

Lezioni di

ANALISI MATEMATICA 1

Prof. Michele Mininni

Anno accademico 2010-11

Versione provvisoria
Le segnalazioni di errori sono benvenute.
Indirizzo e-mail: mininni@matfin.uniba.it

INDICE

SIMBOLI

- 1. - Simboli logici pag. 5
- 2. - Insiemi ed operazioni tra insiemi pag. 5
- 3. - Prodotto cartesiano di insiemi pag. 7

NUMERI REALI

- 1. - Struttura algebrica di $\mathbf{Q}$ pag. 9
- 2. - Struttura d'ordine di $\mathbf{Q}$ pag. 10
- 3. - Riferimento cartesiano sulla retta pag. 11
- 4. - Numeri irrazionali e numeri reali pag. 12
- 5. - Riferimento cartesiano sulla retta (continua) pag. 13
- 6. - Struttura algebrica e d'ordine di $\mathbf{R}$ pag. 13
- 7. - Parte intera e parte decimale di un numero reale pag. 14
- 8. - Intervalli pag. 16
- 9. - Valore assoluto pag. 16
- 10. - Minorante, maggiorante, minimo, massimo pag. 17
- 11. - Estremo inferiore ed estremo superiore pag. 18

POTENZE, RADICI, LOGARITMI

- 1. - Potenze e Radici. pag. 22
- 2. - Potenze con esponente reale pag. 23
- 3. - Logaritmi pag. 24

FUNZIONI

- 1. - Generalità e primi esempi pag. 26
- 2. - Funzioni reali di una variabile reale pag. 28
- 3. - Funzioni iniettive, suriettive, bigettive. Funzioni invertibili e relativa inversa pag. 29
- 4. - Restrizione e prolungamento pag. 31
- 5. - Funzione composta pag. 32
- 6. - Funzioni monotone pag. 33
- 7. - Funzioni limitate o illimitate pag. 34
- 8. - Alcuni esempi pag. 35
- 9. - Operazioni tra funzioni reali pag. 38
- 10. - Sequenze e successioni pag. 39

FUNZIONI ELEMENTARI

1. - Funzioni lineari affini	pag. 41
2. - Funzioni quadratiche	pag. 42
3. - Funzione potenza n -sima	pag. 44
4. - Funzione radice n -sima aritmetica	pag. 45
5. - Funzione esponenziale in base a	pag. 47
6. - Funzione logaritmo in base a	pag. 47
7. - Funzione potenza di esponente reale	pag. 48

FUNZIONI CIRCOLARI

1. - Le funzioni seno e coseno	pag. 49
2. - Le funzioni tangente e cotangente	pag. 54
3. - Funzioni circolari inverse	pag. 56

INTRODUZIONE AL CONCETTO DI LIMITE

1. - Alcuni esempi introduttivi	pag. 58
2. - Retta ampliata	pag. 62
3. - Limite di una successione	pag. 62
4. - Limite di una funzione per x che tende a $+\infty$	pag. 63
5. - Limite di una funzione per x che tende a $-\infty$	pag. 64
6. - Limite di una funzione per x che tende a un numero x_0	pag. 65
7. - Definizione unificata di limite	pag. 66

PRIMI TEOREMI SUI LIMITI

1. - Il teorema di unicità del limite	pag. 69
2. - Funzioni convergenti, divergenti, continue, discontinue	pag. 70
3. - Prime proprietà dei limiti	pag. 71
4. - Criteri di convergenza e di divergenza	pag. 75

CALCOLO DI LIMITI

1. - Alcune considerazioni preliminari	pag. 77
2. - Operazioni tra limiti	pag. 79
3. - Limite e continuità delle funzioni monotone	pag. 82
4. - Limite delle successioni monotone - Numero di Nepero - Funzione esponenziale	pag. 86
5. - Limiti e continuità delle funzioni composte	pag. 89
6. - Limiti notevoli	pag. 92
7. - Alcuni artifici utili per il calcolo dei limiti	pag. 93
8. - Asintoti verticali, orizzontali, obliqui	pag. 97
9. - Il principio di sostituzione	pag. 99

ALCUNI TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE	pag. 107
---	----------

CALCOLO DIFFERENZIALE

1. - Derivata di una funzione	pag. 112
2. - Punti angolosi e punti cuspidali	pag. 116
3. - Funzioni strettamente crescenti o strettamente decrescenti in un punto	pag. 117
4. - Derivata delle funzioni elementari	pag. 120
5. - Regole di derivazione	pag. 122
6. - Derivata della funzione inversa	pag. 124
7. - Funzione derivata prima. derivate successive	pag. 125

ALCUNE APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

1. - Massimi e minimi relativi: condizioni necessarie	pag. 127
2. - I teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange	pag. 128
3. - Funzioni monotone in un intervallo: condizioni sufficienti	pag. 131
4. - Massimi e minimi relativi: condizioni sufficienti	pag. 132
5. - Funzioni convesse o concave in un intervallo. Punti di flesso	pag. 134
6. - Teorema di De L'Hopital	pag. 137
7. - Polinomi di Taylor	pag. 139
9. - Studi di funzione	pag. 145

