ALGEBRA LINEARE

Anno accademico 2006-07

TRACCE D'ESAME

1. Esami a. a. 2004-05	pag. 2
2. Esoneri a.a. 2005-06	pag. 6
3. Esami a. a. 2005-06	pag. 12
4. Esoneri a.a. 2006-07	pag. 14
5. Esami a. a. 2006-07	pag. 20
6. Svolgimento della prova scritta del 18 luglio 2007	pag. 25
7. Esercizi vari	pag. 33

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Algebra o Algebra lineare - 15 giugno 2005

1 - Verificare in base alla definizione che l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - y - z = 0, \quad x + 2y + 2z = 0\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ e che l'applicazione $L : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^2$, tale che

$$L(x, y, z) = (2x - y - z, x + 2y + 2z) \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

é un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^2$

Trovare poi la dimensione ed una base di V , il complemento ortogonale $V^\perp$ di V ed una sua base ortogonale.

Verificare che l'unione delle basi di V e $V^\perp$ testé trovate é una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ e trovare le coordinate del vettore $(1, 2, 0)$ rispetto a tale base.

2 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 2-h \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & h \end{pmatrix},$$

- a) dire per quale valore del parametro h le righe di A sono linearmente dipendenti o indipendenti,
- b) trovare il rango di A al variare del parametro h ,
- c) dire per quale valore del parametro h il sistema lineare nonomogeneo $Ax = y$, con $y = (1, -1, 0)$, é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- d) scrivere le equazioni della trasformazione lineare L_A associata alla matrice A ;
- e) trovare il nucleo e l'immagine di tale trasformazione lineare, indicando di tali sottospazi la dimensione ed una base;
- f) trovare il complemento ortogonale al nucleo ed all'immagine di L_A , indicando anche di tali sottospazi la dimensione ed una base.

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la matrice somma $A + B$, la matrice prodotto $A \cdot B$ e la matrice inversa B^{-1} di B ;
- b) trovare gli autovalori e i corrispondenti autovettori di A e di B ,
- c) dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

4 - Con il criterio del segno degli autovalori e/o con il criterio di Sylvester, studiare il segno della forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Algebra con elementi di Geometria - 15 giugno 2005

1 - Verificare in base alla definizione che l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - y - z = 0, \quad x + 2y + 2z = 0\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ e che l'applicazione $L : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^2$, tale che

$$L(x, y, z) = (2x - y - z, x + 2y + 2z) \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

é un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^2$

Trovare poi la dimensione ed una base di V , il complemento ortogonale $V^\perp$ di V ed una sua base ortogonale.

Verificare che l'unione delle basi di V e $V^\perp$ testé trovate é una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ e trovare le coordinate del vettore $(1, 2, 0)$ rispetto a tale base.

2 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 2-h \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & h \end{pmatrix},$$

- a) dire per quale valore del parametro h le righe di A sono linearmente dipendenti o indipendenti,
- b) trovare il rango di A al variare del parametro h ,
- c) dire per quale valore del parametro h il sistema lineare non omogeneo $Ax = y$, con $y = (1, -1, 0)$, é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- d) scrivere le equazioni della trasformazione lineare L_A associata alla matrice A ;
- e) trovare il nucleo e l'immagine di tale trasformazione lineare, indicando di tali sottospazi la dimensione ed una base;
- f) trovare il complemento ortogonale al nucleo ed all'immagine di L_A , indicando anche di tali sottospazi la dimensione ed una base.

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la matrice somma $A + B$, la matrice prodotto $A \cdot B$ e la matrice inversa B^{-1} di B ;
- b) trovare gli autovalori e i corrispondenti autovettori di A ,
- c) dire se A é diagonalizzabile e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

4 - Fissato nello spazio euclideo tridimensionale un riferimento metrico $\mathcal{R}(O, (e_1, e_2, e_3))$, si considerino i punti $A = (1, 1, -2)$ e $B = (-1, 3, 0)$ e il vettore $u = e_1 - e_2 + e_3$. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r congiungente A con B e della retta s passante per A e parallela ad u e del piano π congiungenti le rette r ed s .

Trovare infine l'equazione della retta per A perpendicolare al piano π .

Corso di laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di ALGEBRA LINEARE - 13 luglio 2005

- n. 1** - Dati i vettori $u_1 = (1, 1, 0, -1)^T$, $u_2 = (-1, 0, 2, 2)^T$ e $u_3 = (0, 1, 3, -2)^T$,
- verificare in base alla definizione che tali vettori sono linearmente indipendenti;
 - calcolare il determinante della matrice avente per colonne i vettori u_1, u_2, u_3 ed $u_4 = (2, 1, -3, 0)^T$,
 - detto U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da u_1, u_2, u_3, u_4 , indicare la dimensione ed una base di U e (con il procedimento di Gram Schmidt), ricavare una base ortogonale di U da tale base.
- n. 2** - Dati i vettori $u_1 = (1, 2, h - 1)$, $u_2 = (2, 5, -1)$ e $u_3 = (h, 1, 1)$,
- dire per quali valori del parametro h tali vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;
 - al variare del parametro h , trovare la caratteristica della matrice A avente per righe tali vettori;
 - trovare il complemento ortogonale allo spazio U generato da tali vettori, precisando la dimensione di U e di $U^\perp$ ed indicando una base di tali sottospazi;
 - dire per quale valore del parametro h il sistema lineare non omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ con $\mathbf{y} = (0, 1, -1)^T$ é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
 - scrivere le equazioni della trasformazione lineare L_A associata alla matrice A avente per righe tali vettori,
 - trovare il nucleo e l'immagine di tale trasformazione lineare, indicandone esplicitamente la dimensione ed una base;
 - trovare il complemento ortogonale al nucleo ed all'immagine di L_A , indicando anche di tali sottospazi la dimensione ed una base.

- n. 3** - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

- trovare la matrice trasposta di A , la matrice $A - 2 \cdot B$ e la matrice prodotto $B \cdot A$;
 - dire se B é invertibile e trovarne l'(eventuale) matrice inversa B^{-1} ;
 - trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A e di B ,
 - dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.
- n. 4** - Con il criterio del segno degli autovalori e con il criterio di Sylvester studiare il segno della forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Algebra con elementi di Geometria - 13 luglio 2005

- n. 1** - Dati i vettori $u_1 = (1, 1, 0, -1)^T$, $u_2 = (-1, 0, 2, 2)^T$ e $u_3 = (0, 1, 3, -2)^T$,
- verificare in base alla definizione che tali vettori sono linearmente indipendenti;
 - calcolare il determinante della matrice avente per colonne i vettori u_1, u_2, u_3 ed $u_4 = (2, 1, -3, 0)^T$,
 - detto U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da u_1, u_2, u_3, u_4 , indicare la dimensione ed una base di U e (con il procedimento di Gram Schmidt), ricavare una base ortogonale di U da tale base.
- n. 2** - Dati i vettori $u_1 = (1, 2, h - 1)$, $u_2 = (2, 5, -1)$ e $u_3 = (h, 1, 1)$,
- dire per quali valori del parametro h tali vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;
 - al variare del parametro h , trovare la caratteristica della matrice A avente per righe tali vettori;
 - trovare il complemento ortogonale allo spazio U generato da tali vettori, precisando la dimensione di U e di $U^\perp$ ed indicando una base di tali sottospazi;
 - dire per quale valore del parametro h il sistema lineare non omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ con $\mathbf{y} = (0, 1, -1)^T$ é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
 - scrivere le equazioni della trasformazione lineare L_A associata alla matrice A avente per righe tali vettori,
 - trovare il nucleo e l'immagine di tale trasformazione lineare, indicandone esplicitamente la dimensione ed una base;
 - trovare il complemento ortogonale al nucleo ed all'immagine di L_A , indicando anche di tali sottospazi la dimensione ed una base.
- n. 3** - Date le metrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

- trovare la matrice trasposta di A , la matrice $A - 2 \cdot B$ e la matrice prodotto $B \cdot A$;
- dire se B é invertibile e trovarne l'(eventuale) matrice inversa B^{-1} ;
- trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A e di B ,
- dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

4 - Fissato nello spazio euclideo tridimensionale un riferimento metrico $\mathcal{R}(O, (e_1, e_2, e_3))$, si considerino i punti $A = (1, 1, -2)$ e $B = (-1, 3, 0)$ e il vettore $u = e_1 - e_2 + e_3$. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r congiungente A con B e della retta s passante per A e parallela ad u e del piano π congiungenti le rette r ed s .

Trovare infine l'equazione della retta per A perpendicolare al piano π .

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Algebra Lineare - 7 aprile 2006 - Traccia A

1 - Dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (2, -1, 0, -1, 0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (3, -1, -2, 2, 0)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (0, -2, -1, 0, -3)^T$, trovare i vettori $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ mediante i coefficienti $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = -3/2$ e il prodotto scalare di $\mathbf{u}_1$ con $\mathbf{u}_2$ e di $\mathbf{u}_2$ con $\mathbf{u}_3$.

2 - Dopo avere dato la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale V , dire se sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$ o $\mathbf{R}^4$ gli insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | 2x - y - 3z = 0, \quad x - y + 4z = 0\}$$

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 | x + 2y - 5z + t = 0, \quad x - 2y - 2z - t - 2 = 0\}.$$

3 - Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta affine passante per $\mathbf{a} = (2, -3, 0, -1)^T$ e parallela al vettore $\mathbf{u} = (1, 2, -2, 3)^T$ e del piano affine passante per $\mathbf{a}$ e parallelo al piano generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} = (-1, 0, -3, 4)^T$. Trovare infine le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e del piano passante per $\mathbf{a}, \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

4 - Dopo aver dato la definizione di trasformazione lineare tra due spazi vettoriali, dire se sono trasformazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ le funzioni che associano ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbf{R}^3$ il vettore $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ tale che

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_1 + 3x_2 + x_3 - 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_1^2 - x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Se L è una trasformazione lineare verificare che il nucleo di L è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

5 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

indicare le matrici trasposte di A e B , trovare la matrice somma $A+B$, e le matrici prodotto AB^T e $A^T B$; trovare infine la caratteristica delle matrici $A, B, A^T, B^T, A+B, AB^T$ e BA^T , indicando per ognuna di esse una base dei sottospazi generati dalle righe e dalle colonne.

