\sqrt{x^2+1}}$$

estesi agli intervalli $]0,1]$ e $[1,+\infty[$.

6 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

e dire per quale valore del parametro α essa è definita positiva, definita negativa o indefinita, usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 22 marzo 2000

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = xy^2/\sqrt{x^2+y^2}$,

a) spiegare perchè f è integrabile sul dominio D limitato dall'asse y, dalla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2, dalla retta di equazione $y = x$ e dalla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1,

b) impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, (scomponendo D in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari,

c) portare a termine i calcoli con uno almeno di tali metodi.

2 - Dire se il problema di Cauchy

$$x' + \frac{tx}{1+t^2} = x^3 \text{ arctg } t, \qquad x(0) = 4/\pi$$

ha una e una sola soluzione "in piccolo" o "in grande".
Risolvere poi il suddetto problema di Cauchy e confrontare i risultati ottenuti con quelli previsti dalla teoria.

3 - Data la funzione $f(x,y) = (x-y)(x^2 - 2xy + 2y^2 - 3)$ trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,

b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla curva Γ di equazione $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4$,

c) i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione piana limitata dalla curva Γ.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n+1}{3n-1}(1-x^2) \Big)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Data la funzione $f(x,y) = y^2 + x \log|x^2 - 2z|$ e il punto $P = (1,0,1)$, trovare:

a) il gradiente di f nel punto P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(-2,1,2)$;

b) l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per P;

c) la derivata in 0 della funzione composta di f con la funzione $t \in \mathbf{R} \mapsto (t - t^2, \cos^2 t, 1 - \sin t) \in \mathbf{R}^3$.

6 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & \alpha \\ -1 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

e dire per quale valore del parametro α essa è definita positiva, definita negativa o indefinita, usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 21 giugno 2000

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$,

a) spiegare perchè f è integrabile sul dominio D limitato dall'asse y, dalla retta di equazione $x+y=2$ e dalle circonferenze di equazione $x^2+y^2-y=0$ ed $x^2+y^2-2y=0$;

b) impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, (scomponendo D in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;

c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Dire quali dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2/(x^2-t^2), \\ x(1) = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x^2/(x^2+t^2), \\ x(1) = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x^2/(x^2+t^2), \\ x(0) = 2, \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione "in piccolo" o "in grande". Risolvere poi uno almeno di tali problemi di Cauchy.

3 - Data la funzione $f(x,y) = 2xy^2 + (x-3)(x^2+y^2)$ trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,

b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla circonferenza Γ di centro $(2,0)$ e raggio $2\sqrt{2}$,

c) i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione piana limitata dalla circonferenza Γ e dalla retta di equazione $x+2y=0$, e che contiene il centro di Γ.

4 - Trovare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \log n}{\sqrt{n^3+1}} \Big(\frac{x}{x^2+2}\Big)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Dire in quale dei seguenti intervalli :

$$]-1,0], \qquad [0,3[, \qquad]3,4], \qquad [4,+\infty[, \qquad]-1,3[, \qquad [0,4], \qquad]3,+\infty[,$$

è integrabile in senso improprio la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ e calcolare uno almeno di tali integrali impropri.

6 - Sapendo che le radici del polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti sono : $\lambda = 2$ radice reale doppia , $\lambda = 1 \pm 2i$ radici complesse coniugate semplici,

a) trovare 4 soluzioni linearmente indipendenti e l'integrale generale della suddetta equazione differenziale omogenea e scrivere la matrice wronskiana relativa a tali soluzioni,

b) con il metodo di variazione delle costanti, impostare la ricerca di una soluzione particolare dell' equazione nonomogenea il cui "termine noto" è $b(t) = t \log t$;

c) dire di che forma va cercato un integrale particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma $b_1(t) = (t^2-1)e^t$, $b_2(t) = (t+3)e^{2t}$, $b_3(t) = te^t \sin 2t$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 19 luglio 2000

****

1 - Dato il dominio D del primo quadrante limitato dall'asse x, dalla circonferenza con centro l'origine $(0,0)$ e raggio 3 e dalle rette di equazione $y = x$, $x + y = 2$ ed $x + y = 3$,

a) spiegare perchè è integrabile sul dominio D la funzione $f(x) = x/(y+1)$ e non lo è la funzione $g(x) = x/(y-1)$;
b) impostare il calcolo dell' integrale di f esteso a D sia con le formule di riduzione, (scomponendo D in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Risolvere l'equazione differenziale lineare nonomogenea

$$x^{(4)} + 4x^{(2)} + 4x = 9te^t,$$

impostando anche la ricerca di una soluzione particolare con il metodo di variazione delle costanti.

3 - Data la funzione $f(x,y) = (2x - y)(2x^2 - 2xy + y^2 - 6)$ trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla curva Γ di equazione $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$,
c) i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione del I quadrante limitata dalla curva Γ.

4 - Trovare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n+1}{n^3-2}} \Big(x - \frac{2}{x}\Big)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Data la funzione $f(x,y,z) = x^2 + (2z+1)\log|y^2 + 3z|$ e il punto $P = (1,2,-1)$, trovare:

a) il gradiente di f nel punto P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(-2,1,2)$;
b) l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per P;
c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .

6 - Dire se è definita positiva, definita negativa, ecc.... la forma quadratica associata alla matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 11 settembre 2000

****

1 - Dato il dominio D limitato dalla retta di equazione $y = x - 2$ e dalle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ed $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y = 0$,

a) spiegare perchè è integrabile sul dominio D la funzione $f(x) = x - y$ e non lo è la funzione $g(x) = y/x$;
b) impostare il calcolo dell' integrale di f esteso a D sia con le formule di riduzione, (scomponendo D in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Risolvere l'equazione differenziale $x' = 2tx(1 - 3x)$, trattandola come una equazione a variabili separabili e come una equazione di Bernouilli.
Dire poi se al problema di Cauchy $x' = 2tx(1 - 3x), \quad x(0) = -1$ è applicabile il teorema di esistenza ed unicit à "in piccolo "o "in grande "; risolvere infine tale problema e confrontare il risultato ottenuto con quello previsto dalla teoria.

3 - Data la funzione $f(x, y) = 3x + y^2 - x^3 - 3xy^2$ trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla parabola Γ di equazione $y^2 = 5 - 3x$,
c) i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione limitata dalla curva Γ e dalle rette di equazione $x = -1$ ed $y = -1$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2 + 1)}{8^n(n + 2)}(x - 4)^{3n+2},$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.
Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Trovare il polinomio di Taylor del II ordine della funzione $f(x, y, z) = x^2 e^{xy-z^2}$ di punto iniziale $P = (1, 1, 0)$.
Usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori, dire poi se la forma quadratica associata alla matrice hessiana di f in P è definita positiva, definita negativa, ecc.... Se la stessa matrice fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Sapendo che le radici del polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti sono : $\lambda = -1$ radice reale doppia , $\lambda = 1 \pm i$ radici complesse coniugate semplici,

a) trovare 4 soluzioni linearmente indipendenti e l'integrale generale della suddetta equazione differenziale omogenea e scrivere la matrice wronskiana relativa a tali soluzioni,
b) con il metodo di variazione delle costanti, impostare la ricerca di una soluzione particolare dell' equazione nonomogenea il cui "termine noto" è $b(t) = \log(t^2 + 1)$;
c) dire di che forma va cercato un integrale particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma $b_1(t) = (t^2 - 1)e^t, \quad b_2(t) = (t - 2)e^{-t}, \quad b_3(t) = te^t \cos 2t.$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 15 novembre 2000

****

1 - Detto D il dominio del primo quadrante limitato dall'asse x e dalle circonferenze di equazione $x^2+y^2=4$ ed $x^2+y^2-2y=0$, e detti D_1 e D_2 i domini in cui D viene diviso dalla retta di equazione $y=x$,

a) dire in quale degli insiemi D_1 o D_2 è integrabile la funzione $f(x)=(x-2y)/(x^2+y^2)$;
b) impostare il calcolo dell' integrale di f esteso a D_1 o D_2 sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$x^{(4)}+4x^{(2)}=t^2,$$

a) trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata,
b) impostare la ricerca di un integrale particolare della nonomogenea con il metodo di variazione delle costanti e con il metodo diretto, portando a termine i calcoli in uno dei due modi;
c) trovare l'integrale generale della nonomogenea;
d) dire di che forma andrebbe trovata una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea nel caso il "termine noto " fosse stato $b(t)=t\cos 2t$.