L'INTEGRALE DI RIEMANN

1. - Funzioni integrabili secondo Riemann	pag. 149
2. - Alcune classi di funzioni integrabili	pag. 151
3. - Proprietà dell'integrale	pag. 156
4. - Il teorema della media	pag. 157
5. - Il teorema fondamentale del calcolo integrale	pag. 159
6. - Applicazioni	pag. 163

INTEGRALI INDEFINITI

1. - Integrali indefiniti immediati	pag. 170
2. - Metodo di integrazione per scomposizione	pag. 171
3. - Metodo di integrazione per parti	pag. 171
4. - Prima formula d integrazione per sostituzione	pag. 172
5. - Seconda formula d integrazione per sostituzione	pag. 173
6. - Integrale delle funzioni $\log(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$ e delle funzioni circolari inverse	pag. 175
6. - Integrale indefinito delle funzioni razionali	pag. 176
6. - Integrali riconducibili ad integrali di funzioni razionali	pag. 182

NUMERI COMPLESSI

1. - Numeri complessi: forma algebrica pag. 185
2. - Forma trigonometrica di un numero complesso pag. 187
3. - Coniugato di un numero complesso pag. 188
4. - Formule di De Moivre pag. 189
5. - Radici n -sime di un numero complesso pag. 190
6. - Funzione esponenziale complessa pag. 192

SIMBOLI

1 . - Simboli logici

In tutto il seguito adopereremo i seguenti simboli che in linea di massima dovrebbero già essere familiari a tutti.

$=$	é uguale a ...
$\neq$	é diverso da
$\stackrel{def}{=}$	é uguale per definizione
$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste almeno un
$\exists!$	esiste uno ed un solo
$\vee$	e
$\wedge$	o, oppure
$\neg$	non é vero che
$:$	si ha, risulta
$\exists'$ o t.c.	tale che
$\implies$	implica, se allora
$\nRightarrow$	non implica,
$\iff$	equivale, ... se e solo se
$\stackrel{def}{\iff}$	equivale per definizione

Ad esempio, per un numero intero x si ha:

$$x \text{ pari} \stackrel{def}{\iff} x \text{ é multiplo di } 2, \quad x \text{ multiplo di } 6 \implies x \text{ pari}, \quad x \text{ pari} \iff x + 1 \text{ dispari}.$$

■

$\in$	appartiene a ..., é un elemento di ...
$\notin$	non appartiene a ... ,

■

2 . - Insiemi e operazioni tra insiemi

Inoltre adopereremo la consueta **definizione “ingenua” di insieme**, nel senso che diremo **INSIEME** un qualunque raggruppamento di oggetti, di cui é possibile individuare in maniera non ambigua tutti gli elementi

Ad esempio si potrà parlare dell’insieme dei giorni della settimana o dell’insieme dei mesi dell’anno, ma non si può dire “l’insieme degli studenti” o “l’insieme delle persone simpatiche”.

■

Si useranno simboli del tipo $A, B, C, \dots, X, Y$ per gli insiemi e simboli del tipo $a, b, c, \dots, x, y, z$ per gli elementi.

In particolare useremo il simbolo $\emptyset$ per indicare l'**insieme vuoto**, cioè l'insieme che non ha alcun elemento.

■

Per descrivere un insieme adopereremo una **rappresentazione enumerativa**, consistente nel racchiudere tra parentesi graffe l'elenco di tutti gli elementi dell'insieme.

Ad esempio scriveremo

$$\{0\}, \quad \{a, b\}, \quad \{1, 2, x\}, \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \{Lu, Ma, Me, Gi, Ve, Sa, Do\}.$$

■

Ovviamente tale rappresentazione é adatta per insiemi finiti e con pochi elementi. Negli altri casi converrà adoperare la cosiddetta **rappresentazione descrittiva**, in cui l'insieme viene descritto attraverso la proprietà che caratterizza i suoi elementi:

$$\{x|x \text{ soddisfa la seguente proprietà } \dots\}$$

ESEMPLI:

$$\{x|x \text{ é un numero naturale pari}\},$$

$$\{x|x \text{ é un numero primo minore di } 1000\}$$

$$\{x|x \text{ é uno studente iscritto alla Facoltà di Economia dell'Università di Bari alle ore 24 del } \dots\}$$

■

Useremo inoltre i simboli di **inclusione**, $\subseteq$, e di **inclusione stretta o propria**, $\subset$, nel senso che

$$A \subseteq B \stackrel{def}{\iff} \forall x \in A : x \in B, \quad A \subset B \stackrel{def}{\iff} A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Nel primo caso si dice che A é contenuto o incluso in B o che A é una parte di B , nel secondo caso che A é contenuto propriamente in B o che A é una parte propria di B .