6 - Trovare, al variare del parametro α , la caratteristica della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ \alpha & 2\alpha & 0 & \alpha^2 + 3\alpha \\ 0 & 4 & \alpha - 2 & \alpha \\ -1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Algebra Lineare - 7 aprile 2006 - Traccia B

1 - Dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (-2, 1, 0, 0, -1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-3, 2, -1, 0, 2)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 2, -1, 3, 0)^T$, trovare i vettori $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ mediante i coefficienti $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = -1$ e il prodotto scalare di $\mathbf{u}_1$ con $\mathbf{u}_2$ e di $\mathbf{u}_2$ con $\mathbf{u}_3$.

2 - Dopo avere dato la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale V , dire se sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$ o $\mathbf{R}^4$ gli insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 - y - 3z = 0, \quad x - y + 4z = 0\}$$

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 | x - 2y + 5z - t = 0, \quad x - 2y - z - t = 0\}.$$

3 - Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta affine passante per $\mathbf{a} = (-2, 3, 1, 0)^T$ e parallela al vettore $\mathbf{u} = (1, -2, 2, 0)^T$ e del piano affine passante per $\mathbf{a}$ e parallelo al piano generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} = (-1, 0, 2, -4)^T$. Trovare infine le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e del piano passante per $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

4 - Dopo aver dato la definizione di trasformazione lineare tra due spazi vettoriali, dire se sono trasformazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ le funzioni che associano ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbf{R}^3$ il vettore $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ tale che

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2x_3 \\ y_2 = x_1 + 3x_2 + x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 \end{cases}.$$

Se L é una trasformazione lineare verificare che il nucleo di L é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

5 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -9 & 0 \end{pmatrix},$$

indicare le matrici trasposte di A e B , trovare la matrice somma $A+B$, e le matrici prodotto AB^T e A^TB ; trovare infine la caratteristica delle matrici A , B , A^T , B^T , $A+B$, AB^T e BA^T , indicando per ognuna di esse una base dei sottospazi generati dalle righe e dalle colonne.

6 - Trovare, al variare del parametro α , la caratteristica della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & \alpha^2 + \alpha \\ 0 & 4 & -\alpha & \alpha - 2 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Algebra Lineare - 23 maggio 2006 - Traccia A

1 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 7 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

- a) calcolare il determinante di A , di B e di C , alternando la regola di Sarrus, la regola di Laplace e il metodo di Gauss-Jordan,
- b) dire quindi se tali matrici sono invertibili e (in caso affermativo) calcolarne l'inversa con l'algoritmo di Gauss Jordan e/o con il metodo della matrice aggiunta.

2 - Considerate le matrici A e B dell'esercizio precedente e il vettore $\mathbf{b} = (1, 3, -2)^T$, trovare la caratteristica di A , B , $(A, \mathbf{b})$, $(B, \mathbf{b})$, senza adoperare l'algoritmo di Gauss Jordan, ma semplicemente analizzando i minori estratti da tali matrici.

Di conseguenza, dire se i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono incompatibili, determinati o indeterminati; se il sistema è determinato trovare l'unica soluzione con il Teorema di Cramer, (alternando nel calcolo dei determinanti la regola di Sarrus, la regola di Laplace e il metodo di Gauss-Jordan).

3 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & k \\ k+1 & k & 1 & 3k \\ k & 2 & 2 & k^2 \end{pmatrix}$$

- (1) calcolare il determinante di A e (al variare del parametro k) la sua caratteristica, nonché una base dei sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$ generati rispettivamente dalle righe e dalle colonne di A ;
- (2) trovare il complemento ortogonale ai sottospazi U e V , indicandone la dimensione ed una base;
- (3) trovare (al variare del parametro k) il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare associata ad A , indicando una base di tali sottospazi;
- (4) dire se L_A è iniettiva, suriettiva o bigettiva.

4 - Dire per quali valori del parametro k i sistemi lineari

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ kx + ky + k^2z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -2x + y - 4z + kt = 0 \\ kx + (3 - k)y + kt = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - z = -1 \\ -2x + y + (k + 1)z = 2 \\ -2y + (3 - k)z = 1 + k \\ kx + y - k^2z = -k \end{cases}$$

sono incompatibili, determinati o indeterminati, indicando esplicitamente la caratteristica della matrice dei coefficienti A e la caratteristica della matrice $\hat{A}$ dei coefficienti e termini noti del sistema.

Se il sistema è compatibile, trovarne la o le soluzioni.

Trovare infine le soluzioni del sistema omogeneo associato a tali sistemi; se il sistema ammette soluzioni non banali, indicare esplicitamente una base dell'insieme delle soluzioni.

5 - Dette A , B e C le matrici dei coefficienti dei sistemi dell'esercizio precedente, dire se la trasformazione lineare associata a tali matrici è iniettiva, suriettiva, bigettiva, indicando esplicitamente la dimensione del nucleo e dell'immagine di tali sottospazi.

Per uno almeno dei casi in cui tali trasformazioni lineari non sono surgettive, trovare le equazioni che devono essere soddisfatte dai punti dell'insieme immagine.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
II esonero di Algebra Lineare - 23 maggio 2006 - Traccia B

1 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

- a) calcolare il determinante di A , di B e di C , alternando la regola di Sarrus, la regola di Laplace e il metodo di Gauss-Jordan,
- b) dire quindi se tali matrici sono invertibili e (in caso affermativo) calcolarne l'inversa con l'algoritmo di Gauss Jordan e/o con il metodo della matrice aggiunta.

2 - Considerate le matrici A e B dell'esercizio precedente e il vettore $\mathbf{b} = (1, 3, 2)^T$, trovare la caratteristica di A , B , $(A, \mathbf{b})$, $(B, \mathbf{b})$, senza adoperare l'algoritmo di Gauss Jordan, ma semplicemente analizzando i minori estratti da tali matrici.

Di conseguenza, dire se i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono incompatibili, determinati o indeterminati; se il sistema è determinato trovare l'unica soluzione con il Teorema di Cramer, (alternando nel calcolo dei determinanti la regola di Sarrus, la regola di Laplace e il metodo di Gauss-Jordan).

3 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -k \\ k-1 & k & 1 & 3k \\ -k & 2 & -2 & k^2 \end{pmatrix}$$

- (1) calcolare il determinante di A e (al variare del parametro k) la sua caratteristica, nonché una base dei sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$ generati rispettivamente dalle righe e dalle colonne di A ;
- (2) trovare il complemento ortogonale ai sottospazi U e V , indicandone la dimensione ed una base;
- (3) trovare (al variare del parametro k) il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare associata ad A , indicando una base di tali sottospazi;
- (4) dire se L_A è iniettiva, suriettiva o bigettiva.

4 - Dire per quali valori del parametro k i sistemi lineari

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ kx - ky + k^2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 4z + kt = 0 \\ kx + (2+k)y - kt = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + z = -1 \\ 2x + y + (3-k)z = -1 \\ 2y + (1-k)z = 3-k \\ kx + y + k^2z = 1-k \end{cases}$$

sono incompatibili, determinati o indeterminati, indicando esplicitamente la caratteristica della matrice dei coefficienti A e la caratteristica della matrice $\hat{A}$ dei coefficienti e termini noti del sistema.

Se il sistema è compatibile, trovarne la o le soluzioni.

Trovare infine le soluzioni del sistema omogeneo associato a tali sistemi; se il sistema ammette soluzioni non banali, indicare esplicitamente una base dell'insieme delle soluzioni.

5 - Dette A , B e C le matrici dei coefficienti dei sistemi dell'esercizio precedente, dire se la trasformazione lineare associata a tali matrici è iniettiva, suriettiva, bigettiva, indicando esplicitamente la dimensione del nucleo e dell'immagine di tali sottospazi.

Per uno almeno dei casi in cui tali trasformazioni lineari non sono surgettive, trovare le equazioni che devono essere soddisfatte dai punti dell'insieme immagine.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

III esonero di Algebra Lineare - 9 giugno 2006 - Traccia A

n. 1 - Trovare gli autovalori, gli autovettori e gli autospazi delle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dire quindi se tali matrici sono diagonalizzabili e indicare una matrice che le diagonalizza.

2 - Trovare gli autovalori e gli autospazi delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che A e B sono diagonalizzabili e che gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono a due a due ortogonali; trovare quindi una base ortonormale di autovettori.

Scrivere la forma quadratica associata a tali matrici e (per almeno una di esse) trovarne la forma canonica. Studiare infine il segno di tale forma quadratica utilizzando il criterio del segno degli autovalori e il criterio di Sylvester.

n. 3 - Alternando il criterio dei segni del polinomio caratteristico e il criterio di Sylvester studiare il segno della forma quadratica associata alle matrici quadrate simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

n. 4 - Con il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt, trovare una base ortonormale del sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, -2, 2)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (4, 3, 0, 3)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (0, -1, 1, 0)^T.$$

n. 5 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix},$$

dire per quale valore del parametro k la trasformazione lineare L_A associata a tale matrice é iniettiva, suriettiva o bigettiva.

Se L_A non é iniettiva, trovare il nucleo di L_A ; se L_A non é suriettiva, trovare lo spazio immagine $Im(L_A)$ e il suo complemento ortogonale.

Dire infine per quale valore del parametro k il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, 1, 2)^T$, é compatibile o incompatibile; se il sistema é compatibile, trovare la o le soluzioni.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
III esonero di Algebra Lineare - 9 giugno 2006 - Traccia B

n. 1 - Trovare gli autovalori, gli autovettori e gli autospazi delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire quindi se tali matrici sono diagonalizzabili e indicare una matrice che le diagonalizza.

2 - Trovare gli autovalori e gli autospazi delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verificare che A e B sono diagonalizzabili e che gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono a due a due ortogonali; trovare quindi una base ortonormale di autovettori.