3 - Data la funzione $f(x,y)=y^2(4x-y^2)-x^2y$ trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla parabola Γ di equazione $5x-y^2=0$, servendosi del metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione limitata dalla curva Γ e dalla retta di equazione $x-3y=0$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+3}{2n^4-1}}(x^2-2)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Usando il criterio di Sylvester e/o quello del segno degli autovalori, dire per quali valori del parametro a è definita positiva, definita negativa, ecc.... la forma quadratica associata alla matrice

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

Se la matrice fosse stata la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Usando la regola della catena calcolare la derivata in 0 della funzione $F(t)=f(x(t),y(t),z(t))$ dove

$$f(x,y,z)=2x^2+(x+1)e^{y^2-z},\qquad x(t)=e^{t-t^2},\qquad y(t)=t-2t^3,\qquad z(t)=\sin^2 t.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 13 dicembre 2000

****

1 - Dopo avere spiegato perchè la funzione $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$ è integrabile sul dominio D del primo quadrante limitato dalle rette di equazione $x = 2$ ed $x + y = 4$ e dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$,

a) impostare il calcolo dell' integrale di f esteso a D sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
b) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Dire se il problema di Cauchy

$$x' = -\frac{tx}{1+x^2} + x^3 \text{ artg } t, \qquad x(0) = -1$$

ha una sola soluzione "in piccolo"o "in grande".
Risolvere poi tale problema di Cauchy e confrontare i risultati ottenuti con quelli previsti dalla teoria.

3 - Data la funzione $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y$ trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) gli eventuali punti di minimo e massimo relativo di f sulla parabola Γ di equazione $y - x^2 = 0$, servendosi del metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione limitata dalla curva Γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $2x + y = 5$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) \text{ arcsen } \Big(\frac{1}{n^2+1}\Big)(2x^2-1)^n$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.
Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Usando il criterio di Sylvester e quello del segno degli autovalori, dire se è definita positiva, definita negativa, ecc.... la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se la matrice fosse stata la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Sapendo che le radici del polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare omogenea del quarto ordine a coefficienti costanti sono -2 radice doppia e $1 \pm 2i$, scrivere tale equazione ed il suo integrale generale.
Impostare poi la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto "è $b(t) = te^{2t}$, servendosi sia del metodo di variazione delle costanti che del metodo diretto.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica - 6 dicembre 2001

****

1 - Dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri della funzione

$$f(x) = \frac{\text{arctg } (1/x)}{x\sqrt{x+2}}$$

sugli intervalli $\quad]-2,-1], \quad [-1,0[, \quad]0,1], \quad [1,+\infty[, \quad]-2,0[, \quad]0,+\infty[, \quad]-2,+\infty[.$

2 - Studiare il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^3 - 2n}{2^{n^2} - n^4 + 1}.$$

3 - Trovare l'insieme S di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{nx} \text{ arcsen } (1/n^2), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+1}{5n-1}\left(\frac{2x-3}{4}\right)^n.$$

Dire poi se la convergenza è uniforme in tale insieme S di convergenza o indicare i sottoinsiemi di S in cui la convergenza è uniforme. Detta $f : S \mapsto \mathbf{R}$ la funzione somma di tale serie di funzioni, dire se f è continua in S ed in quali intervalli f può essere integrata termine a termine.

4 - Data la funzione $\quad f(x,y,z) = y^2 - 2z\sin(x-3y)$ spiegare perchè f è differenziabile e trovare:

a) dire perchè f è differenziabile e perchè si può invertire l'ordine di derivazione,
b) trovare il gradiente e il differenziale di f nel punto $P = (\pi/6, 0, 2)$, e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(1,-1,-1)$,
c) scrivere l'equazione della superficie di livello di f passante per il punto P, e l'equazione del piano tangente e della retta normale a tale superficie nel suddetto punto,
d) scrivere la matrice hessiana e il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P.

5 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è definita positiva, definita negativa o indefinita. Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere ?

6 - Data la funzione $\quad f(x,y) = (2x+y)^3 - 3x^2 - 3y, \quad :$

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo,
b) trovare gli eventuali punti di minimo o massimo relativo sulla parabola Γ di equazione $x^2 + 2x + y = 0$ adoperando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) . spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione piana D limitata dalla parabola Γ di equazione $x^2+2x+y = 0$ e dalla retta di equazione $x+y+2 = 0$ e trovare tali punti di minimo e massimo assoluto, usando preferibilmente il metodo dei moltiplicatori di John.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica - 23 gennaio 2002

****

1 - Dire in quale dei seguenti domini D', D'' è integrabile la funzione: $f(x,y) = xy/(x^2+y^2-4)$, dove D' è la regione compresa tra le circonferenze Γ_1 e Γ_2 di equazione rispettivamente $x^2+y^2-2x=0$ ed $x^2+y^2-2y=0$ che contiene il centro di Γ_2, e D'' è la regione compresa tra Γ_1,, Γ_2, la circonferenza Γ_3 con centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$ e la retta di equazione $y=x$.
Se f è integrabile, impostare il calcolo del suddetto integrale mediante la formula di riduzione e mediante la trasformazione in coordinate polari. Portare infine a termine il calcolo del suddetto integrale in uno dei suddetti modi.

2 - Dopo avere spiegato se ci si può aspettare una ed una sola soluzione "in grande "o "in piccolo ", risolvere il problema di Cauchy :

$$x' = \frac{1}{2t\log t}x + \frac{\log^3 t}{tx^3}, \qquad x(e) = -1.$$

3 - Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti:

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} - 3x^{(2)} + 8x' - 4x = 0, \qquad x^{(4)} + 2x^{(3)} + 2x^{(2)} = 0.$$

Per l'una o per l'altra scrivere la matrice wronskiana relativa a quattro soluzioni linearmente indipendenti e dire di che forma va trovato un integrale particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è della forma

$$b_1(t) = (t^2-1), \qquad b_2(t) = (t+3)e^{-2t}, \qquad b_3(t) = te^{-t}\sin t.$$

4 - Trovare tre soluzioni linearmente indipendenti del sistema di equazioni differenziali lineari omogenee

$$x' = 2x - y + z, \qquad y' = x - z, \qquad z' = -y + 3z,$$

verificando che esse sono linearmente indipendenti. Scrivere poi l'integrale generale di tale sistema e, (usando il metodo di variazione delle costanti), impostare la ricerca di una soluzione particolare del sistema nonomogeneo in cui il vettore dei "termini noti "del sistema è: $B(t) = (e^{-t}, t, 1)^T$.
Dire infine di che forma va cercata una soluzione particolare del sistema nonomogeneo in cui il vettore dei "termini noti "del sistema è:

$$B(t) = e^{-t}(t-1, t, 0)^T, \qquad B(t) = e^{2t}(1, 0, t)^T.$$

5 - Dopo avere spiegato perchè la funzione $f(x,y) = x/(1+y^2)$ e è integrabile sul dominio D limitato dalla retta di equazione $x = -\sqrt{3}/2$ e dalle circonferenze di equazione $x^2+y^2=1$ ed $x^2+y^2-2y=0$, impostare il calcolo dell'integrale mediante le formule di riduzione e mediante la trasformazione in coordinate polari e portare a termine il calcolo in uno dei modi.