■

Useremo il simbolo $\mathcal{P}(X) = \{A|A \subseteq X\}$ per indicare l'insieme delle parti di X .

■

Ricordiamo infine le operazioni tra insiemi e i relativi simboli:

$$A \cup B \stackrel{def}{=} \{x|x \in A \vee x \in B\} \quad \text{unione di due insiemi}$$

$$A \cap B \stackrel{def}{=} \{x|x \in A \wedge x \in B\} \quad \text{intersezione di due insiemi}$$

$$A - B \stackrel{def}{=} \{x|x \in A \wedge x \notin B\} \quad \text{differenza tra due insiemi}$$

■

Due insiemi A e B si dicono **disgiunti** se e solo se $A \cap B = \emptyset$.

■

Proprietà dell'inclusione

- 1) $A \cap B \subseteq \frac{A}{B} \subseteq A \cup B$
- 2) $\emptyset \subseteq A$,
- 3) $A \subseteq A$ (*proprietà riflessiva*)
- 4) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$ (*proprietà transitiva*)
- 5) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff A = B$ (*proprietà antisimmetrica*)

N.B. - Dunque per dimostrare che due insiemi sono uguali basta dimostrare che ciascuno di essi è contenuto nell'altro.

Proprietà dell'unione, intersezione e differenza

- 1) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A - \emptyset = A, \quad \emptyset - A = \emptyset$
- 2) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad A - A = \emptyset$
- 3) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad A - B = B - A \iff A = B$
- 4) $A \subseteq B \implies A \cap B = A \wedge A \cup B = B$
- 5) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \implies A \cup B \subseteq C, \quad C \subseteq A \wedge C \subseteq B \implies C \subseteq A \cap B$
- 6) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*proprietà associativa*)
- 7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$ (*proprietà distributiva*)
- 8) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C), \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C),$ (*Formule di De Morgan*)

■

3 . - Prodotto cartesiano di insiemi

Useremo i simboli

$(a, b) \stackrel{def}{=} \text{coppia ordinata di prima coordinata } a \text{ e seconda coordinata } b.$

$A \times B \stackrel{def}{=} \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ prodotto cartesiano di A e B

■

Esempi ovvi di coppie ordinate sono:

(cognome, nome), (nome, età), (merce acquistata, prezzo), (merce acquistata, quantità acquistata)

Si ha evidentemente che:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

e che

$$(a, b) = (b, a) \iff a = b.$$

■

Ad esempio, se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, allora

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}.$$

In generale, se A e B sono insiemi finiti, anche $A \times B$ é finito e risulta

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B),$$

dove si é posto

$$\text{card}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{numero cardinale di } X = \text{numero degli elementi di un insieme finito } X.$$

Questo spiega il nome “prodotto” dato ad $A \times B$.

■

In particolare, se A é un insieme finito, allora

$$\text{card}(A \times A) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(A) = (\text{card}(A))^2.$$

Questo spiega perché si pone in generale

$$A^2 \stackrel{\text{def}}{=} A \times A = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in A\}.$$

■

I concetti di coppia ordinata e di prodotto cartesiano possono essere estesi in modo da ottenere i concetti di **terna ordinata**, (a_1, a_2, a_3) , di **quaterna ordinata**, (a_1, a_2, a_3, a_4) , ed in generale di **n -pla ordinata** $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, e poi di **prodotto cartesiano** di tre, quattro, n insiemi .

Infine porremo

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

L'INSIEME DEI NUMERI REALI

Introduciamo i seguenti simboli per indicare i principali insiemi di numeri:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ = insieme dei numeri naturali.

$\mathbf{Z}^+ = \{+1, +2, +3, \dots\}$ = insieme dei numeri interi positivi.

$\mathbf{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ = insieme dei numeri interi negativi.

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = \mathbf{Z}^+ \cup \mathbf{Z}^- \cup \{0\}$ = insieme dei numeri interi relativi .

$\mathbf{Q}^+ = \{x | \exists a, b \in \mathbf{N} \text{ tali che } x = +(a/b)\}$ = insieme dei numeri razionali positivi.

$\mathbf{Q}^- = \{x | \exists a, b \in \mathbf{N} \text{ tali che } x = -(a/b)\}$ = insieme dei numeri razionali negativi.

$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \{0\}$ = insieme dei numeri razionali (relativi) .

Identificando il numero naturale $a \in \mathbf{N}$ con il numero intero positivo $+a \in \mathbf{Z}^+$, si ha che $\mathbf{N} = \mathbf{Z}^+ \subset \mathbf{Z}$.

Allo stesso modo identificando il numero intero positivo o negativo $\pm a$ con il numero razionale $\pm(a/1)$, si ha che $\mathbf{Z}^+ \subset \mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Z}^- \subset \mathbf{Q}^-$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

■

1. - Struttura algebrica di $\mathbf{Q}$.