Scrivere la forma quadratica associata a tali matrici e (per almeno una di esse) trovarne la forma canonica. Studiare infine il segno di tale forma quadratica utilizzando il criterio del segno degli autovalori e il criterio di Sylvester.

n. 3 - Alternando il criterio dei segni del polinomio caratteristico e il criterio di Sylvester studiare il segno della forma quadratica associata alle matrici quadrate simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

n. 4 - Con il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt, trovare una base ortonormale del sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, -2)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (3, 4, 0, -3)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (-1, 0, 1, 0)^T.$$

n. 5 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dire per quale valore del parametro k la trasformazione lineare L_A associata a tale matrice é iniettiva, suriettiva o bigettiva.

Se L_A non é iniettiva, trovare il nucleo di L_A ; se L_A non é suriettiva, trovare lo spazio immagine $Im(L_A)$ e il suo complemento ortogonale.

Dire infine per quale valore del parametro k il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, -1, 0)^T$ é compatibile o incompatibile; se il sistema é compatibile, trovare la o le soluzioni.

Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di Algebra Lineare e di Algebra con elementi di Geometria
28 giugno 2006

1 - Verificare in base alla definizione che l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0, \quad 2x + y + z = 0\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ e che l'applicazione $L : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^2$, tale che

$$L(x, y, z) = (x - 2y + 3z, 2x + y + z) \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

é un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^2$

Trovare poi la dimensione ed una base di V , il complemento ortogonale $V^\perp$ di V ed una sua base ortogonale. Verificare che l'unione delle basi di V e $V^\perp$ testé trovate é una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.

2 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & h \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

- a) trovare il rango di A al variare del parametro h ,
- b) dire per quale valore del parametro h la trasformazione L_A associata alla matrice A é iniettiva, suriettiva, bigettiva;
- c) trovare il nucleo e l'immagine di tale trasformazione lineare, indicando di tali sottospazi la dimensione ed una base;
- d) dire per quale valore del parametro h il vettore $\mathbf{y} = (1, h^2, 1, -5)^T$ appartiene allo spazio immagine $Im(L_A)$
- e) dire per quale valore del parametro h il sistema lineare nonomogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- f) trovare il complemento ortogonale al nucleo ed all'immagine di L_A , indicando anche di tali sottospazi la dimensione ed una base.

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la matrice somma $A + B$, la matrice prodotto $A \cdot B$ e la matrice inversa B^{-1} di B ;
- b) trovare gli autovalori e i corrispondenti autovettori di A ;
- c) dire se A é diagonalizzabile e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori;
- d) dire se la forma quadratica associata alla matrice B é definita positiva, definita negativa o indefinita.

4 - Fissato nello spazio euclideo tridimensionale un riferimento metrico $\mathcal{R}(O, (e_1, e_2, e_3))$, si considerino i punti $A = (1, -1, 2)$ e $B = (1, -3, 0)$ e il vettore $u = e_1 + e_2 - 2e_3$. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r congiungente A con B e della retta s passante per A e parallela ad u e del piano π congiungenti le rette r ed s .

Trovare infine l'equazione della retta per A perpendicolare al piano π .

Corso di Laurea in SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE
Prova scritta di ALGEBRA LINEARE - 12 luglio 2006

1 - Dire per quale valore del parametro h l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + hz = 0, \quad 2x - hy = h - 2\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$, verificando la tesi in base alla definizione.

Per tale valore di h trovare la dimensione ed una base di V e del complemento ortogonale $V^\perp$ di V . Usare infine il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt per trovare una base ortonormale di $V^\perp$.

2 - Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

é invertibile e trovarne la matrice inversa, adoperando sia l'algoritmo di Gauss Jordan che il metodo della matrice aggiunta.

3 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & h & h \\ 2 & 1 & 3 & h \\ h & 1 & 1 & 1-h \end{pmatrix},$$

- a) trovare la caratteristica di A al variare del parametro h ,
- b) dire per quale valore di h la trasformazione L_A associata alla matrice A é iniettiva, suriettiva, bigettiva;
- c) trovare il nucleo e l'immagine di L_A , indicando di tali sottospazi la dimensione ed una base;
- d) dire se il vettore $\mathbf{y} = (0, 1, 0, -1)^T$ appartiene allo spazio immagine $Im(L_A)$, e trovare le eventuali soluzioni del sistema lineare non omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- f) trovare il complemento ortogonale al nucleo ed all'immagine di L_A , indicando anche di tali sottospazi la dimensione ed una base.

4 - Date la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -h & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) trovare gli autovalori di A e i corrispondenti autospazi per $h = -1$, $h = 0$ ed $h = 3$;
- b) per i suddetti valori di h dire se A é diagonalizzabile e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori di A .

5 - Date le matrici quadrate simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) trovare gli autovalori di A e dedurre dal loro segno il segno della forma quadratica associata ad A ;
- b) trovare gli autovettori corrispondenti agli autovalori di A e verificare che essi sono a due a due ortogonali;
- c) trovare quindi una matrice ortogonale B che diagonalizza A e la forma canonica della forma quadratica associata ad A ;
- d) trovare il segno delle forme quadratiche associate alle matrici B e C usando alternativamente il criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico e il criterio di Sylvester.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Algebra Lineare - 3 aprile 2007 - Traccia A

1 - Dopo avere dato la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale V , dire se sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$ gli insiemi

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0\}, \\ H_2 &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \quad 2x_1 + x_2x_3 + 5x_4 = 0\}, \\ H_3 &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

2 - Dopo avere ricordato la definizione di vettori linearmente indipendenti, verificare (mediante la definizione) che i vettori $\mathbf{a} = (1, 3, -3, 0)^T$, $\mathbf{u} = (1, 2, 0, -3)^T$ e $\mathbf{v} = (0, -1, 4, -5)^T$ sono linearmente indipendenti. Trovare quindi le equazioni parametriche e cartesiane:

- della retta affine passante per $\mathbf{a}$ e parallela ad $\mathbf{u}$ e della retta affine passante per $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$,
- del piano affine passante per $\mathbf{a}$ e parallelo al piano generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e del piano affine passante per $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$,
- dell'iperpiano H generato dai vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Indicare infine la retta ortogonale all'iperpiano H e l'iperpiano ortogonale alla retta generata da $\mathbf{u}$.

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

- trovare il vettore somma delle prime due colonne di A , la combinazione lineare delle righe di B mediante i coefficienti $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = -3$, $\alpha_4 = -1$ e il prodotto scalare della prima colonna di A con l'ultima colonna di B ,
- trovare le matrici trasposte di A e B , la matrice somma $A + B$ e le matrici prodotto AB^T e $A^T B$;
- trovare la caratteristica delle matrici A , B , $A + B$, AB^T e BA^T , indicando per ognuna di esse una base dei sottospazi generati dall'insieme delle righe e dall'insieme delle colonne.

4 - Trovare il complemento ortogonale ai sottospazi generati dalle righe e dalle colonne di B , indicandone la dimensione ed una base.

5 - Dire per quali valori del parametro k i sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 & = 1 \\ -2x_1 + x_2 - 3kx_3 & = 3 \\ kx_1 + (k+3)x_2 + kx_3 & = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 & = -1 \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 + (1-k^2)x_5 & = 4 \\ 3x_1 + x_2 + (k-3)x_3 + 3kx_4 & = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = k \\ 2x_1 + 4x_2 + (k-2)x_3 & = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + (1-k)x_3 & = 3 \\ kx_1 + 2(k+1)x_2 - x_3 & = 3-k \end{cases}$$

sono incompatibili, determinati o indeterminati, indicando esplicitamente la caratteristica della matrice dei coefficienti A e la caratteristica della matrice $\hat{A}$ dei coefficienti e termini noti del sistema.

Se il sistema è compatibile, trovarne la o le soluzioni.

Trovare infine le soluzioni del sistema omogeneo associato a tali sistemi; se il sistema ammette soluzioni non banali, indicare esplicitamente una base dell'insieme delle soluzioni.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

I esonero di Algebra Lineare - 3 aprile 2007 - Traccia B

1 - Dopo avere dato la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale V , dire se sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$ gli insiemi

$$H_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0\},$$

$$H_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 3x_1x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0\},$$

$$H_3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1\}.$$

2 - Dopo avere ricordato la definizione di vettori linearmente indipendenti, verificare (mediante la definizione) che i vettori $\mathbf{a} = (1, -3, 0, 2)^T$, $\mathbf{u} = (1, 0, -3, 3)^T$ e $\mathbf{v} = (0, -5, 4, -1)^T$ sono linearmente indipendenti. Trovare quindi le equazioni parametriche e cartesiane:

- della retta affine passante per $\mathbf{a}$ e parallela ad $\mathbf{u}$ e della retta affine passante per $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$,
- del piano affine passante per $\mathbf{a}$ e parallelo al piano generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e del piano affine passante per $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$,
- dell'iperpiano H generato dai vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Indicare infine la retta ortogonale all'iperpiano H e l'iperpiano ortogonale alla retta generata da $\mathbf{u}$.

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

- trovare il vettore somma delle prime due colonne di A , la combinazione lineare delle righe di B mediante i coefficienti $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1/2$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = -1$ e il prodotto scalare della seconda colonna di A con la prima colonna di B ,
- trovare le matrici trasposte di A e B , la matrice somma $A + B$ e le matrici prodotto AB^T e A^TB ;
- trovare la caratteristica delle matrici A , B , $A + B$, AB^T e BA^T , indicando per ognuna di esse una base dei sottospazi generati dall'insieme delle righe e dall'insieme delle colonne.

4 - Trovare il complemento ortogonale ai sottospazi generati dalle righe e dalle colonne di A , indicandone la dimensione ed una base.

5 - Dire per quali valori del parametro k i sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2kx_3 & = 0 \\ kx_1 + (3 - k)x_2 + 4x_3 & = 2k \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 & = 2 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2(k - 5)x_4 + 5x_5 & = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 + (k - 8)x_3 + k^2x_5 & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 & = k \\ 2x_1 - 2x_2 + (k + 6)x_3 & = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 & = -1 \\ kx_1 + (2 - k)x_2 - 8x_3 & = 1, \end{cases}$$

sono incompatibili, determinati o indeterminati, indicando esplicitamente la caratteristica della matrice dei coefficienti A e la caratteristica della matrice $\hat{A}$ dei coefficienti e termini noti del sistema.