6 - Senza risolvere le equazioni differenziali, dire per quale dei seguenti problemi di Cauchy vale il teorema di esistenza e unicit "in piccolo" o "in grande":

$$x' = \frac{tx}{\sqrt{1-x}}, \quad x(0) = -2\,; \qquad x' = \frac{tx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x(0) = -2\,; \qquad x' = \frac{t+x^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x(0) = -2\,;$$

5 bis - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1/3)^n \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \cdot (x^2-1)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

6 bis - Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti o divergenti

$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\arcsin x}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+1}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 6 febbraio 2002

****

1 - Dopo avere spiegato perchè la funzione $f(x,y) = y/x$ è integrabile sul dominio D limitato dalla retta di equazione $y = -\sqrt{3}x$, dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$,

a) impostare il calcolo dell' integrale di f esteso a D sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
b) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Dire se, in base ai teoremi di esistenza e unicità conosciuti, il problema di Cauchy

$$x' = \frac{2}{3}x\tan(t) + \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{x}}, \qquad x(\pi/6) = 1/\sqrt[3]{3},$$

ha una e una sola soluzione in "piccolo" o in "grande". Risolvere poi tale problema di Cauchy e confrontare il risultato trovato con quello previsto dalla teoria.

3 - Data la funzione $f(x,y) = 3x^2 + xy - \log(x+y+5)$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo di f sulla parabola Γ di equazione $y = x^2 - x - 5$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione compresa tra la curva Γ e la retta di equazione $x + y = 4$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^4+2}} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Data la matrice quadrata simmetrica A, avente per righe i vettori $(-2,3,0)$, $(3,-5,1)$, $(0,1,-4)$, scrivere la forma quadratica ad essa associata. Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....

Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Adoperando la regola della catena, calcolare la derivata in 0 della funzione composta $F = f \circ \gamma$ dove:

$$\gamma : \ t \in \mathbf{R} \mapsto (1 - t^2, t\sin t, 1 - \cos 3t) \in \mathbf{R}^3 \qquad \text{ed} \qquad f : (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mapsto x^2 e^{y^2 + xz}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 20 febbraio 2002

****

1 - Dette D_1 e D_2 le regioni piane del primo quadrante limitate (nell'ordine) dal semiasse positivo delle y, dalle circonferenze di equazione $x^2+y^2-4y=0$ ed $x^2+y^2=8$, dalla retta di equazione $y=\sqrt{3}x$ e dalla circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$, dire in quale di esse è integrabile la funzione

$$f(x,y)=x/(x^2+y^2).$$

Se f è integrabile in D_1 o in D_2,

a) impostare il calcolo dell' integrale di f sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
b) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Risolvere le equazioni differenziali lineari:

$$x'=\frac{2t}{t^2+4}\cdot x+4t, \qquad\qquad x'''-x''+x'-x=te^t.$$

3 - Data la funzione $f(x,y)=x^3-y^3+(y-x+2)^3$:

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare i punti di minimo e massimo relativo di f sull' arco di iperbole equilatera Γ di equazione $xy=4$ e giacente nel primo quadrante ;
c) trovare i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione compresa tra l'asse y, la curva Γ e le rette di equazione $y=x+3$ ed $y=x-3$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\big(2^{1/n^2}-1\big)\cdot(x-1)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Data la matrice quadrata simmetrica A, avente per righe i vettori $(3,2,0)$, $(2,4,2)$, $(0,2,3)$, scrivere la forma quadratica ad essa associata. Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....

Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Trovare l'equazione del piano tangente e della retta normale in $P=(1,1-2)$ alla superficie di livello della funzione $f(x,y,z)=(x^2+2yz)\log|y^2+xz|$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 23 marzo 2002

****

1 - Detta D la regione del semipiano $x \geq 0$, limitata dalle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ed $x^2 + y^2 = 4$, e dalle rette di equazione $y = -\sqrt{3}x$ ed $y = x$,

a) dire perchè è integrabile in D la funzione $\quad f(x, y) = xye^{x^2+y^2}$,
b) impostare il calcolo dell' integrale di f sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Risolvere le equazioni differenziali lineari:

$$x' = \frac{2}{t-2} \cdot x - \frac{2}{t^2-4} \cdot x\sqrt{x}, \qquad\qquad x^{(4)} + 3x^{(2)} - 4x = (t+2)e^{-t}.$$

3 - Data la funzione $\quad f(x, y) = e^{x/2}(x^2 - 6xy + 3xy^2)$:

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare i punti di minimo e massimo relativo di f sull' arco di parabola Γ di equazione $x = y^2 - 2y$;
c) trovare i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione limitata, compresa tra l'asse x, la curva Γ e la retta di equazione $x = 3$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \cos\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\,\big) \cdot (x+1)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Data la matrice quadrata simmetrica A, avente per righe i vettori $(-4, 1, 3)$, $(1, -2, 1)$, $(3, 1, -5)$, scrivere la forma quadratica ad essa associata. Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....
Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Trovare la matrice Jacobiana nel punto $P = (1, -2)$ della funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{tale che} \qquad f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{2x-y} \\ x^2 - 3xy \\ \log|1 + xy| \end{pmatrix}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 20 giugno 2002

****

1 - Dopo avere spiegato perchè la funzione $f(x,y) = x/(y^2+4)$ è integrabile sul dominio D limitato dall'asse x e dalle circonferenze rispettivamente di centro (0.0) e raggio 4 e di centro $(0,1)$ e raggio 1;

a) impostare il calcolo dell' integrale di f esteso a D sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
b) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Dire se, in base ai teoremi di esistenza e unicità conosciuti, il problema di Cauchy

$$x' = \frac{-tx}{1+t^2} + x^3 \text{ arctg } t, \qquad x(0) = 1,$$

ha una e una sola soluzione in "piccolo" o in "grande". Risolvere poi tale problema di Cauchy e confrontare il risultato trovato con quello previsto dalla teoria.

3 - Data la funzione $f(x,y) = (x^2 - 2xy + 3)e^{-y^2}$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo di f sull'iperbole equilatera Γ di equazione $xy = 4$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione compresa tra la curva Γ e le rette di equazione $y = 4$ e $x - 2y + 2 = 0$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n - 1} \left(x^2 + x\right)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Data la funzione $f(x.y.z) = 4x^2 + 3y^2 + z^2 - 6xy + xz - 3y + 4z$,

a) trovare la matrice hessiana di f in un punto arbitrario di $\mathbf{R}^3$,
b) dire se la forma quadratica associata a tale matrice è definita positiva, definita negativa, ecc. ..... ,
c) dire se f è convessa, concava, strettamente convessa o strettamente concava, ecc. .....

6 - Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti o divergenti

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{e^{\sqrt{x}} - 1}\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{e^{\sqrt{x}} - 1}\, dx.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 4 luglio 2002

****

1 - Detta D la regione del semipiano $x \geq 0$, limitata dalle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ed $x^2 + y^2 = 1$ e dalla retta di equazione $x + y = 0$,

a) dire perchè è integrabile in D la funzione $f(x, y) = y/x$,
b) impostare il calcolo dell' integrale di f sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Risolvere l' equazione differenziale lineare nonomogenea $x^{(4)} + 9x^{(2)} = t^2 e^{-t}$.

3 - Data la funzione $f(x, y) = x^3 - 4y^3 - 6x^2y + 12y$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo relativo di f sull'ellisse Γ di equazione $2x^2 + y^2 = 4$;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sul sottoinsieme del primo quadrante limitato dalla curva Γ.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(\frac{n}{1-2n}\Big)(2x^2 - x)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....

Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Trovare il piano tangente e la retta normale nel punto $P = (2, 1, 1)$ alla superficie di livello passante per P della funzione $f(x, y, z) = (x^2 - y^2)e^{y-z}$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 18 luglio 2002

****

1 - Detta D la regione piana limitata dalle circonferenze di equazione $x^2+y^2=1$ ed $x^2+y^2=8$ e dalle rette di equazione $x=0$, $x=2$ ed $x-y=0$,

a) dire perchè è integrabile in D la funzione $f(x,y)=y/(x^2+y^2)^3$,
b) impostare il calcolo dell' integrale di f sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Risolvere l' equazione differenziale lineare nonomogenea $x^{(5)}-2x^{(3)}-8x'=te^{-2t}$.