Ricordiamo che in $\mathbf{Q}$ é possibile definire le operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$. Tali operazioni godono delle seguenti proprietà fondamentali:

- (A1) per ogni $x, y \in \mathbf{Q}$ si ha: $x + y = y + x$, (*proprietà commutativa di $+$*);
- (A2) per ogni $x, y, z \in \mathbf{Q}$ si ha: $x + (y + z) = (x + y) + z$, (*proprietà associativa di $+$*);
- (A3) per ogni $x \in \mathbf{Q}$ si ha: $x + 0 = 0 + x = x$, (*si dice che 0 é elemento neutro per l'addizione*);
- (A4) per ogni $x \in \mathbf{Q}$ esiste $x' \in \mathbf{Q}$ tale che $x + x' = x' + x = 0$, (*si dice che x' é l'opposto di x e si denota $-x$*);
- (M1) per ogni $x, y \in \mathbf{Q}$ si ha: $x \cdot y = y \cdot x$, (*proprietà commutativa di $\cdot$*);
- (M2) per ogni $x, y, z \in \mathbf{Q}$ si ha: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, (*proprietà associativa di $\cdot$*);
- (M3) per ogni $x \in \mathbf{Q}$ si ha: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, (*si dice che $1 = +1 = +(1/1)$ é l'elemento neutro per la moltiplicazione*);
- (M4) per ogni $x \neq 0$ esiste x' tale che $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$, (*si dice che x' é il reciproco o simmetrico di x e si denota $1/x$ oppure x^{-1}*);
- (D) per ogni $x, y, z \in \mathbf{Q}$ si ha: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, (*proprietà distributiva*).

Osservazione 1.1 - Si noti che anche in $\mathbf{Z}$ é possibile effettuare le operazioni di addizione e moltiplicazione; tutte le precedenti proprietà continuano a valere in $\mathbf{Z}$, ad eccezione della (M4). Si dice che $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ é un anello commutativo, mentre $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ é un corpo commutativo o campo.

Osservazione 1.2 - Ovviamente l'opposto di 0 é 0 medesimo, l'opposto di $+(a/b)$ é $-(a/b)$ e viceversa; ne segue che

$$(1.1) \quad x \in \mathbf{Q}^+ \iff -x \in \mathbf{Q}^-, \quad x \in \mathbf{Q}^- \iff -x \in \mathbf{Q}^+.$$

Analogamente il reciproco di 1 é 1 medesimo, il reciproco di $+(a/b)$ é $+(b/a)$ e il reciproco di $-(a/b)$ é $-(b/a)$, e quindi

$$(1.2) \quad x \in \mathbf{Q}^+ \iff x^{-1} \in \mathbf{Q}^+, \quad x \in \mathbf{Q}^- \iff x^{-1} \in \mathbf{Q}^-.$$

Osserviamo infine che

$$(1.3) \quad x, y \in \mathbf{Q}^+ \implies x + y \in \mathbf{Q}^+, \quad x \cdot y \in \mathbf{Q}^+.$$

Osservazione 1.3 - Dalle proprietà fondamentali, (A1-A4), (M1-M4) e (D), si deducono facilmente le seguenti ulteriori proprietà:

- a) $-(-x) = x, \quad 1/(1/x) = x,$
- b) $-(x+y) = (-x) + (-y), \quad 1/(xy) = (1/x)(1/y)$
- c) $xy = 0 \iff x = 0 \text{ oppure } y = 0$
- d) $(-x)y = x(-y) = -xy, \quad (-x)(-y) = xy$

Osservazione 1.4 - In $\mathbf{Q}$ é possibile definire anche le operazioni di *sottrazione* e di *divisione*, ponendo

$$\begin{aligned} x - y &= x + (-y) && \text{per ogni } x, y \in \mathbf{Q}, \\ x/y &= x \cdot (y^{-1}) && \text{per ogni } x, y \in \mathbf{Q}, y \neq 0 \end{aligned}$$

Si ha allora che: $a + x = b \iff x = b - a,$ e $cx = b \iff x = b/c,$ (purché ovviamente sia $c \neq 0$).

2. - Struttura d'ordine di $\mathbf{Q}$.

Due numeri razionali x ed y , oltre che sommati e moltiplicati, possono anche essere confrontati; diremo infatti che $x < y$ o equivalentemente che $y > x$ se e solo se risulta $y - x \in \mathbf{Q}^+.$

Si ha allora che:

- (2.1) $x > 0 \iff x \in \mathbf{Q}^+, \quad x < 0 \iff -x \in \mathbf{Q}^+ \iff x \in \mathbf{Q}^-;$
- (2.2) $x < y \iff x - y \in \mathbf{Q}^-;$
- (2.3) $x < y, \quad y < z \implies x < z, \quad (\text{proprietà transitiva});$
- (2.4) $x, y \in \mathbf{Q} \implies x < y \text{ oppure } y < x \text{ oppure } x = y, \quad (\text{proprietà di tricotomia});$
- (2.5) $x < y \implies a + x < a + y$ per ogni $a \in \mathbf{Q}, \quad (\text{proprietà di compatibilità di } < \text{ con } +);$
- (2.6) $x < y \implies a \cdot x < a \cdot y$ per ogni $a \in \mathbf{Q}^+, \quad (\text{proprietà di compatibilità di } < \text{ con } \cdot).$

Infatti la (2.1) é ovvia. La (2.2) discende dalla (1.1) e dal fatto che $x - y$ é l'opposto di $y - x$.