Se il sistema è compatibile, trovarne la o le soluzioni.

Trovare infine le soluzioni del sistema omogeneo associato a tali sistemi; se il sistema ammette soluzioni non banali, indicare esplicitamente una base dell'insieme delle soluzioni.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Algebra Lineare - 21 maggio 2007 - Traccia A

1 - Dopo aver dato la definizione di trasformazione lineare tra due spazi vettoriali, dire se sono trasformazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ le funzioni che associano ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbf{R}^3$ il vettore $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = 2x_1 + 4x_2 - \cos x_3 \\ y_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 + 3x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

Se L é una trasformazione lineare verificare che il nucleo di L é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

2 - Trovare il sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = (2, -1, 0, -1, 0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (3, -1, -2, 2, 0)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (0, -2, -1, 0, -3)^T$, e il suo complemento ortogonale, $U^\perp$, indicando di tali sottospazi la dimensione ed una base.

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

- calcolare il determinante di A , di B e di C , alternando la regola di Sarrus, la regola di Laplace e il metodo di Gauss-Jordan,
- dire quindi se tali matrici sono invertibili e (in caso affermativo) calcolarne l'inversa con l'algoritmo di Gauss Jordan e con il metodo della matrice aggiunta.

4 - Considerate le matrici A e B dell'esercizio precedente e il vettore $\mathbf{b} = (1, 3, 2)^T$, trovare la caratteristica di A , B , $(A, \mathbf{b})$, $(B, \mathbf{b})$, adoperando l'algoritmo degli orlati di Kronecker.

Di conseguenza, dire se i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono incompatibili, determinati o indeterminati; se il sistema é determinato trovare l'unica soluzione con il Teorema di Cramer, (alternando nel calcolo dei determinanti la regola di Sarrus, la regola di Laplace e il metodo di Gauss-Jordan).

5 - Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -\alpha & \alpha - 4 \\ \alpha & 1 - \alpha & \alpha^2 & 3\alpha \end{pmatrix}$$

- calcolare il determinante di M con l'algoritmo di Gauss Jordan e con la regola di Laplace,
- trovare (al variare del parametro α) la sua caratteristica, adoperando il metodo di Gauss Jordan e il metodo degli orlati di Kronecker, nonché una base dei sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$ generati rispettivamente dalle righe e dalle colonne di M ;
- trovare il complemento ortogonale ai sottospazi U e V , indicandone la dimensione ed una base;
- trovare (al variare del parametro α) il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare associata ad M , indicando una base di tali sottospazi;
- dire se L_M é iniettiva, suriettiva o bigettiva.

6 - Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove A é la matrice formata dalle prime tre colonne della matrice M del precedente esercizio e $\mathbf{b}$ é l'ultima colonna di M . Dire per quali valori del parametro α tale sistema lineare é incompatibile, determinato o indeterminato, indicando esplicitamente la caratteristica della matrice dei coefficienti A e la caratteristica della matrice M dei coefficienti e termini noti del sistema. Se il sistema é compatibile, trovarne la o le soluzioni.

Trovare infine il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare associata ad A , indicandone esplicitamente la dimensione ed una base.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

II esonero di Algebra Lineare - 21 maggio 2007 - Traccia B

1 - Dopo aver dato la definizione di trasformazione lineare tra due spazi vettoriali, dire se sono trasformazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ le funzioni che associano ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbf{R}^3$ il vettore $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = 2x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + \sin(x_2 - x_3) \\ y_2 = x_1 + 3x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1x_2 - x_3 \end{cases} .$$

Se L é una trasformazione lineare verificare che il nucleo di L é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

2 - Trovare il sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = (-2, 1, 0, 0, -1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-3, 2, -1, 0, 2)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 2, -1, 3, 0)^T$, e il suo complemento ortogonale, $U^\perp$, indicando di tali sottospazi la dimensione ed una base.

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

- calcolare il determinante di A , di B e di C , alternando la regola di Sarrus, la regola di Laplace e il metodo di Gauss-Jordan,
- dire quindi se tali matrici sono invertibili e (in caso affermativo) calcolarne l'inversa con l'algoritmo di Gauss Jordan e con il metodo della matrice aggiunta.

4 - Considerate le matrici A e B dell'esercizio precedente e il vettore $\mathbf{b} = (1, 3, 2)^T$, trovare la caratteristica di A , B , $(A, \mathbf{b})$, $(B, \mathbf{b})$, adoperando l'algoritmo degli orlati di Kronecker.

Di conseguenza, dire se i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono incompatibili, determinati o indeterminati; se il sistema é determinato trovare l'unica soluzione con il Teorema di Cramer, (alternando nel calcolo dei determinanti la regola di Sarrus, la regola di Laplace e il metodo di Gauss-Jordan).

5 - Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & -2\alpha & \alpha + 6 \\ \alpha & 2\alpha & 4\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

- calcolare il determinante di M con l'algoritmo di Gauss Jordan e con la regola di Laplace,
- trovare (al variare del parametro α) la sua caratteristica, adoperando il metodo di Gauss Jordan e il metodo degli orlati di Kronecker, nonché una base dei sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$ generati rispettivamente dalle righe e dalle colonne di M ;
- trovare il complemento ortogonale ai sottospazi U e V , indicandone la dimensione ed una base;
- trovare (al variare del parametro α) il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare associata ad M , indicando una base di tali sottospazi;
- dire se L_M é iniettiva, suriettiva o bigettiva.

6 - Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove A é la matrice formata dalle prime tre colonne della matrice M del precedente esercizio e $\mathbf{b}$ é l'ultima colonna di M . Dire per quali valori del parametro α tale sistema lineare é incompatibile, determinato o indeterminato, indicando esplicitamente la caratteristica della matrice dei coefficienti A e la caratteristica della matrice M dei coefficienti e termini noti del sistema. Se il sistema é compatibile, trovarne la o le soluzioni.

Trovare infine il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare associata ad A , indicandone esplicitamente la dimensione ed una base.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

III esonero di Algebra Lineare - 6 giugno 2007 - Traccia A

n. 1 - Trovare gli autovalori, gli autovettori e gli autospazi delle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire quindi se tali matrici sono diagonalizzabili e indicare una matrice che le diagonalizza.

2 - Trovare gli autovalori e gli autospazi delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che A e B sono diagonalizzabili e che gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono a due a due ortogonali; trovare quindi una base ortonormale di autovettori.

Scrivere la forma quadratica associata a tali matrici e (per almeno una di esse) trovarne la forma canonica. Studiare infine il segno di tale forma quadratica utilizzando il criterio del segno degli autovalori e il criterio di Sylvester.

n. 3 - Date le matrici quadrate simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & a+2 \end{pmatrix},$$

- studiare il segno della forma quadratica associata alle matrici A e B con il criterio dei segni del polinomio caratteristico ,
- studiare (al variare del parametro a) il segno della forma quadratica associata alla matrice C con il criterio di Sylvester.

n. 4 - Con il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt, costruire una base ortonormale dello spazio $\mathbf{R}^4$ a partire dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0, -2)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (1, 3, 1, -1)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (2, 0, 2, 1)^T, \quad \mathbf{u}_4 = (1, 2, 0, 1)^T.$$

n. 5 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -k \\ -2 & 5 & 3k \\ -k & 2k & 1 \end{pmatrix},$$

dire per quale valore del parametro k il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, -2, -1)^T$ é compatibile o incompatibile; se il sistema é compatibile, trovare la o le soluzioni.

Trovare poi il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare L_A associata a tale matrice, gli spazi U e V generati dalle righe e dalle colonne di A e i loro complementi ortogonali.

Dire quindi per quale valore del parametro k la trasformazione L_A é iniettiva, suriettiva o bigettiva.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE

III esonero di Algebra Lineare - 6 giugno 2007 - Traccia B

n. 1 - Trovare gli autovalori, gli autovettori e gli autospazi delle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 10 & -8 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire quindi se tali matrici sono diagonalizzabili e indicare una matrice che le diagonalizza.

2 - Trovare gli autovalori e gli autospazi delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che A e B sono diagonalizzabili e che gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono a due a due ortogonali; trovare quindi una base ortonormale di autovettori.

Scrivere la forma quadratica associata a tali matrici e (per almeno una di esse) trovarne la forma canonica. Studiare infine il segno di tale forma quadratica utilizzando il criterio del segno degli autovalori e il criterio di Sylvester.

n. 3 - Date le matrici quadrate simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 2 & 0 & a+3 \end{pmatrix},$$

- studiare il segno della forma quadratica associata alle matrici A e B con il criterio dei segni del polinomio caratteristico ,
- studiare (al variare del parametro a) il segno della forma quadratica associata alla matrice C con il criterio di Sylvester.

n. 4 - Con il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt, costruire una base ortonormale dello spazio $\mathbf{R}^4$ a partire dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1, -2)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (-4, 4, -1, 0)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (0, -2, 1, -4)^T, \quad \mathbf{u}_4 = (1, 2, -4, -1)^T.$$

n. 5 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 4 & 1+2k \\ k & k+2 & k+1 \end{pmatrix}$$

dire per quale valore del parametro k il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (-1, -1, 1)^T$ é compatibile o incompatibile; se il sistema é compatibile, trovare la o le soluzioni.

Trovare poi il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare L_A associata a tale matrice, gli spazi U e V generati dalle righe e dalle colonne di A e i loro complementi ortogonali.

Corso di laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di ALGEBRA LINEARE - 7 febbraio 2007

n. 1 - Verificare in base alla definizione che l'applicazione $L : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^2$, tale che

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 + x_2) \quad \text{per ogni } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,$$

é un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^2$ e che l'insieme

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 = 0\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.