3 - Data la funzione $f(x,y)=x^2y+\frac{2}{3}y^3-2x^2-3y^2$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo relativo di f sulla circonferenza Γ di equazione $x^2+y^2=8$;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana limitata dalla curva Γ.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{1/n}-1}{3^n+1}\,(x-2)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&2&-1\\-2&-1&5\end{pmatrix}.$$

Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....
Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Trovare il piano tangente e la retta normale nel punto $P=(-2,1,1)$ alla superficie di livello passante per P della funzione $f(x,y,z)=x^3+2z\log(2y^2-yz)$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 12 settembre 2002

****

1 - Sia f la funzione definita ponendo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

sia T il triangolo di vertici $(0,-4)$, $(0,4)$ e $(4,-4)$, e sia B il cerchio aperto con centro l'origine $(0,0)$ e raggio 1.

a) Spiegare perchè f non è integrabile in T , mentre è integrabile in $D = T - B$;
b) impostare il calcolo dell' integrale di f esteso al donminio D sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Trovare l'integrale generale dell' equazione differenziale lineare nonomogenea

$$x^{(4)} + 8x^{(2)} - 9x = te^{-t}.$$

Dell'equazione omogenea associata indicare quattro soluzioni linearmente indipendenti, indicando perché sono indipendenti.

3 - Data la funzione $f(x,y) = x(x^2+3y^2+6y)$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo relativo di f sulla circonferenza Γ di equazione $x^2+y^2+2y = 0$;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana che è limitata dalla curva Γ e dalla retta r di equazione $y = x+2$ e che contiene l'origine $O = (0,0)$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} \left(2 - 1/x\right)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -5 & -6 \\ -3 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....

Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 13 novembre 2002

****

1 - Detta D la regione del semipiano $y \geq 0$, limitata dalle circonferenze di equazione $x^2+y^2-4x=0$ ed $x^2+y^2=16$ e dalla retta di equazione $x+y=0$,

a) dire perchè è integrabile in D la funzione $f(x,y)=x^2/y$,
b) impostare il calcolo dell' integrale di f sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Trovare l'integrale generale dell' equazione differenziale lineare nonomogenea

$$x^{(4)} - 8x^{(2)} + 16x = (t+1)e^{-2t}.$$

Dell'equazione omogenea associata indicare quattro soluzioni linearmente indipendenti, indicando perché sono indipendenti.

3 - Data la funzione $f(x,y)=y^3+(2x-y)^2-6x$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo relativo di f sulla parabola Γ di equazione $4x-y^2=0$;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana che è limitata dalla curva Γ e dalla retta r di equazione $y=x-3$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{1/n^2}-1\right)\cdot\left(x^2-x\right)^n}{2^n-n^2},$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 10 & -6 \\ -2 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita positiva, definita negativa, ecc....
Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 16 dicembre 2002

****

1 - Detta D la regione del primo quadrante limitata dall'asse x, dall'asse y, dalle rette di equazione $x - 2y$ ed $x = 4$ e dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$,

a) dire perchè è integrabile in D la funzione $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)^2$,
b) impostare il calcolo dell' integrale di f sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini all'asse x e/o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Trovare l'integrale generale dell' equazione differenziale lineare nonomogenea

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 5x^{(2)} = t^2 e^t.$$

Dell'equazione omogenea associata indicare quattro soluzioni linearmente indipendenti, indicando perché sono i denti.

3 - Data la funzione $f(x, y) = x^3 - (2x - y)^3 + 3(x - y)$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo relativo di f sulla curva Γ, ramo di iperbole equilatera di equazione giacente nel primo quadrante;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana limitata dalla curva Γ e dalle rette di equazion ed $y = 3$.

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2 + 3)}{\sqrt{n^2 + 1}} (x - 2)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può integrata termine a termine.

5 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 4 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Servirsi del criterio di Sylvester e/o del polinomio caratteristico della matrice per stabilire se essa è definita p definita negativa, ecc....

Se A fosse la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto conclude natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica - 18 novembre 2003 - Traccia A

****

1 - Trovare l'insieme di definizione delle funzioni

$$f(x,y)=\frac{x^2}{x+y-4},\qquad g(x,y)=\log(3-x+y^2),\qquad h(x,y)=\sqrt{\frac{x^2-2x-y}{x-y}};$$

dire se tali insiemi sono aperti o chiusi in $\mathbf{R}^2$, motivando la risposta.
Spiegare infine perché tali funzioni sono continue nel loro insieme di definizione.

2 - Detto D il dominio piano del I quadrante, limitato dall'asse x, dalla retta $y=x$ e dalle iperboli equilatere di equazione $xy=2$ ed $x^2-y^2=3$, dire perché in D é integrabile la funzione $f(x,y)=x^2+y^2$ e non é integrabile la funzione $g(x,y)=x^2/y^2$.
Impostare poi i calcoli dell'integrale di f esteso a D sia con le formule di riduzione per domini normali all'asse x o y che con la trasformazione in coordinate polari; condurre infine a termine i calcoli in uno dei due modi.

n.3 - Data la funzione $f(x,y,z)=e^{x-y}(2yz-z^2)$ e il punto $P=(1,1,-1)$,

a) dire perchè f è differenziabile e perchè si può invertire l'ordine di derivazione,
b) trovare il gradiente e il differenziale di f in P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(2,-1,-2)$,
c) scrivere l'equazione della superficie di livello di f passante per il punto P, e l'equazione del piano tangente e della retta normale a tale superficie nel suddetto punto,
d) scrivere la matrice hessiana e il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P,
e) dire se la matrice hessiana di f in P é definita (positiva o negativa), semidefinita (positiva o negativa) o indefinita.

4 - Data la curva Γ di equazioni parametriche

$$x(t)=t,\qquad y(t)=te^t,\qquad z(t)=\log t-t^2,$$

scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva nel punto $P=(x(1),y(1),z(1))$.
Con la regola della catena calcolare poi la derivata in $t_0=1$ della funzione composta $F(t)=f(x(t),y(t),z(t))$, dove f é la funzione dell'esercizio precedente.

5 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&1&-1\\3&-1&6\end{pmatrix}$$

è definita positiva, definita negativa o indefinita. Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere ?

6 - Data la funzione $f(x,y)=2(x+y)^3+y^3-3(x+y)^2-3y,$:

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo,
b) trovare gli eventuali punti di minimo o massimo relativo sulla ellisse Γ di equazione $x^2+2xy+2y^2-2y=0$ adoperando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione piana D limitata dalla curva Γ e trovare tali punti di minimo e massimo assoluto.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica - 18 novembre 2003 - Traccia B

****

1 - Trovare l'insieme di definizione delle funzioni

$$f(x,y)=\frac{x^2}{x-2y+4},\qquad g(x,y)=\sqrt{3-x+y^2},\qquad h(x,y)=\log\Big(\frac{x^2-2x+y}{x+y}\Big);$$

dire se tali insiemi sono aperti o chiusi in $\mathbf{R}^2$, motivando la risposta.
Spiegare infine perché tali funzioni sono continue nel loro insieme di definizione.

2 - Detto D il dominio piano del I quadrante, limitato dall'asse y, dalla retta $y=x$ e dalle iperboli equilatere di equazione $xy=2$ ed $y^2-x^2=3$, dire perché in D é integrabile la funzione $f(x,y)=x^2+y^2$ e non é integrabile la funzione $g(x,y)=y^2/x^2$.
Impostare poi i calcoli dell'integrale di f esteso a D sia con le formule di riduzione per domini normali all'asse x o y che con la trasformazione in coordinate polari; infine condurre a termine i calcoli in uno dei due modi.

3 - Data la funzione $f(x,y,z)=e^{x+y}(2yz+z^2)$ e il punto $P=(-1,1,-1)$,

a) dire perchè f è differenziabile e perchè si può invertire l'ordine di derivazione,
b) trovare il gradiente e il differenziale di f in P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(-2,-1,2)$,
c) scrivere l'equazione della superficie di livello di f passante per il punto P, e l'equazione del piano tangente e della retta normale a tale superficie nel suddetto punto,
d) scrivere la matrice hessiana e il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P,
e) dire se la matrice hessiana di f in P é definita (positiva o negativa), semidefinita (positiva o negativa) o indefinita.