La (2.3) consegue dalla (1.3); si ha infatti

$$x < y, \quad y < z \implies y - x \in \mathbf{Q}^+, \quad z - y \in \mathbf{Q}^+ \implies z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbf{Q}^+ \implies x < z.$$

La (2.4) deriva dal fatto che per ogni coppia x, y di numeri razionali risulta $y - x = 0$ oppure $y - x \in \mathbf{Q}^+$ oppure $y - x \in \mathbf{Q}^-.$

La (2.5) deriva dal fatto che se $x < y$ allora si ha $(a + y) - (a + x) = y - x \in \mathbf{Q}^+$ e quindi $a + x < a + y$.

Infine la (2.6) discende dalla (1.3), poiché per ogni $a > 0$ risulta:

$$x < y \implies y - x \in \mathbf{Q}^+ \implies a \cdot y - a \cdot x = a \cdot (y - x) \in \mathbf{Q}^+ \implies a \cdot x < a \cdot y.$$

Osservazione 2.1 - Se poniamo

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \quad \text{oppure} \quad x < y,$$

allora si vede immediatamente che la relazione $\leq$ soddisfa le seguenti proprietà fondamentali:

- (O1) $x \leq x$ per ogni $x \in \mathbf{Q}$, (*proprietà riflessiva*);
- (O2) $x \leq y, \quad y \leq z \implies x \leq z$, (*proprietà transitiva*);
- (O3) $x \leq y, \quad y \leq x \implies x = y$, (*proprietà antisimmetrica*);
- (O4) $x, y \in \mathbf{Q} \implies x \leq y$ oppure $y \leq x$ (*proprietà di dicotomia*);
- (O5) $x \leq y \implies a + x \leq a + y$ per ogni $a \in \mathbf{Q}$, (*proprietà di compatibilità di $\leq$ con $+$*);
- (O6) $x \leq y \implies a \cdot x \leq a \cdot y$ per ogni $a \geq 0$, (*proprietà di compatibilità di $\leq$ con $\cdot$*).

Per esprimere che $\leq$ soddisfa le proprietà (O1-O6) si dice che $\leq$ è una relazione di totale ordine compatibile con le operazioni $+$ e $\cdot$.

3 . - Riferimento cartesiano sulla retta.

Consideriamo una retta r e fissiamo su di essa un punto O (detto punto *origine*) ed un punto U (detto punto *unità*). Il punto O divide la retta in due semirette; la semiretta di origine O che contiene U dicesi la *semiretta positiva*, l'altra dicesi *semiretta negativa*.

Ad ogni numero intero relativo possiamo associare uno ed un solo punto della retta nella maniera seguente.

Infatti, basta associare al numero 0 il punto origine O e, per ogni $n \in \mathbf{N}$, associamo al numero intero positivo $+n$ il punto P della semiretta positiva tale che il segmento OP abbia lunghezza n rispetto al segmento unitario OU e al numero intero negativo $-n$ associamo il punto P della semiretta negativa tale che il segmento OP abbia lunghezza n rispetto al segmento unitario OU .

Questo procedimento può essere esteso ai numeri razionali, nel senso che se n, m sono numeri naturali allora al numero razionale positivo $+(n/m)$ associamo il punto P della semiretta positiva ottenuto come segue:

- (1) si divide il segmento unitario OU in m parti uguali e si considera come unità di misura la m -sima parte del segmento OU ;
- (2) si cerca il punto P della semiretta positiva tale che la lunghezza del segmento OP rispetto alla nuova unità di misura sia n .

In altri termini al numero razionale positivo $+(n/m)$ si associa il punto P della semiretta positiva tale che la misura di OP rispetto al segmento unitario OU sia n/m .

Analogamente al numero razionale negativo $-(n/m)$ si associa il punto P della semiretta negativa, tale che la misura di OP rispetto al segmento unitario OU sia n/m .

In questo modo abbiamo associato ad ogni numero razionale uno ed un solo punto della retta r .

A questo punto ci chiediamo se in questa maniera abbiamo esaurito tutti i punti della retta, cioè se ogni punto della retta è associato ad un numero razionale.

Ebbene la risposta a questa domanda è negativa. Sussiste infatti il seguente:

Teorema di Ippaso di Metaponto (V sec. A.C.) -. *Non esiste $x \in \mathbf{Q}^+$ tale che $x^2 = 2$.*

Dim. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa e quindi che esista $x \in \mathbf{Q}^+$ tale che $x^2 = 2$ e siano a, b due numeri naturali primi tra loro tali che $x = +(a/b)$.