Trovare poi la dimensione ed una base di V , il complemento ortogonale $V^\perp$ di V ed una sua base ortogonale. Verificare che l'unione delle basi di V e $V^\perp$ testé trovate é una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.

n. 2 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & h \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

- a) calcolare il determinante di A ,
- b) dire per quale valore del parametro h le righe di A sono linearmente dipendenti o indipendenti,
- c) trovare il rango di A al variare del parametro h ,
- d) trovare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare L_A associata ad A , indicando di tali sottospazi la dimensione ed una base;
- e) trovare il complemento ortogonale al nucleo ed all'immagine di L_A , indicando anche di tali sottospazi la dimensione ed una base.
- f) dire per quale valore del parametro h il sistema lineare nonomogeneo $Ax = y$, con $y = (1, -1, 0, 1, 1)$, é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema.

n. 3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la matrice trasposta di A , la matrice $2 \cdot A - B$ e la matrice prodotto $A \cdot B$;
- b) dire se A é invertibile e trovarne l'(eventuale) matrice inversa A^{-1} ;
- c) trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A e di B ,
- d) dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

n. 4 - Usando alternativamente il criterio del segno degli autovalori e il criterio di Sylvester, studiare il segno della forma quadratica associata alle matrici quadrate simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Corso di laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di ALGEBRA LINEARE - 13 giugno 2007

1 - Dopo avere richiamato le definizioni di trasformazione lineare tra spazi vettoriali e di sottospazio di uno spazio vettoriale, verificare in base atali definizioni,

(1) che l'applicazione $L : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^2$, che associa ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$ il vettore

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

é un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^2$,

(2) che il nucleo di L , cioè l'insieme

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.

2 - Dati i vettori $u_1 = (1, 2, 0, 0, -2)^T$, $u_2 = (1, 0, 0, 0, 2)^T$ e $u_3 = (1, 4, 2, -1, 0)^T$,

- a) dire se tali vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;
- b) trovare la dimensione ed una base del sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ generato da tali vettori e del suo complemento ortogonale $U^\perp$;
- c) con il procedimento di Gram Schmidt, ricavare una base ortonormale di U e di $U^\perp$.

3 - Data la matrice A avente per righe i vettori $(1, 1, h)$, $(-1, -1, -2)$ e $(h, 0, 4)$, e il vettore $\mathbf{b} = (-1, 1, 2)^T$,

- a) trovare, al variare del parametro h , la caratteristica delle matrici A e $\hat{A} = (A, \mathbf{b})$;
- b) dire per quale valore del parametro h il sistema lineare non omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- c) trovare il complemento ortogonale allo spazio U generato dalle righe di A , precisando la dimensione di U e di $U^\perp$ ed indicando una base di tali sottospazi;
- d) trovare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare L_A associata ad A , e il complemento ortogonale a tali sottospazi di $\mathbf{R}^3$, indicandone esplicitamente la dimensione ed una base.

4 - Date le metrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la matrice trasposta di A , la matrice $A - 2 \cdot B$ e la matrice prodotto $B \cdot A$;
- b) dire se B é invertibile e trovarne l'(eventuale) matrice inversa B^{-1} ;
- c) trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A e di B ,
- d) dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

5 - Con il criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico e con il criterio di Sylvester studiare il segno della forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}, \quad \text{per } a = 2, a = 3, a = 4.$$

Corso di laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di ALGEBRA LINEARE - 18 luglio 2007

1 - Dopo avere richiamato le definizioni di trasformazione lineare tra spazi vettoriali, di nucleo di una trasformazione lineare e di sottospazio di uno spazio vettoriale, verificare in base a tali definizioni,

(1) che l'applicazione $L : \mathbf{R}^4 \mapsto \mathbf{R}^2$, che associa ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{R}^4$ il vettore

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

é un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^4$ ed $\mathbf{R}^2$,

(2) che il nucleo di L é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.

2 - Dati i vettori $u_1 = (1, 1, -1, 2, -3)^T$, $u_2 = (-2, 1, 2, 2, -3)^T$ e $u_3 = (3, 1, -3, 2, -3)^T$,

- a) dire se tali vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;
- b) trovare la dimensione ed una base del sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ generato da tali vettori e del suo complemento ortogonale $U^\perp$;
- c) con il procedimento di Gram Schmidt, ricavare una base ortonormale di U e di $U^\perp$.
- d) verificare che l'unione delle basi di U e $U^\perp$ testé trovate é una base ortonormale di $\mathbf{R}^5$

3 - Data la matrice A avente per righe i vettori $(1, 1, 1)$, $(1, -2, -5)$, $(5, 3, h)$, $(-1, 0, 1)$ e il vettore $\mathbf{b} = (1, -5, 1, h^2)^T$,

- a) trovare, al variare del parametro h , la caratteristica delle matrici A e $\hat{A} = (A, \mathbf{b})$;
- b) dire per quale valore del parametro h il sistema lineare non omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- c) trovare il complemento ortogonale allo spazio U generato dalle righe di A , precisando la dimensione di U e di $U^\perp$ ed indicando una base di tali sottospazi;
- d) trovare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare L_A associata ad A , e il complemento ortogonale a tali sottospazi di $\mathbf{R}^4$, indicandone esplicitamente la dimensione ed una base.

4 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la matrice trasposta di A , la matrice $2 \cdot A - B$ e la matrice prodotto $A \cdot B$;
- b) dire se B é invertibile e trovarne l'(eventuale) matrice inversa B^{-1} ;
- c) trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A e di B ;
- d) dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

5 - Con il criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico e con il criterio di Sylvester studiare il segno della forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \text{per } a = -2, a = -1, a = 0.$$

Corso di laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di ALGEBRA LINEARE - 5 settembre 2007

1 - Dopo avere richiamato le definizioni di trasformazione lineare tra spazi vettoriali, di nucleo di una trasformazione lineare e di sottospazio di uno spazio vettoriale, verificare in base a tali definizioni,

(1) che l'applicazione $L : \mathbf{R}^4 \mapsto \mathbf{R}^2$, che associa ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{R}^4$ il vettore

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

è un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^4$ ed $\mathbf{R}^2$,

(2) che il nucleo di L è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.

2 - Dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -2, 0, 3)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (3, 2, -2, 1, 4)^T$,

- a) dire se tali vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;
- b) trovare la dimensione ed una base del sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ generato da tali vettori e del suo complemento ortogonale $U^\perp$;
- c) con il procedimento di Gram Schmidt, ricavare una base ortonormale di U e di $U^\perp$.
- d) verificare che l'unione delle basi di U e $U^\perp$ testé trovate è una base ortonormale di $\mathbf{R}^5$

3 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1-h & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{e il vettore} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+h \\ h^2 \end{pmatrix},$$

- a) trovare, al variare del parametro h , la caratteristica delle matrici A e $\hat{A} = (A, \mathbf{b})$;
- b) dire per quale valore del parametro h il sistema lineare non omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- c) trovare il complemento ortogonale allo spazio U generato dalle righe di A , precisando la dimensione di U e di $U^\perp$ ed indicando una base di tali sottospazi;
- d) trovare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare L_A associata ad A , e il complemento ortogonale a tali sottospazi di $\mathbf{R}^3$, indicandone esplicitamente la dimensione ed una base.

4 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la matrice trasposta di A , la matrice $A - (1/2) \cdot B$ e la matrice prodotto $A \cdot B$;
- b) dire se B è invertibile e trovarne l'(eventuale) matrice inversa B^{-1} ;
- c) trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A e di B ;
- d) dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

5 - Con il criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico e con il criterio di Sylvester studiare il segno della forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{per } a = 0, a = 1, a = 2, a = 3.$$

Corso di laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
Prova scritta di ALGEBRA LINEARE - 12 dicembre 2007

1 - Dopo avere richiamato le definizioni di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale e di trasformazione lineare tra spazi vettoriali, dire per quali valori del parametro h l'insieme

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - hz = 1 - h\}$$

é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ e per quali valori del parametro h l'applicazione $L : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^2$, che associa ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$ il vettore

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2x_1 + hx_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + (h-1)x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

é un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^2$.

2 - Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e il vettore} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la caratteristica delle matrici A e $\hat{A} = (A, \mathbf{b})$;
- b) dire se il sistema lineare non omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- c) trovare il complemento ortogonale allo spazio U generato dalle righe di A , precisando la dimensione di U e di $U^\perp$ ed indicando una base di tali sottospazi;
- d) con il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt trovare una base ortogonale del sottospazio U generato dalle righe di A ;
- e) trovare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare L_A associata ad A , e il complemento ortogonale a tali sottospazi di $\mathbf{R}^3$, indicandone esplicitamente la dimensione ed una base.
- f) trovare gli autovalori di A e i relativi autospazi;
- g) dire quindi se A é diagonalizzabile e (in caso affermativo) trovare una matrice che la diagonalizza.

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) trovare la matrice trasposta di A , la matrice $2 \cdot A - B$ e la matrice prodotto $A \cdot B$;
- b) dire se B é invertibile e trovarne l'(eventuale) matrice inversa B^{-1} ;
- c) trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A e di B ,
- d) dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

5 - Con il criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico e con il criterio di Sylvester studiare il segno della forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{per } a = 0, a = 2, a = 4.$$

Corso di laurea in Scienze Statistiche ed Economiche
 Prova scritta di ALGEBRA LINEARE - 18 luglio 2007

1 - Dopo avere richiamato le definizioni di trasformazione lineare tra spazi vettoriali, di nucleo di una trasformazione lineare e di sottospazio di uno spazio vettoriale, verificare in base a tali definizioni,

- (1) che l'applicazione $L : \mathbf{R}^4 \mapsto \mathbf{R}^2$, che associa ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{R}^4$ il vettore

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

è un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^4$ ed $\mathbf{R}^2$,

- (2) che il nucleo di L è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.

Svolgimento.

Dicesi trasformazione lineare tra due spazi vettoriali V e V' una funzione $L : V \rightarrow V'$ tale che

- a) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ risulta $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$,
 b) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{u} \in V$ risulta $L(\alpha\mathbf{u}) = \alpha L(\mathbf{u})$.

Dicesi nucleo della trasformazione lineare $L : V \rightarrow V'$ l'insieme $\ker(L) = \{\mathbf{u} \in V | L(\mathbf{u}) = 0'\}$.