4 - Data la curva Γ di equazioni parametriche

$$x(t)=-t^2,\qquad y(t)=te^t,\qquad z(t)=\log t-t,$$

scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva nel punto $P=(x(1),y(1),z(1))$.
Con la regola della catena calcolare poi la derivata in $t_0=1$ della funzione composta $F(t)=f(x(t),y(t),z(t))$, dove f é la funzione dell'esercizio precedente.

5 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

è definita positiva, definita negativa o indefinita. Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione in un punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere ?

6 - Data la funzione $f(x,y)=2(x-y)^3-y^3-3(x-y)^2+3y,$:

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo,
b) trovare gli eventuali punti di minimo o massimo relativo sulla ellisse Γ di equazione $x^2-2xy+2y^2+2y=0$ adoperando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) spiegare perchè esistono i punti di minimo e massimo assoluto di f sulla regione piana D limitata dalla curva Γ e trovare tali punti di minimo e massimo assoluto.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica - 8 gennaio 2004 - Traccia A

****

1 - Calcolare gli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

2 - Mediante il criterio di confronto asintotico, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+2}} \quad \text{sugli intervalli} \quad]-2,-1], \qquad [-1,0[, \qquad]0,1], \qquad [1,+\infty[, \qquad]0,+\infty[.$$

3 - Trovare la ragione della serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{x^{2n-1}}.$$

Dire quindi per quali valori della variabile x la serie é convergente (o divergente) e quale ne é la funzione somma .

4 - Studiare il carattere delle serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-n+2}}{n^2-n\log n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\Big(\frac{n^2+1}{2^n-1}\Big).$$

5 - Studiare la seguente serie di potenze, precisandone l'intervallo di convergenza e il comportamento della serie agli estremi di tale intervallo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{2n^2-1}(x-1)^n.$$

Indicare infine in quali intervalli la convergenza é assoluta, totale, uniforme, in quale intervallo la funzione somma é continua o derivabile, ed in quali intervalli puó essere integrata termine a termine.

6 - Calcolare mediante sviluppo in serie l' integrale definito

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

indicando il numero minimo di termini che occorre sommare per approssimare l'integrale con un errore minore di 10^{-2}.

6 bis - Dire perché é integrabile la funzione:

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2},$$

sulla regione piana D compresa tra il semiasse positivo delle ascisse, le rette di equazione $x = 3$ ed $y = x$ e le circonferenze Γ_1 e Γ_2 di equazione rispettivamente $x^2+y^2-2x = 0$ ed $x^2+y^2-4x = 0$.

Impostare il calcolo dell'integrale doppio di f esteso a D, mediante la formula di riduzione e mediante la trasformazione in coordinate polari.

Portare infine a termine il calcolo del suddetto integrale in uno dei suddetti modi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica - 8 gennaio 2004 - Traccia B

****

1 - Calcolare gli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

2 - Mediante il criterio di confronto asintotico, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \quad \text{sugli intervalli} \quad]0,1], \qquad [1,2[, \qquad]2,3], \qquad [3,+\infty[, \qquad]2,+\infty[.$$

3 - Trovare la ragione della serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{x^{3n}}.$$

Dire quindi per quali valori della variabile x la serie é convergente (o divergente) e quale ne é la funzione somma .

4 - Studiare il carattere delle serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-\log n+2}}{n^2-n\sqrt{n}+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-2\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\Big(\frac{n^3+1}{3^n-1}\Big).$$

5 - Studiare la seguente serie di potenze, precisandone l'intervallo di convergenza e il comportamento della serie agli estremi di tale intervallo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n^2+2n)}(x+2)^n.$$

Indicare infine in quali intervalli la convergenza é assoluta, totale, uniforme, in quale intervallo la funzione somma é continua o derivabile, ed in quali intervalli puó essere integrata termine a termine.

6 - Calcolare mediante sviluppo in serie l' integrale definito

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx,$$

indicando il numero minimo di termini che occorre sommare per approssimare l'integrale con un errore minore di 10^{-2}.

6 bis - Dire perché é integrabile la funzione:

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2},$$

sulla regione piana D compresa tra il semiasse positivo delle ascisse, le rette di equazione $y=\sqrt{3}$ ed $y=x$ e le circonferenze Γ_1 e Γ_2 di equazione rispettivamente $x^2+y^2-2x=0$ ed $x^2+y^2-4x=0$.

Impostare il calcolo dell'integrale doppio di f esteso a D, mediante la formula di riduzione e mediante la trasformazione in coordinate polari.

Portare infine a termine il calcolo del suddetto integrale in uno dei suddetti modi.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
III Esonero di MATEMATICA 2 (Analisi Matematica) - 28 gennaio 2004
****

1 - Dopo avere spiegato se ci si può aspettare una ed una sola soluzione "in grande "o "in piccolo ", risolvere uno almeno dei problemi di Cauchy :

$$\begin{cases} x' = (4+x^2)\cos t, \\ x(0) = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2t\cos^2 x, \\ x(0) = \pi/4 \end{cases}.$$

2 - Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti e la matrice wronskiana relativa a due (o tre) soluzioni linearmente indipendenti:

$$x'' + 2x' - 3x = 0, \qquad x'' + 4x' + 5x = 0,$$
$$x''' + 3x'' - 4x = 0, \qquad x''' + 3x'' + x' - 5x = 0.$$

Per una almeno di tali equazioni, trovare una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea il cui "termine noto" $b(t)$ è $b(t) = te^{-t}$, usando il metodo diretto e il metodo di variazione delle costanti .
Della stessa equazione differenziale non omogenea dire di che forma va trovato un integrale particolare se il "termine noto" $b(t)$ è della forma

$$b_1(t) = (t^2 - 1), \qquad b_2(t) = (t+3)e^t, \qquad b_3(t) = te^{-2t}\sin t.$$

4 - Dato il sistema di equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + t + 5, \\ y' = 4x - y + 2t - 5, \end{cases}$$

trovare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema lineare omogeneo associato, verificando che esse sono linearmente indipendenti.
Trovare poi una soluzione particolare del sistema nonomogeneo, (o almeno impostarne la ricerca), e scrivere l'integrale generale di tale sistema.

5 - Risolvere una almeno delle equazioni differenziali

$$x'' - (2/t)x' = 10t^3, \qquad x' = \frac{x}{4t\log t} + \frac{t^3}{x^3}.$$

6 - Mediante il criterio di confronto asintotico, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{\sqrt[3]{2x^5 + x^4}} \qquad \text{sugli intervalli} \quad]-1,-3/4], \quad]-1/2,-1/4], \quad]0,1], \quad [1,+\infty[, \quad]0,+\infty[.$$

7 - Data la funzione $f(x,y) = x/y^2$, e il dominio D limitato dalla retta di equazione $y = -x$ e le circonferenze di raggio 1 e centro rispettivamente $(0,0)$ e $(0,1)$,

a) spiegare perchè f è integrabile su D;
b) impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

8 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\Big(\frac{n-2}{n^2-2}\Big)(x-2)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua, o derivabile e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
Esame di MATEMATICA 2 (Analisi Matematica) - 28 gennaio 2004

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = x/y^2$, e il dominio D limitato dalla retta di equazione $y = -x$ e le circonferenze di raggio 1 e centro rispettivamente $O = (0,0)$ e $(0,1)$,

a) spiegare perchè f è integrabile su D;
b) impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

2 - Data l' equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti

$$x'' - 3x' - 4x = (5t-6)e^{-t},$$

a) trovare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata, (verificando che sono linearmente indipendenti),
b) trovare una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea con il metodo diretto e con il metodo di variazione delle costanti,
c) scrivere l'integrale generale dell'equazione e dell'equazione omogenea associata.

3 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\Big(\frac{n-2}{n^2-2}\Big)(x-2)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua, o derivabile e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x,y) = x^2 - 2\log|x-y^2|$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo di f sulla curva Γ di equazione $x^2 - y^2 + 1 = 0$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana compresa tra la curva Γ e le rette di equazione $x = 2$ ed $x = -2$.