Ne segue che $a^2/b^2 = 2$ e quindi che $a^2 = 2b^2$; ne consegue che a^2 è pari, e quindi che a è un numero pari. Sia $c \in \mathbf{N}$ tale che $a = 2c$; sarà allora $2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$ e quindi $b^2 = 2c^2$; pertanto anche b^2 è un numero pari, e quindi b stesso è pari.

In definitiva a e b sono entrambi pari, mentre avevamo supposto che erano primi tra loro. L'aver supposto l'esistenza di $x \in \mathbf{Q}^+$ tale che $x^2 = 2$ ci ha portato ad una contraddizione, e quindi il teorema è dimostrato.

Del teorema di Ippaso si può dare una importantissima interpretazione geometrica.

Infatti, se consideriamo un quadrato Q , allora per il teorema di Pitagora si deve avere che il quadrato costruito sulla diagonale é equivalente al doppio del quadrato costruito sul lato. Il fatto che non esistano $a, b \in \mathbf{N}$ tali che $a^2 = 2b^2$ significa che non é possibile trovare un segmento unitario con cui misurare sia il lato che la diagonale di Q , cioè che la diagonale e il lato di Q sono **incommensurabili**.

Questo fatto comporta che, se su una retta r si fissano un punto origine O ed un punto unitario U , e si costruisce il quadrato di lato OU e poi la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio uguale alla diagonale, allora il punto P di intersezione di r con $\mathcal{C}$ non può corrispondere a nessun numero razionale.

4 . - Numeri irrazionali e numeri reali

Pertanto sulla retta r esistono punti che non corrispondono a nessun numero razionale. Sorge allora naturale l'esigenza di estendere il campo dei numeri razionali, introducendo ulteriori numeri a cui associare i punti della retta che non corrispondono ai numeri razionali.

Per comprendere come trovare questi ulteriori numeri, é opportuno utilizzare la rappresentazione decimale dei numeri razionali.

Infatti, se chiamiamo **cifre decimali** gli elementi dell'insieme $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, allora un qualunque numero intero positivo (negativo) può essere rappresentato dal segno $+$ ($-$) seguito da una sequenza finita di cifre decimali.

Naturalmente, in tale sequenza l'ordine é fondamentale; ad esempio $+235$ significa $+(2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5)$, mentre $+325$ significa $+(3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5)$.

Un numero razionale positivo (negativo) può essere rappresentato dal segno $+$ ($-$), seguito da un numero intero $m \geq 0$, (rappresentato da una sequenza finita di cifre decimali), dalla virgola (o punto decimale) e da una sequenza finita o infinita di cifre decimali; se le cifre decimali dopo la virgola sono infinite, allora da un certo punto in poi si ripetono in maniera periodica.

Ad esempio:

$$\begin{aligned} +3,25 &\text{ significa } +[3 + 2(1/10) + 5(1/100)], \\ -23,456 &\text{ significa } -[2 \cdot 10 + 3 + 4 \cdot (1/10) + 5 \cdot (1/100) + 6 \cdot (1/1000)], \\ +3,5\overline{47} &\text{ significa } +[3 + 5 \cdot (1/10) + 4 \cdot (1/10^2) + 7 \cdot (1/10^3) + 4 \cdot (1/10^4) + 7 \cdot (1/10^5) + \dots]. \end{aligned}$$

Ora, se vogliamo introdurre dei numeri diversi da quelli razionali, l'idea più semplice é pensare a degli oggetti del tipo

$$+ m, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots \quad \text{oppure} \quad - m, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots ,$$

dove m é un numero intero maggiore o uguale a 0, (rappresentato da una sequenza finita di cifre decimali), e le infinite cifre decimali dopo la virgola, $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$, non si susseguono in maniera periodica.

Tali oggetti diconsi **numeri irrazionali**; i numeri razionali o irrazionali, cioè gli oggetti del tipo

$$+ m, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots \quad \text{oppure} \quad - m, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots ,$$

dove $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ e $c_1, c_2, c_3, c_4 \dots$ sono infinite cifre decimali che sono nulle da un certo punto in poi, oppure si susseguono in maniera periodica o non periodica, diconsi **numeri reali**.

I numeri reali contrassegnati dal segno $+$ diconsi numeri reali positivi, quelli contrassegnati dal segno $-$ diconsi numeri reali negativi. Indicheremo con i simboli $\mathbf{R}^+$ ed $\mathbf{R}^-$ rispettivamente l'insieme dei numeri reali positivi e l'insieme dei numeri reali negativi.

L'insieme dei numeri reali é $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^- \cup \{0\}$.

5 . - Riferimento cartesiano sulla retta (continua).

Consideriamo una retta r e fissiamo su di essa un punto origine O ed un punto unità U ; abbiamo visto che ad ogni numero razionale positivo (negativo) può essere associato un punto P della semiretta positiva (negativa) e che esistono punti della semiretta positiva (negativa) che non corrispondono a nessun numero razionale.