Dicesi sottospazio dello spazio vettoriale V un insieme non vuoto $H \subseteq V$ tale che

- c) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ risulta $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$,
 d) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{u} \in H$ risulta $\alpha\mathbf{u} \in H$.

Nel nostro caso, fissati arbitrariamente $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ in $\mathbf{R}^4$, si ha:

$$L(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4 \\ 2u_1 - u_2 - 3u_3 + u_4 \end{pmatrix}, \quad L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4 \\ 2v_1 - v_2 - 3v_3 + v_4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_4 + v_4 \end{pmatrix}, \quad L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 - 2(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) - (u_4 + v_4) \\ 2(u_1 + v_1 - (u_2 + v_2) - 3(u_3 + v_3) + (u_4 + v_4)) \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) &= \begin{pmatrix} u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4 \\ 2u_1 - u_2 - 3u_3 + u_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4 \\ 2v_1 - v_2 - 3v_3 + v_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 - 2u_2 - 2v_2 + u_3 + v_3 - u_4 - v_4 \\ 2u_1 + 2v_1 - u_2 - v_2 - 3u_3 - 3v_3 + u_4 + v_4 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u} + \mathbf{v}); \end{aligned}$$

questo prova che è soddisfatta la a).

D'altra parte è soddisfatta la b), poiché per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \in \mathbf{R}^4$ si ha:

$$\alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \\ \alpha u_4 \end{pmatrix}, \quad L(\alpha\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 - 2\alpha u_2 + \alpha u_3 - \alpha u_4 \\ 2\alpha u_1 - \alpha u_2 - 3\alpha u_3 + \alpha u_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4 \\ 2u_1 - u_2 - 3u_3 + u_4 \end{pmatrix} = \alpha L(\mathbf{u}).$$

Pertanto sono soddisfatte la a) e la b), e quindi L è una trasformazione lineare tra $\mathbf{R}^4$ ed $\mathbf{R}^2$.

Il nucleo di L non è altro che l'insieme H delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Vogliamo provare che H soddisfa le proprietà c) e d).

Infatti, fissati arbitrariamente $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ in H si ha che

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4 = 0 \\ 2u_1 - u_2 - 3u_3 + u_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4 = 0 \\ 2v_1 - v_2 - 3v_3 + v_4 = 0 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} (u_1 + v_1) - 2(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) - (u_4 + v_4) &= (u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4) + (v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4) = 0 + 0 = 0, \\ 2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) - 3(u_3 + v_3) + (u_4 + v_4) &= (2u_1 - u_2 - 3u_3 + u_4) + (2v_1 - v_2 - 3v_3 + v_4) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Questo prova che $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$, come vuole la c).

Infine é soddisfatta la d), poiché per ogni $\mathbf{u} \in H$ si ha

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4 = 0 \\ 2u_1 - u_2 - 3u_3 + u_4 = 0 \end{cases}$$

e quindi per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{cases} \alpha u_1 - 2\alpha u_2 + \alpha u_3 - \alpha u_4 = \alpha(u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4) = \alpha \cdot 0 = 0 \\ 2\alpha u_1 - 2\alpha u_2 + \alpha u_3 - \alpha u_4 = \alpha(2u_1 - u_2 - 3u_3 + u_4) = \alpha \cdot 0 = 0 \end{cases},$$

il che dimostra che $\alpha \mathbf{u} \in H$.

2 - Dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 2, -3)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-2, 1, 2, 2, -3)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (3, 1, -3, 2, -3)^T$,

- dire se tali vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;**
- trovare la dimensione ed una base del sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ generato da tali vettori e del suo complemento ortogonale $U^\perp$;**
- con il procedimento di Gram Schmidt, ricavare una base ortonormale di U e di $U^\perp$.**
- verificare che l'unione delle basi di U e $U^\perp$ testé trovate é una base ortonormale di $\mathbf{R}^5$**

Svolgimento.

Con due successivi passi di pivot parziali la matrice A avente per righe i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ viene trasformata nelle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che le tre righe di A , (cioé i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$), sono linearmente dipendenti, ma le prime due righe di A sono linearmente indipendenti. Pertanto lo spazio U generato dalle righe di A ha dimensione 2; una sua base é formata dalle prime due righe, cioè dai vettori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Per quanto riguarda il complemento ortogonale $U^\perp$ ad U , esso coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Per risolvere tale sistema basta eseguire l'algoritmo di Gauss Jordan completo sulla matrice $(A, \mathbf{0})$; con due successivi passi di pivot completi tale matrice viene trasformata nella matrice $(A', \mathbf{0})$ con

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_4 + 3x_5; \end{cases}$$

le sue soluzioni sono tutti e soli i vettori del tipo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R} \text{ arbitrari .}$$

Pertanto $U^\perp$ é il sottospazio di dimensione 3 generato dai vettori

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{w}_2 = (0, -2, 0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{w}_3 = (0, 3, 0, 0, 1)^T,$$

che costituiscono una sua base.

Una base ortonormale di U e di $U^\perp$ viene ricavata dalle rispettive basi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ con l'algoritmo di Gram Schmidt: si pone infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 2, -3)^T, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - \frac{10}{16} \mathbf{v}_1 = (-21/8, 3/8, 21/8, 6/8, -9/8)^T = (3/8) \cdot (-7, 1, 7, 2, -3)^T \\ \hat{\mathbf{v}}_1 &= (1/\|\mathbf{v}_1\|) \cdot \mathbf{v}_1 = (1/4) \cdot (1, 1, -1, 2, -3)^T, \\ \hat{\mathbf{v}}_2 &= (1/\|\mathbf{v}_2\|) \cdot \mathbf{v}_2 = (1/4\sqrt{7}) \cdot (-7, 1, 7, 2, -3)^T. \end{aligned}$$

Analogamente si pone:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 0, 0)^T, \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2|\mathbf{z}_1)}{(\mathbf{z}_1|\mathbf{z}_1)} \mathbf{z}_1 = \mathbf{w}_2 - \frac{0}{2} \mathbf{z}_1 = \mathbf{w}_2 = (0, -2, 0, 1, 0)^T, \\ \mathbf{z}_3 &= \mathbf{w}_3 - \frac{(\mathbf{w}_3|\mathbf{z}_1)}{(\mathbf{z}_1|\mathbf{z}_1)} \mathbf{z}_1 - \frac{(\mathbf{w}_3|\mathbf{z}_2)}{(\mathbf{z}_2|\mathbf{z}_2)} \mathbf{z}_2 = \mathbf{w}_3 - \frac{0}{2} \mathbf{z}_1 + \frac{6}{5} \mathbf{z}_2 = (0, 3/5, 0, 6/5, 1)^T, \\ \hat{\mathbf{z}}_1 &= (1/\|\mathbf{z}_1\|) \cdot \mathbf{z}_1 = (1/\sqrt{2}) \cdot (1, 0, 1, 0, 0)^T, \\ \hat{\mathbf{z}}_2 &= (1/\|\mathbf{z}_2\|) \cdot \mathbf{z}_2 = (1/\sqrt{5}) \cdot (0, -2, 0, 1, 0)^T, \\ \hat{\mathbf{z}}_3 &= (1/\|\mathbf{z}_3\|) \cdot \mathbf{z}_3 = (1/\sqrt{70}) \cdot (0, 3, 0, 6, 5)^T. \end{aligned}$$

Ebbene $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2\}$ é una base ortonormale di U e $\{\hat{\mathbf{z}}_1, \hat{\mathbf{z}}_2, \hat{\mathbf{z}}_3\}$ é una base ortonormale di $U^\perp$. Inoltre i vettori $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{z}}_1, \hat{\mathbf{z}}_2, \hat{\mathbf{z}}_3$ sono evidentemente dei vettori di norma unitaria a due a due ortogonali; pertanto essi formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^5$.

3 - Data la matrice A avente per righe i vettori $(1, 1, 1)$, $(1, -2, -5)$, $(5, 3, h)$, $(-1, 0, 1)$ e il vettore $\mathbf{b} = (1, -5, 1, h^2)^T$,

- trovare, al variare del parametro h , la caratteristica delle matrici A e $\hat{A} = (A, \mathbf{b})$;
- dire per quale valore del parametro h il sistema lineare non omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- trovare il complemento ortogonale allo spazio U generato dalle righe di A , precisando la dimensione di U e di $U^\perp$ ed indicando una base di tali sottospazi;
- trovare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare L_A associata ad A , e il complemento ortogonale a tali sottospazi di $\mathbb{R}^3$, indicandone esplicitamente la dimensione ed una base.

Svolgimento.

Con due successivi passi di pivot la matrice $(A, \mathbf{b})$ viene trasformata come segue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -5 \\ 5 & 3 & h & 1 \\ -1 & 0 & 1 & h^2 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & h-5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & h^2+1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2-1 \end{array} \right).$$

Ne segue che

$$\text{car}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } h \neq \pm 1, \\ 2 & \text{se } h = 1, \end{cases} \quad \text{car}(A, \mathbf{b}) = \begin{cases} 4 & \text{se } h \neq \pm 1, \\ 3 & \text{se } h = -1, \\ 2 & \text{se } h = 1. \end{cases}$$

Pertanto si ha che:

- se $h \neq \pm 1$, allora si ha $\text{car}(A) = 3 \neq 4 = \text{car}(A, \mathbf{b})$, e quindi il sistema lineare non omogeneo è incompatibile. (In effetti l'ultima equazione sarebbe $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = h^2 - 1 \neq 0$, e quindi sarebbe incompatibile).
- Se $h = -1$, allora risulta $\text{car}(A) = \text{car}(A, \mathbf{b}) = 3 = n$, e quindi il sistema è determinato. In effetti esso è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \\ -2x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $\mathbf{x} = (-1, 2, 0)^T$.