5 - Data la funzione $f(x,y,z) = (x^2 - y)e^{2y-z^2}$ e il punto $P = (1,2,-2)$, trovare:

a) il gradiente di f in P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(2,2,-1)$,
b) l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per P;
c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .

6 - Dire per quali valori del parametro a la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix},$$

è definita positiva, definita negativa, o indefinita.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di MATEMATICA 2 (Analisi Matematica) - 11 febbraio 2004

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$, e i domini del primo quadrante D_1 e D_2 limitati dalla retta di equazione $y = \sqrt{3}x$, dalla circonferenze di centro $(0,0)$ e raggio 2 e dalla circonferenze di centro $(1,0)$ e raggio 1,

a) spiegare perchè f è integrabile su D_1 e su D_2;
b) impostare il calcolo dell' integrale di f su D_1 o su D_2, sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

2 - Risolvere una almeno delle equazioni differenziali:

$$x' = \frac{4x}{t\log t} - \frac{16x\sqrt[4]{x}}{t}, \qquad x'' - 6x' + 10x = t^2e^t.$$

3 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2\log n + 1}(1-x)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua, o derivabile e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x,y) = (x+y)^3 - 6xy^2 - 3x^2 + 3x - 3y$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo di f sulla curva Γ di equazione $3x^2 - 3xy + y^2 = 3$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) i punti di minimo e massimo assoluto nella regione piana limitata dalla curva Γ, cioé nell'insieme dei punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano la disequazione $3x^2 - 3xy + y^2 \leq 3$.

5 - Data la curva Γ di equazioni parametriche

$$x = t+1, \qquad y = t\log t, \qquad z = t^2 - 2,$$

e la funzione $f(x,y,z) = (x^2 - z)e^{2y-x}$, trovare:

a) l'equazione della retta tangente alla curva Γ in $P = (x(1), y(1), z(1))$,
b) la derivata direzionale di f in P nella direzione della suddetta retta tangente,
c) la derivata in $t_0 = 1$ della funzione composta $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, mediante la regola della catena.

6 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

è definita positiva, definita negativa, o indefinita. Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di MATEMATICA 2 (Analisi Matematica) - 14 aprile 2004

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = 1/x^3$, e il dominio D del primo quadrante limitato dall'asse x, dalla circonferenze di centro $(3,0)$ e raggio 3, e dalle rette di equazione $y = x$ ed $x + y = 2$,

a) spiegare perchè f è integrabile su D;
b) impostare il calcolo dell' integrale di f su D, sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

2 - Risolvere le equazioni differenziali:

$$x' = -\frac{x^2 - 4x + 4}{t^2 - 3t + 2}, \qquad x'' - 4x' + 4x = (t-2)e^{2t}.$$

3 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{\frac{n}{n^2+1}}\right)(1-x)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{\frac{n}{n^2+1}}\right)(1-x^2)^n$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.
Detta f la funzione somma di tali serie dire in quali intervalli f è continua, o derivabile e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x,y) = x - 2y - \log|x^2 + 2y^2 - 1|$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo di f sulla ellisse Γ di equazione $x^2 + 2y^2 = 2$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
c) i punti di minimo e massimo assoluto nella regione piana limitata dalla curva Γ .

5 - Data la funzione $f(x,y,z) = (x^2 - yz)e^{x+y}$, e il punto $P = (1,-1,0)$, trovare:

a) l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per P,
b) la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(1,2,-2)^T$,
c) il polinomio di Taylor del secondo ordine di f di centro P.

6 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

è definita positiva, definita negativa, o indefinita.
Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di MATEMATICA 2 (Analisi Matematica) - 16 giugno 2004

****

1 - Siano D_1 e D_2 gli insiemi dei punti del piano che giacciono sopra la retta di equazione $y = -x$ e sono compresi tra le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 4$ ed $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
Data la funzione $f(x, y) = y^3/x^2$,

a) dire se f è integrabile in D_1 e/o in D_2,
b) se f è integrabile, impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari,
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

2 - Spiegare se (in base ai teoremi di esistenza ed unicità conosciuti) il problema di Cauchy

$$x' = \frac{x}{t} - \frac{\log t}{2x}, \qquad x(1) = -2$$

ha una ed una sola soluzione "in grande" o "in piccolo".
Risolvere poi tale problema di Cauchy e confrontare il risultato ottenuto con quello previsto dalla teoria.

In alternativa risolvere l' equazione differenziale lineare nonomogenea :

$$x'' - 6x' + 10x = te^{2t}.$$

3 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1/n} - 1}{3^n - 1} (1 - 2x)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.
Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua, o derivabile e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3y^2 + 9y$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) i punti di minimo e massimo di f sulla curva Γ di equazione $3x^2 + y^2 = 9$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana che contiene l'origine ed é compresa tra la curva Γ e la retta di equazione $y = x + 3$.

5 - Data la funzione $f(x, y, z) = x^2 - y \log(2y - z^2)$ e il punto $P = (1, 1, -1)$, trovare:

a) il gradiente di f in P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(2, 1, -2)$,
b) l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per P;
c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .

6 - Dire per quali valori del parametro a la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix},$$

è definita positiva, definita negativa, o indefinita.
Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
Esame di MATEMATICA 2 (Analisi Matematica) - 1 luglio 2004

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = 2xy/(y^2+1)$,

a) dire perché f è integrabile nel dominio D, la cui frontiera, (percorsa in senso orario) é composta nell'ordine da un segmento della retta di equazione $y = -x$, da un arco della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 2$, da un segmento della retta di equazione $y = x$ e da un arco della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

b) Impostare il calcolo dell'integrale di f esteso a D, sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari.

c) Portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

2 - Risolvere le equazioni differenziali lineari nonomogenee :

$$x' + 2tx = t^3, \qquad x'' - x' - 2x = te^{2t}.$$

3 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \text{ arctg } \Big(\frac{1}{n^2+1}\Big)\big(1-x\big)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua, o derivabile e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x,y) = 3x^2y - 6xy^2 + 4y^3 - 12y$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,

b) i punti di minimo e massimo di f sulla curva Γ di equazione $x^2 - 2xy = 1$, con $x > 0$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,

c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana compresa tra la curva Γ e la retta di equazione $y = 2(x-1)$.

5 - Data la funzione $f(x,y,z) = x^2 \log(x + y - z^2)$ e la curva Γ di equazioni parametriche

$$x(t) = t^2 - 1, \qquad y(t) = e^{2t}, \qquad \log(1-t),$$

trovare il vettore tangente a Γ nel punto $P = (x(0), y(0), z(0)$, il gradiente di f in P e (servendosi della regola della catena) la derivata in $t_0 = 0$ della funzione composta $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$.

6 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

è definita positiva, definita negativa, o indefinita.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
Esame di MATEMATICA 2 (Analisi Matematica) - 8 settembre 2004

****

1 - Detto D il dominio del primo quadrante, limitato dal semiasse positivo delle ascisse, dalla retta di equazione $x = 1$ e dalle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 1$ ed $x^2 + y^2 - 2x = 0$,

a) dire perché è integrabile in D la funzione
$$f(x, y) = \frac{2y}{(x^2 + y^2)^3},$$
b) impostare il calcolo dell'integrale di f esteso a D, sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari,
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

2 - Risolvere una almeno delle seguenti equazioni differenziali :
$$x' = \frac{6x}{t^2} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{t^3 e^{2/t}}, \qquad x'' - 2x' - 3x = te^{3t}.$$

3 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{4^n + n^2 \log n}{\sqrt[3]{n^4 + 1}}\Big)\Big(\frac{x}{x^2 + 3}\Big)^n,$$
precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.
Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua, o derivabile e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x, y) = 4x^3 + 6xy^2 + y^3 - 12x$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) i punti di minimo e massimo di f sulla circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 = 2$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana compresa tra la curva Γ e le rette di equazione $x = 1$ ed $y = -x$.

5 - Trovare il piano tangente e la retta normale alla superficie di livello della funzione
$$f(x, y, z) = (x^2 - yz)\sin(3y + z),$$
passante per il punto $P = (\pi, \pi/2, -\pi)$.