Allora si vede che ad ognuno di tali punti P può essere associato un numero irrazionale positivo $+x$, (negativo $-x$), cioè un numero rappresentato da infinite cifre decimali che si susseguono senza alcuna periodicità. Tale numero rappresenta la lunghezza del segmento orientato OP rispetto al segmento unitario OU .

Viceversa, utilizzando uno dei postulati della geometria euclidea, (precisamente il postulato di continuità della retta), si può dimostrare che ad ogni numero irrazionale positivo, (negativo), può essere associato uno ed un solo punto della semiretta positiva (negativa).

In definitiva ad ogni numero reale può essere associato uno ed un solo punto della retta r e ad ogni punto P della retta r può essere associato uno ed un solo numero reale; tale numero reale rappresenta la lunghezza del segmento orientato OP rispetto al segmento unitario OU e dicesi **l'ascissa** del punto P .

Ovviamente il punto della retta che corrisponde a un qualunque numero reale, (e viceversa il numero reale che corrisponde ad un qualunque punto della retta), dipendono strettamente dalla scelta iniziale dei punti O ed U . Cambiando il punto O e/o il punto U , cambierà il punto corrispondente ad un qualunque numero reale x , (cioè il punto di ascissa x), e viceversa cambierà l'ascissa di un qualunque punto della retta r .

La coppia di punti (O, U) dicesi **riferimento cartesiano sulla retta**; per ogni punto P di r il numero reale che misura il segmento orientato OP rispetto al segmento unitario OU dicesi **l'ascissa** del punto P nel riferimento cartesiano (O, U) .

6 . - Struttura algebrica e d'ordine di $\mathbf{R}$.

All'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali possono essere estese le operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$ e si dimostra che anche per $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ sussistono le proprietà fondamentali (A1-A4), (M1-M4) e (D) già viste per $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, e quindi si possono estendere ad $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^+$ ed $\mathbf{R}^-$ le proprietà viste nei paragrafi precedenti per $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^+$ ed $\mathbf{Q}^-$.

In particolare la somma e il prodotto di due elementi di $\mathbf{R}^+$ appartengono ad $\mathbf{R}^+$.

Infine è possibile estendere ad $\mathbf{R}$ il concetto di ordinamento: infatti per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si pone

$$\begin{aligned} x < y &\stackrel{def}{\iff} y - x \in \mathbf{R}^+, \\ x \leq y &\stackrel{def}{\iff} x < y \text{ oppure } x = y \iff y - x \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}. \end{aligned}$$

E' allora possibile estendere al confronto tra numeri reali le proprietà già viste per il confronto tra numeri razionali; in particolare si possono estendere ad $(\mathbf{R}, \leq)$ le proprietà (O1-O6).

A queste proprietà si aggiunge però una ulteriore proprietà fondamentale, (la proprietà di completezza), che è tipica dell'insieme $\mathbf{R}$. A tal fine è opportuno premettere le seguenti definizioni.

Definizione 6.1. Se A e B sono due parti non vuote dell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali, si dice che A e B sono **insiemi separati** se per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ risulta $a \leq b$.

Dei due insiemi A e B , si dice che A è la parte sottostante e B è la parte sovrastante.

Se (fissata una retta r) identifichiamo un qualunque numero reale x con il punto di ascissa x rispetto ad un qualunque riferimento cartesiano, allora A e B sono separati se e solo se ogni punto di A precede tutti i punti di B .

Definizione 6.2. Se A e B sono insiemi separati di numeri reali, dicesi **elemento separatore** tra gli insiemi A e B un qualunque numero reale x tale che per ogni $a \in A$, e per ogni $b \in B$ si ha $a \leq x \leq b$.

Il significato geometrico di elemento separatore é evidente: x é un elemento separatore tra A e B se il punto di ascissa x rispetto ad un qualunque riferimento cartesiano é compreso tra i punti di A e i punti di B .

Si dimostra allora che per l'insieme dei numeri reali sussiste la seguente:

Proprietá di completezza. *Tra due insiemi separati A e B di numeri reali esiste sempre almeno un elemento separatore.*

Definizione 6.3. *Se A e B sono due parti dell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali, si dice che A e B sono **insiemi contigui o adiacenti** se sono separati ed hanno un solo elemento separatore.*

■

Osservazione 6.4 - La proprietá di completezza é davvero di importanza fondamentale; essa (e il connesso concetto di coppia di insiemi contigui) verrá adoperata innumerevoli volte nel seguito.

Ad esempio da essa discende che esiste $x \in \mathbf{R}^+$ tale che $x^2 = 2$.

Infatti, posto $A = \{a \in \mathbf{R}^+ | a^2 < 2\}$, e $B = \{b \in \mathbf{R}^+ | b^2 > 2\}$, si prova facilmente che:

- (1) A e B sono non vuoti,
- (2) A e B sono separati,
- (3) $a \in A$ (rispett. $b \in B$), $\implies \exists \epsilon > 0$ tale che $a + \epsilon \in A$ (rispett. $b - \epsilon \in B$).