- Se $h = 1$, allora risulta $\text{car}(A) = \text{car}(A, \mathbf{b}) = 2 < n$, e quindi il sistema è indeterminato. In effetti esso è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \end{cases}$$

che ha le infinite soluzioni

$$\mathbf{x} = (-1 + \alpha, 2 - 2\alpha, \alpha)^T = (-1, 2, 0)^T + \alpha(1, -2, 1)^T, \quad \text{con } \alpha \text{ arbitrario numero reale.}$$

La dimensione dello spazio U generato dalle righe di A è (per definizione) la caratteristica di A ; pertanto, si ha:

$$\dim(U) = \text{car}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } h \neq 1, \\ 2 & \text{se } h = 1. \end{cases}$$

Una base di U è data dalle prime tre o dalle prime due righe di A a seconda che risulti $h \neq 1$ o $h = 1$.

Dunque $V^\perp$ é lo spazio di dimensione 2 generato dai vettori $\mathbf{p}_1 = (13, 2, -3, 0)^T$ e $\mathbf{p}_2 = (2, 1, 0, 3)^T$; una base di $V^\perp$ é formata dai vettori $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$; lo spazio immagine di L_A é il complemento ortogonale a tale sottospazio, e quindi l'intersezione degli iperpiani di equazione $13y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 0$ e $2y_1 + y_2 + 3y_4 = 0$.

Si noti che in ogni caso risulta $\dim V^\perp = 4 - \dim(V)$; risulta infatti:

$$\dim V^\perp = \begin{cases} 1 = 4 - 3 = 4 - \dim(V) & \text{se } h \neq 1, \\ 2 = 4 - 2 = 4 - \dim(V) & \text{se } h = 1, \end{cases}$$

4 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- trovare la matrice trasposta di A , la matrice $2 \cdot A - B$ e la matrice prodotto $A \cdot B$;
- dire se B é invertibile e trovarne l'(eventuale) matrice inversa B^{-1} ;
- trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di A e di B ,
- dire se tali matrici sono diagonalizzabili e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori.

Svolgimento.

Risulta:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot A - B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per vedere se B é invertibile e per trovare la sua eventuale inversa, applichiamo l'algoritmo di Gauss Jordan alla matrice (B, I) ; con uno scambio di riga e tre successivi passi di pivot si ottengono via via le matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo dimostra che B é invertibile e che la sua inversa é la matrice

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare gli autovalori di A dobbiamo risolvere l'equazione $\det(A - \lambda I) = 0$; ebbene risulta:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 & -2 \\ -2 & -1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \dots = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = -1$ (autovalore semplice) e $\lambda_2 = 1$, (autovalore doppio).

L'autospazio di A corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = -1$ é ottenuto risolvendo il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cioè

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & & x_1 & x_2 & x_3 & & & & x_1 & x_2 & x_3 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 4 & 2 & -2 & | & 0 & & -2 & 0 & 2 & | & 0 & & 1 & 0 & -1 & | & 0 & & & \\ -2 & 0 & 2 & | & 0 & & 0 & 2 & 2 & | & 0 & & 0 & 1 & 1 & | & 0 & & & \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 & & 0 & 2 & 2 & | & 0 & & 0 & 0 & 0 & | & 0 & & & \end{array}$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$ é quindi la retta generata dal vettore $(1, -1, 1)^T$.

L'autospazio di A corrispondente all'autovalore doppio $\lambda_2 = 1$ é ottenuto risolvendo il sistema lineare omogeneo $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cioè

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & & x_1 & x_2 & x_3 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 2 & 2 & -2 & | & 0 & & 1 & 1 & -1 & | & 0 & & \\ -2 & -2 & 2 & | & 0 & & 0 & 0 & 0 & | & 0 & & \\ 2 & 2 & -2 & | & 0 & & 0 & 0 & 0 & | & 0 & & \end{array}$$

Esso é quindi l'iperpiano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, cioè il sottospazio di dimensione $2 = 3 - 1$ generato dai vettori $(-1, 1, 0)^T$ e $(1, 0, 1)^T$. Pertanto la molteplicitá geometrica di $\lambda_2 = 1$ é uguale a 2, e quindi anche λ_2 é un autovalore regolare.

Ne segue che A é una matrice diagonalizzabile, poiché la somma delle molteplicitá geometriche dei suoi autovalori é uguale a $m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) = 1 + 2 = 3 = n$; una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori di A é data dai tre autovettori di A testé trovati: $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)^T$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)^T$.

Una matrice che diagonalizza A é la matrice C avente per colonne i tre autovettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$: in effetti posto

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta:

$$\begin{aligned} A \cdot C &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C \cdot \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha dunque $A \cdot C = C\Lambda$ e quindi $C^{-1}AC = \Lambda$.

Analogamente, per trovare gli autovalori di B occorre risolvere l'equazione $\det(B - \lambda I) = 0$; ebbene risulta:

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -3 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \dots = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Anche gli autovalori di B sono quindi $\lambda_1 = -1$ (autovalore semplice) e $\lambda_2 = 1$, (autovalore doppio).

L'autospazio di B corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = -1$ é ottenuto risolvendo il sistema lineare omogeneo $(B + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cioè

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & & x_1 & x_2 & x_3 & & & & x_1 & x_2 & x_3 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 & & 1 & 1 & -3 & | & 0 & & 1 & 1 & 0 & | & 0 & & & \\ 1 & 1 & 3 & | & 0 & & 0 & 0 & 6 & | & 0 & & 0 & 0 & 1 & | & 0 & & & \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & & 0 & 0 & 5 & | & 0 & & 0 & 0 & 0 & | & 0 & & & \end{array}$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$ é quindi la retta generata dal vettore $(1, -1, 0)^T$.

L'autospazio di B corrispondente all'autovalore doppio $\lambda_2 = 1$ é ottenuto risolvendo il sistema lineare omogeneo $(B - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cioè

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & | & x_1 & x_2 & x_3 & | & x_1 & x_2 & x_3 & | & & \\ \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & -3 & | & 0 & 1 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 & 3/2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -3/2 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 2 & -3 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array} .$$

L'autospazio relativo all'autovalore doppio $\lambda_2 = 1$ é quindi la retta generata dal vettore $(-3, 3, 2)^T$. Pertanto la molteplicitá geometrica di $\lambda_2 = 1$ é uguale a 1, e quindi λ_2 é un autovalore singolare. Ne segue che B non é diagonalizzabile. (Si noti che la somma delle molteplicitá geometriche degli autovalori di B é uguale ad $1 + 1 = 2 < 3 = n$.)

5 - Con il criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico e con il criterio di Sylvester studiare il segno della forma quadratica associata alla matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \text{per } a = -1, a = -1/2, a = 0 .$$

Svolgimento.

Il polinomio caratteristico della matrice A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 2 & -1 \\ 2 & -4 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 & a - \lambda \end{pmatrix} = \dots = -\lambda^3 + (a - 6)\lambda^2 + (6a - 2)\lambda + (4a + 2).$$

In particolare, per $a = -1$, il polinomio caratteristico di A é $p(\lambda) = -\lambda^3 - 7\lambda^2 - 8\lambda - 2$; i coefficienti di p sono tutti negativi e quindi A é definita negativa. In effetti gli autovalori di A sono tutti < 0 , poiché per ogni $\lambda \geq 0$ si avrebbe $-\lambda^3 \leq 0$, $-7\lambda^2 \leq 0$, $-8\lambda \leq 0$ e quindi $p(\lambda) \leq -2 < 0$.

Invece, nel caso $a = -1/2$, il polinomio caratteristico é $p(\lambda) = -\lambda^3 - (13/2)\lambda^2 - 5\lambda$; l'ultimo coefficiente di p é nullo, i precedenti sono tutti < 0 , e quindi A é semidefinita negativa. (In effetti un autovalore é $\lambda_1 = 0$, gli altri due autovalori sono negativi).

Infine, nel caso $a = 0$, il polinomio caratteristico é $p(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 2\lambda + 2$; i coefficienti di p sono diversi da 0 e non sono né tutti dello stesso segno e nemmeno di segno alternato, e quindi A é indefinita. (In effetti due autovalori di A sono negativi ed uno é positivo.)

Allo stesso risultato si giunge con il criterio di Sylvester. Risulta infatti

$$m_1(A) = -2, \quad m_2(A) = 8 - 4 = 4, \quad m_3(A) = 8a - 2 - 2 + 4 + 2 - 4a = 4a + 2.$$

Pertanto, se $a = -1$, allora risulta $m_1(A) = -2 < 0$, $m_2(A) = 4 > 0$, $m_3(A) = -2 < 0$; i minori principali sono quindi a segno alternato e quelli di ordine dispari sono negativi; ne segue che A é definita negativa.

Nel caso invece $a = 0$, risulta $m_1(A) = -2 < 0$, $m_2(A) = 4 > 0$, $m_3(A) = 2 > 0$: esistono dunque due minori principali di ordine dispari che sono discordi e quindi A é indefinita.

Infine, nel caso $a = -1/2$, risulta $m_1(A) = -2 < 0$, $m_2(A) = 4 > 0$, $m_3(A) = 0$: e quindi A é semidefinita negativa.

n. 1 - Dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 3, 0, 2)$ e $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 3, 3)$,

(1) trovare i vettori $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$;

(2) trovare la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ mediante i coefficienti $1/2, -2, -3/5$;

(3) trovare il prodotto scalare dei vettori $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ e dei vettori $\mathbf{u}_2$ ed $\mathbf{u}_3$.

n. 2 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare le matrici trasposte di A e di B , le matrici $2 \cdot A$ e $1/3 \cdot B$, la matrice somma $A + B$, le matrici prodotto $C = AB^T$ e $D = BA^T$.

n. 3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare le matrici trasposte di A e di B , le matrici $-1/2 \cdot A$ e $3 \cdot B$, la matrice somma $A + B$, le matrici prodotto $C = AB^T$ e $D = BA^T$.

n. 4 - Verificare in base alla definizione che gli insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | 2x + y - 3z = 0\}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + 2y - z = 0, 3x - y + 5z = 0\}$$

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 | 3x + y - z + 5t = 0, x - 2y - 2z + t = 0\}$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$ o $\mathbf{R}^4$, mentre non lo sono gli insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y - 3z = 0\}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + 2y - z = 3, 3x - y + 5z = 0\}$$

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 | 3x + y - z + 5t = -1, x - y^2 - 2z + t = 4\}.$$

n. 1 - Trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta affine passante per $\mathbf{a} = (1, 3, 2, -4)^T$ e parallela al vettore $\mathbf{u} = (2, -2, 3, 5)^T$ e del piano affine passante per $\mathbf{a}$ e parallelo al piano generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} = (-1, 3, -4, 0)$.