6 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$
è definita positiva, definita negativa, o indefinita.
Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di MATEMATICA 2 (Analisi Matematica) - 10 novembre 2004

****

1 - Detto D l'insieme dei punti del primo quadrante che sono compresi tra l'asse x, le rette di equazione $x+y=2$ ed $y=1$ e la circonferenza con centro l'origine e raggio 1 e considerata la funzione

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^3},$$

a) dire perché f è integrabile in D,
b) impostare il calcolo di tale integrale sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari,
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

2 - Risolvere l' equazione differenziale lineare nonomogenea :

$$x''+4x'+8x=(2t^2-1)e^{-2t}.$$

3 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\Big(\frac{n}{2^n+1}\Big)(1-3x)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua, o derivabile e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

4 - Data la funzione $f(x,y)=x^3-3x^2y+3xy^2+6x^2-12xy$, trovare:
a) i punti di minimo e massimo relativo di f,
b) i punti di minimo e massimo di f sulla ellisse Γ di equazione $x^2+3y^2-12y=0$, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla regione piana che contiene l'origine ed é compresa tra la curva Γ e la retta di equazione $y=x+4$.

5 - Data la funzione $f(x,y,z)=xy\log(y^2+3xz)$ e il punto $P=(1,2,-1)$, trovare:
a) il gradiente di f in P e la derivata direzionale di f in P nella direzione del vettore $(1,2,-2)$,
b) l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per P;
c) il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P .

6 - Dire se la forma quadratica associata alla matrice

$$A=\begin{pmatrix}4&3&2\\3&4&2\\2&2&2\end{pmatrix},$$

è definita positiva, definita negativa, o indefinita.

Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione g in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

Esame di Analisi Matematica - 15 dicembre 2004

****

1 - Detta D la regione piana compresa tra l'asse x, le rette di equazione $x = 3$, $y = 3$ e $y = \sqrt{3}x$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$,

a) spiegare perchè è integrabile in D la funzione $f(x, y) = y/x$;
b) impostare il calcolo dell' integrale di f esteso al dominio D sia con le formule di riduzione, (scomponendolo in domini normali all'asse x o all'asse y), sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli con uno di tali metodi.

2 - Risolvere una almeno delle equazioni differenziali:

$$x' = -\frac{2}{t^2}\, x + \frac{4}{t^3}\, x\sqrt{x}, \qquad x'' - 3x' - 4x = te^{4t}.$$

3 - Data la funzione $f(x, y) = x^4 - y^3 + 2x^2y - 4x^2 - y^2$, trovare:

a) i punti di minimo e massimo relativo di f;
b) i punti di minimo e massimo relativo di f sulla ellisse Γ di equazione $4x^2 + y^2 = 20$;
c) i punti di minimo e massimo assoluto sulla parte del primo quadrante che é limitata dalla curva Γ .

4 - Trovare l'insieme di convergenza delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4^n - 1}{n^4 + 1}}\, \left(1 - 1/x\right)^n,$$

precisando in quali intervalli la convergenza è semplice, assoluta, uniforme o totale.

Detta f la funzione somma di tale serie dire in quali intervalli f è continua e in quali intervalli la serie può essere integrata termine a termine.

5 - Scrivere la forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Dire poi se per $a = 3$ e per $a = -3$ tale forma quadratica è definita positiva, definita negativa, ecc.... Se A fosse stata la matrice hessiana di una funzione f in un suo punto stazionario, cosa si sarebbe potuto concludere sulla natura di tale punto?

6 - Data la funzione $f(x, y, z) = x^2 - 2z\cos(x + 2y)$:

a) spiegare perchè f è differenziabile e perchè si può invertire l'ordine di derivazione,
b) trovare il gradiente di f nel punto $P = (0, \pi/6, 2)$,
c) scrivere l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie di livello di f passante per il punto P,
d) scrivere il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2
14 GIUGNO 2006

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 8(x^2+y^2)\,.$$

(a) Trovare i punti di massimo e minimo relativo di f.
(b) Trovare i punti di massimo e minimo assoluto di f sulla circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 3.
(c) Trovare i punti di massimo e minimo assoluto di f nel cerchio racchiuso dalla circonferenza Γ.
(d) Scrivere l'equazione del piano tangente a f nel punto $(1,-2)$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = \frac{y}{5+x}$$

e D il dominio del piano contenuto nel semipiano delle ordinate positive e racchiuso dalle circonferenza di centro l'origine e raggio 4, la circonferenza di centro il punto di coordinate $(2,2)$ e raggio 2, e la retta di equazione $x+y=0$.

(a) Dire perchè f è integrabile su D.
(b) Dire se D è normale rispetto all'asse delle x e/o all'asse delle y e, in caso affermativo, impostare il calcolo di $\iint f(x,y)\,dxdy$ con le formule di riduzione.
(c) Impostare il calcolo di $\iint f(x,y)\,dxdy$ con la trasformazione in coordinate polari.
(d) Portare a termine i calcoli in uno dei suddetti metodi.

Esercizio 3. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,n^2}{n^3+4}\,(x-4)^n\,.$$

(a) Dire, al variare del parametro x se la serie è convergente, assolutamente convergente, indeterminata, divergente positivamente o divergente negativamente.
(b) Dire in quali intervalli la serie converge uniformemente.
(c) Detta $S(x)$ la somma della serie dire se S è continua e derivabile.

Esercizio 4. Risolvere almeno due delle equazioni differenziali seguenti

$$y'' - 4\,y = e^t\,, \qquad \tan(x)\,y' = 1+y^2\,, \qquad x\,y' - 3\,y = \sqrt[3]{y}\,.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica 2 - 7 novembre 2007 - Traccia A

****

1 - Data la regione del primo e secondo quadrante limitata dal semiasse positivo delle x, dalla circonferenza con centro $(0,0)$ e raggio 1, dalla circonferenza con centro $(0,1)$ e raggio 1 e dalla bisettrice del secondo quadrante, e le funzioni

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = \frac{xy}{(1-x^2+y^2)^2}$$

Dire se f e g sono integrabili secondo Riemann nel dominio D.
Impostare poi il calcolo del suddetto integrale mediante la formula di riduzione (decomponendo D sia in domini normali all'asse x sia in domini normali all'asse y), e mediante la trasformazione in coordinate polari.

Portare infine a termine il calcolo del suddetto integrale in uno dei suddetti modi.

(*Facoltativo:* Spiegare perché é integrabile in D la funzione $h(x,y) = (1-x)y/(1-x^2+y^2)$).

2 - Dire per quali valori di x sono convergenti le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cdot 3^n}{2^{n-1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cdot 3^n}{2^{2n-1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+2^n}{5 \cdot 3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+x^n}{4 \cdot 3^{n-2}}.$$

Se la serie é convergente, calcolarne la somma.

3 - Trovare la serie geometrica di primo termine $x_1 = 3$ e somma $s = 5/2$.
Utilizzando il teorema di integrazione termine a termine, trovare poi una serie di potenze che converge verso la funzione $f(x) = \log(1+x^2)$

4 - Utilizzando il teorema di Leibniz dimostrare che é convergente la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n4^n+1}$$

e approssimarne la somma con un errore minore di 10^{-2}.

5 - Dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+2\sqrt{x})}{x^2-4x}$$

sugli intervalli $]0,1]$, $[1,4[$, $]4,5]$, $[5,+\infty[$, $]0,4[$, $]4,+\infty[$, $[1,5]$, $]0,+\infty[$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Analisi Matematica 2 - 7 novembre 2007 - Traccia B

****

1 - Data la regione del primo e quarto quadrante limitata dal semiasse positivo delle y, dalla circonferenza con centro $(0,0)$ e raggio 1, dalla circonferenza con centro $(1,0)$ e raggio 1 e dalla bisettrice del quarto quadrante, e le funzioni

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2-y^2)^2}$$

Dire se f e g sono integrabili secondo Riemann nel dominio D.
Impostare poi il calcolo del suddetto integrale mediante la formula di riduzione (decomponendo D sia in domini normali all'asse x sia in domini normali all'asse y), e mediante la trasformazione in coordinate polari.

Portare infine a termine il calcolo del suddetto integrale in uno dei suddetti modi.

(*Facoltativo:* Spiegare perché é integrabile in D la funzione $h(x,y) = (1-y)x/(1+x^2-y^2)$).

2 - Dire per quali valori di x sono convergenti le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cdot 5^n}{3^{n-1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cdot 5^n}{3^{2n-1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+(-2)^n}{4 \cdot 3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-x^n}{4 \cdot 2^{n-2}}.$$

Se la serie é convergente, calcolarne la somma.

3 - Trovare la serie geometrica di primo termine $x_1 = -2$ e somma $s = 4/3$.
Utilizzando il teorema di integrazione termine a termine, trovare poi una serie di potenze che converge verso la funzione $f(x) = \text{ arctg } (x^2)$.

4 - Utilizzando il teorema di Leibniz dimostrare che é convergente la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^4+3n^2+2}$$

e approssimarne la somma con un errore minore di 10^{-2}.

5 - Dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri della funzione

$$f(x) = \frac{\text{arctg } \sqrt{x+4}}{x^2+4x}$$

sugli intervalli $]-4,-1]$, $[-1,0[$, $]0,1]$, $[1,+\infty[$, $]-4,0[$, $]0,+\infty[$, $[-1,1]$, $]-4,+\infty[$.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica 2 - 7 dicembre 2007 - traccia A

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + xy^2 - 4xy$

a) trovare l'equazione della retta tangente in $P = (1,-1) \in \mathbf{R}^2$ alla curva di livello passante per P, e l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P' = (1,-1,f(1,-1)$;

b) trovare i punti di minimo e massimo relativo liberi di f,

c) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f sulla circonferenza Γ di centro $C = (0,2)$ e raggio 2, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;

d) impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f sulla regione piana D che contiene il centro C ed é limitata dalla circonferenza Γ e dalla bisettrice del primo quadrante, usando il il metodo dei moltiplicatori di John.

e) trovare i punti di minimo e massimo assoluto su D .

2 - Data la funzione $f(x,y,z) = \log(x^2y + 2yz - 2)$

a) trovare l'insieme di definizione di f, specificando se si tratta di un insieme aperto o chiuso;

b) dire in quali punti f è differenziabile, (motivando la risposta),

c) trovare il gradiente e il differenziale di f nel punto $P = (-1,2,1/2)$, e la derivata direzionale di f in P nella direzione tangente in tale punto alla curva di equazioni parametriche

$$x(t) = -1 + t/2, \qquad y(t) = 2e^t, \qquad z(t) = \text{ sen } (\pi/6 + t),$$

d) con la regola della catena trovare la derivata della funzione composta di f con la funzione $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ che associa ad ogni $t \in \mathbf{R}$ il vettore $g(t) = (4-t, (1+t)e^{2t}, t^2)^T$ nel punto $t = 0$;

e) trovare il piano tangente e la retta normale alla superficie di livello di f passante per P,

f) trovare il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P.

3 - Trovare la matrice Jacobiana nel punto $P = (1,1,-2)$ della funzione $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ che associa ad ogni punto $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ il vettore $(u,v) = f(x,y,z)$ tale che $u = x^2y + e^{2y+z}, \qquad v = z^2\cos(x-y)$.

4 - Data la funzione $f(x,y,z) = x^2y + 2yz - 3y^2 - z^2 - 4z$:

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo liberi di f, (adoperando possibilmente sia il criterio di Sylvester che quello dei segni del polinomio caratteristico);

b) trovare, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, (rispett. di John), gli eventuali punti di minimo e massimo relativo per f soggetta ai vincoli

$$\begin{cases} x^2 - z = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases} \qquad (\text{rispett. } \begin{cases} x^2 - z \le 0 \\ y - z + 4 \le 0 \end{cases})$$

5 - Data la funzione $f(x,y) = y/(x+1)$, e il dominio del primo quadrante limitato dal semiasse positivo delle x, dalla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 e dalla circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1,

a) spiegare perchè f è integrabile su D;

b) impostare il calcolo dell' integrale di f su D, sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari;

c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

6 - Dire per quali valori di x sono assolutamente convergenti, convergenti, divergenti o oscillanti le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n^2+1}}\, x^n.$$

7 - Dire perché é integrabile in senso improprio negli intervalli $]4,5]$ e $[5,+\infty[$ la funzione $f(x) = \dfrac{\log(1-3/x)}{\sqrt{x-4}}$ e calcolare tali integrali impropri.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Analisi Matematica 2 - 7 dicembre 2007 - traccia B

****

1 - Data la funzione $f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + y^3 - 4xy$

a) trovare l'equazione della retta tangente in $P = (1,-1) \in \mathbf{R}^2$ alla curva di livello passante per P, e l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P' = (1,-1,f(1,-1)$;
b) trovare i punti di minimo e massimo relativo liberi di f,
c) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f sulla circonferenza Γ di centro $C = (2,0)$ e raggio 2, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange;
d) impostare la ricerca dei punti di minimo e massimo relativo di f sulla regione piana D che contiene il centro C ed é limitata dalla circonferenza Γ e dalla bisettrice del primo quadrante, usando il il metodo dei moltiplicatori di John.
e) trovare i punti di minimo e massimo assoluto su D .

2 - Data la funzione $f(x,y,z) = \log(x^2z + 2yz - 2)$

a) trovare l'insieme di definizione di f, specificando se si tratta di un insieme aperto o chiuso;
b) dire in quali punti f è differenziabile, (motivando la risposta),
c) trovare il gradiente e il differenziale di f nel punto $P = (-1, 1/2, 2)$, e la derivata direzionale di f in P nella direzione tangente in tale punto alla curva di equazioni parametriche

$$x(t) = -1 + t/2, \qquad y(t) = \text{ sen } (\pi/6 + t), \qquad z(t) = 2e^t,$$

d) con la regola della catena trovare la derivata della funzione composta di f con la funzione $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ che associa ad ogni $t \in \mathbf{R}$ il vettore $g(t) = (4-t, (1+t)e^{2t}, t^2)^T$ nel punto $t = 0$;
e) trovare il piano tangente e la retta normale alla superficie di livello di f passante per P,
f) trovare il polinomio di Taylor del II ordine di f di punto iniziale P.

3 - Trovare la matrice Jacobiana nel punto $P = (1,-1)$ della funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ che associa ad ogni punto $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ il vettore $(x,y,z) = f(u,v)$ tale che $x = u^2 + v^2, \quad y = 3u - v^2, \quad z = e^{u-v}$.

4 - Data la funzione $f(x,y,z) = x^2z + 2yz - y^2 - 3z^2 - 4y$:

a) trovare i punti di minimo e massimo relativo liberi di f, (adoperando possibilmente sia il criterio di Sylvester che quello dei segni del polinomio caratteristico);
b) trovare, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, (rispett. di John), gli eventuali punti di minimo e massimo relativo per f soggetta ai vincoli

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases} \qquad (\text{rispett. } \begin{cases} x^2 - y \le 0 \\ y - z - 4 \le 0 \end{cases})$$

5 - Data la funzione $f(x,y) = y/(x+1)$, e il dominio del primo quadrante limitato dal semiasse positivo delle x, dalla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 e dalla circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1,

a) spiegare perchè f è integrabile su D;
b) impostare il calcolo dell' integrale di f su D, sia con le formule di riduzione, sia con la trasformazione in coordinate polari;
c) portare a termine i calcoli in uno dei suddetti modi.

6 - Dire per quali valori di x é assolutamente convergente, convergente, divergente o oscillante la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{ arcsen } \left(\frac{n+1}{2^n - 1}\right) x^n.$$

7 - Dire perché é integrabile in senso improprio negli intervalli $]1,2]$ e $[2,+\infty[$ la funzione $f(x) = \dfrac{\log(1 + 3/x)}{\sqrt{x-1}}$ e calcolare tali integrali impropri.