Trovare le equazioni parametriche e cartesiane

- della retta passante per $\mathbf{a} = (-1, 2, -3, 2)^T$ e $\mathbf{b} = (2, -3, 0, -4)^T$,
- del piano passante per $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c} = (0, 2, -1, 3)^T$.

n. 2 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

trovare la matrice somma $A + 2 \cdot B$, le matrici prodotto $C = AB^T$ e $D = BA^T$.

Trovare la dimensione (e una base) dello spazio generato dalle righe di A , B , $A + 2 \cdot B$, $C = AB^T$ e $D = BA^T$.

n. 3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare la matrice prodotto AB , e la dimensione (e una base) dello spazio generato dalle righe di A , B ed AB .

n. 4 - Trovare (al variare del parametro k) la dimensione (e una base) dello spazio generato dalle righe della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 3 \\ k & k^2 & 3k \\ -2 & 1 - 2k & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 + 2k & k & k^2 \\ -1 & 0 & 2 - k & 2 - 1k \end{pmatrix}$$

n. 5 - Al variare del parametro k , trovare la dimensione (e una base) dello spazio generato dalle righe delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -3 & 2 \\ k & k^2 & 2 & 2k - 1 \\ -3 & -3k & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 6 - 2k & k & k^2 \\ 0 & 0 & k & 2k^2 \end{pmatrix}.$$

n. 1 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & -6 \\ 4 & -7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

trovare le matrici trasposte A^T e B^T , le matrici somma $A + B^T$ e $A^T + B$, le matrici prodotto AB e BA , la caratteristica di A , di B , di $A + B^T$, di $A^T + B$, di AB e BA , indicando in ogni caso una base dello spazio generato dalle righe.

n. 2 - Trovare la caratteristica ed una base degli spazi generati dalle righe delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -4 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

n. 3 - Al variare del parametro α trovare la caratteristica ed una base degli spazi generati dalle righe delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha + 2 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha + 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha^2 & 2\alpha + 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ -2 & 1 - 2\alpha & -2 & \alpha + 2 \\ -1 & 1 - \alpha & -1 & 2\alpha \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

n. 4 - Dire se sono determinati, indeterminati o incompatibili i sistemi

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 1, \\ 3x + 5y - 5z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 1, \\ -2x + 4y - z = -1 \end{cases}$$

(indicando esplicitamente la caratteristica della matrice A dei coefficienti e della matrice completa $\hat{A}$), e trovarne le eventuali soluzioni.

Dire se il sistema lineare omogeneo associato a tali sistemi ha soluzioni non banali, e in tal caso trovare una base dell'insieme delle soluzioni di tale sistema.

n. 5 - Dire per quali valori del parametro α i sistemi lineari

$$\begin{cases} x - y - 2z = 4 \\ 2x - y + \alpha^2 z = \alpha - 6 \\ -3x + 2y - \alpha z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \alpha z = \alpha + 2 \\ y + 2z = \alpha + 1 \\ -x + 2y + 3z = 1 \\ \alpha x + \alpha^2 z = 2\alpha + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + \alpha z - t = 0 \\ 3x + 8y - 3t = 4 \\ \alpha x + (1 + 3\alpha)y + 4\alpha z = \alpha - 2, \end{cases}$$

sono incompatibili, determinati o indeterminati, indicando esplicitamente la caratteristica della matrice A dei coefficienti e della matrice completa $\hat{A}$.

Se il sistema è compatibile, trovarne la o le soluzioni.

Trovare infine le soluzioni del sistema omogeneo associato a tali sistemi; se il sistema ammette soluzioni non banali, indicare esplicitamente una base dell'insieme delle soluzioni.

n. 1 - Dopo aver dato la definizione di trasformazione lineare tra due spazi vettoriali, dire se sono trasformazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ le funzioni che associano ad ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbf{R}^3$ il vettore $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ tale che

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_1x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Se L é una trasformazione lineare verificare che il nucleo di L é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

n. 2 - Dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 3, 0, 2)$ e $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 3, 3)$,

- (1) verificare se tali vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;
- (2) trovare lo spazio U generato da tali vettori e il suo complemento ortogonale, precisando la dimensione di U e di $U^\perp$ ed indicando una base di tali sottospazi;
- (3) trovare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare associata alla matrice A avente per righe tali vettori, e il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare associata alla trasposta di A .
- (4) calcolare il determinante della matrice avente per colonne i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ed $(1, -2, 3, 5)$,
- (5) dire se il vettore $\mathbf{y} = (1, -2, 3, 5)^T$ appartiene allo spazio immagine della trasformazione lineare associata ad L_{A^T} . In caso affermativo, risolvere il sistema lineare $A^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Ripetere l'esercizio per i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, -1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 0, 2, 2)^T$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 3, -2)^T$ ed $\mathbf{y} = (2, 1, -3, 0)^T$.

n. 3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

- a) trovare la loro caratteristica,
- b) trovare la dimensione del nucleo e dell'immagine della trasformazione lineare associata a tali matrici,
- c) dire se tale trasformazione lineare é iniettiva, suriettiva, bigettiva,
- d) trovare il nucleo e l'immagine di L , e il complemento ortogonale a tali sottospazi, indicandone esplicitamente una base.

n. 4 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 2-h \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ 2 & 5 & 1 \\ h-1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) dire per quale valore del parametro h le righe di A sono linearmente dipendenti o indipendenti,
- b) trovare il rango di A al variare del parametro h ,
- c) dire per quale valore del parametro h il sistema lineare nonomogeneo $Ax = y$, con $y = (1, -1, 0)$, é determinato, indeterminato o incompatibile, e trovare le eventuali soluzioni del sistema;
- d) scrivere le equazioni della trasformazione lineare L_A associata alla matrice A ;
- e) trovare il nucleo e l'immagine di tale trasformazione lineare, indicando di tali sottospazi la dimensione ed una base;
- f) trovare il complemento ortogonale al nucleo ed all'immagine di L_A , indicando anche di tali sottospazi la dimensione ed una base.

Ripetere l'esercizio per la matrice B

n. 5 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

- calcolare il determinante di A , di B , di C , di AB e di AC con la regola di Sarrus, con la regola di Laplace e con il metodo di Gauss-Jordan,
- se A , B , C , AB ed AC sono invertibili, calcolarne l'inversa con il metodo di Gauss Jordan e con il metodo della matrice aggiunta,
- dato il vettore $\mathbf{b} = (1, 3, 1)^T$, trovare la caratteristica delle matrici A , B , C , $(A, \mathbf{b})$, $(B, \mathbf{b})$, $(C, \mathbf{b})$, con il metodo degli orlati di Kronecker.
- risolvere i sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo di Cramer e con il metodo di Gauss Jordan.

n. 6 - Usando l'algoritmo di Gauss Jordan e le formule di Laplace, calcolare il determinante delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se tali matrici sono invertibili, trovare le loro inverse usando sia il metodo di Gauss Jordan che il metodo della matrice aggiunta.

Ripetere l'esercizio per le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

n. 7 - Usando il teorema di Cramer, risolvere i sistemi lineari:

$$\begin{cases} x+2y-z = 0 \\ 2x+y+2z = 1, \\ 3x+5y-5z = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-2y+z = 0 \\ 2x-2y+2z = 1, \\ -2x+4y-z = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-2y+z+t = 0 \\ 2x-2y+2z = 1 \\ -2x+4y+t = -1 \\ y+3z = 2 \end{cases}.$$

n. 8 - Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha+2 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha+1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha^2 & 2\alpha+1 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$,

- calcolare il determinante di A e (al variare del parametro α), la caratteristica delle matrici A e $(A, \mathbf{b})$ usando il metodo di Gauss Jordan e il metodo degli orlati di Kronecker,
- risolvere il sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = 0$, indicando esplicitamente la dimensione ed una base dell'insieme delle soluzioni di tale sistema, nonché la dimensione ed una base del complemento ortogonale a tale sottospazio,
- dire per quale valore del parametro α il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è determinato, indeterminato o incompatibile; se il sistema è determinato, trovare l'unica soluzione con il metodo di Cramer.

1 - Trovare gli autovalori, gli autovettori e gli autospazi delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Dire quindi se tali matrici sono diagonalizzabili; in caso affermativo, trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori. e indicare una matrice che le diagonalizza.

2 - Date la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -h & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- trovare gli autovalori di A e i corrispondenti autospazi per $h = -1$, $h = 0$ ed $h = 3$;
- per i suddetti valori di h dire se A é diagonalizzabile e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori di A .

3 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

- trovare gli autovalori e i corrispondenti autovettori di A ;
- dire se A é diagonalizzabile e (in caso affermativo) trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori;
- dire se la forma quadratica associata alla matrice B é definita positiva, definita negativa o indefinita.

4 - Studiare il segno della forma quadratica associata alle matrici quadrate simmetriche:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix}$$

utilizzando il criterio del segno degli autovalori e il criterio di Sylvester.

Verificare che tali matrici sono diagonalizzabili e che gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono a due a due ortogonali; in presenza di autovalori multipli, trovare una base ortonormale di autovettori.

Scrivere infine la forma quadratica associata a tali matrici e la forma canonica di tale forma quadratica.

5 - Date le matrici quadrate simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) trovare gli autovalori di A e dedurre dal loro segno il segno della forma quadratica associata ad A ;
- b) trovare gli autovettori corrispondenti agli autovalori di A e verificare che essi sono a due a due ortogonali;
- c) trovare quindi una matrice ortogonale B che diagonalizza A e la forma canonica della forma quadratica associata ad A ;
- d) trovare il segno delle forme quadratiche associate alle matrici B e C usando alternativamente il criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico e il criterio di Sylvester.

6. - Con il criterio del segno degli autovalori e/o con il criterio di Sylvester, studiare il segno della forma quadratica associata alle matrici quadrate simmetriche:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$