Ne segue che gli insiemi A e B hanno un elemento separatore x , e per la (3) si ha che $x \notin A$ e $x \notin B$; pertanto sará $x^2 = 2$.

N.B.: si noti che implicitamente si é provato che A e B sono contigui.

■

Osservazione 6.5 - Adattando il ragionamento precedente, possiamo vedere facilmente che la proprietá di completezza non può valere in $\mathbf{Q}$ e quindi é caratteristica di $\mathbf{R}$.

Infatti, posto $A = \{a \in \mathbf{Q}^+ | a^2 < 2\}$, e $B = \{b \in \mathbf{Q}^+ | b^2 > 2\}$, si prova ancora che sono soddisfatte le proprietá (1), (2) e (3); se ci fosse un separatore x in $\mathbf{Q}$ tra A e B , ragionando come prima, si avrebbe che esiste $x \in \mathbf{Q}^+$ tale che $x^2 = 2$, contraddicendo il teorema di Ippaso.

■

7 . - Parte intera e parte decimale di un numero reale

Dalla definizione di numero reale si deduce immediatamente che

Proposizione 7.1. *Per ogni numero reale x esiste uno ed un solo numero intero $k \in \mathbf{Z}$ tale che*

$$k \leq x < k + 1.$$

*Tale numero intero dicesi la **parte intera di x** e viene denotata con il simbolo $INT(x)$.*

*Dicesi invece **parte decimale** di x il numero reale $DEC(x) = x - INT(x)$.*

Pertanto per definizione risulta

$$INT(x) \leq x < INT(x) + 1, \quad 0 \leq DEC(x) < 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

Ad esempio, se $x = +23,5634\dots$, allora si ha

$$+23 < x < +24 \text{ e quindi } INT(x) = +23 \text{ e } DEC(x) = x - INT(x) = +0,5634\dots$$

Invece, se $x = -23,4765\dots$, allora é $-24 < x < -23$, e quindi

$$INT(x) = -24 \text{ e } DEC(x) = x - INT(x) = +24 - 23,4765\dots = +0,5234\dots$$

In generale, se $+m, c_1c_2c_3c_4 \dots \in \mathbf{R}^+$, allora si ha $+m \leq x < +m+1$ e quindi

$$INT(x) = +m \text{ e } DEC(x) = x - INT(x) = +0, c_1c_2c_3c_4 \dots$$

Invece, se $-m, c_1c_2c_3c_4 \dots \in \mathbf{R}^-$, allora si ha $-(m+1) \leq x < -m$ e quindi

$$INT(x) = -(m+1) \text{ e } DEC(x) = x - INT(x) = 1 - 0, c_1c_2c_3c_4 \dots$$

■

Utilizzando il concetto di parte intera di un numero reale si ha che

Proposizione 7.2 -. *Per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ esistono $\underline{x}_n, \bar{x}_n \in \mathbf{Q}$ tali che*

$$\underline{x}_n \leq x < \bar{x}_n \quad \text{e} \quad \bar{x}_n - \underline{x}_n = 1/10^n.$$

Basta infatti porre

$$\underline{x}_n = (INT(x \cdot 10^n))/10^n, \quad \bar{x}_n = (INT(x \cdot 10^n + 1))/10^n.$$

Il numero razionale $\underline{x}_n$, (rispett. $\bar{x}_n$), dicesi il valore troncato per difetto (rispett. per eccesso) di x con n cifre decimali.

Ad esempio i valori troncati per difetto e per eccesso di $x = +23,5634\dots$ con tre cifre decimali sono

$$\begin{aligned} \underline{x}_3 &= (INT(x \cdot 1000))/1000 = (INT(+23563,4\dots))/1000 = +(23563/1000) = +23,563 \\ \bar{x}_3 &= (INT(x \cdot 1000 + 1))/1000 = (INT(1 + 23563,4\dots))/1000 = +(23564/1000) = +23,564, \end{aligned}$$

e risulta $\underline{x}_3 = +23,563 < x < +23,564 = \bar{x}_3$, e $\bar{x}_3 - \underline{x}_3 = +0,001 = 1/1000$.

Analogamente i valori troncati per difetto e per eccesso di $x = -25,345624\dots$ con due cifre decimali sono

$$\begin{aligned} \underline{x}_2 &= (INT(x \cdot 100))/100 = (INT(-2534,5624\dots))/100 = -(2535/100) = -25,35 \\ \bar{x}_2 &= (INT(x \cdot 100 + 1))/100 = (INT(1 - 2534,5624\dots))/100 = -(2534/100) = -25,34, \end{aligned}$$

e risulta $\underline{x}_2 = -25,35 < x < -25,34 = \bar{x}_2$, ed $\bar{x}_2 - \underline{x}_2 = +0,01 = 1/100$.

Ovviamente i concetti di valori troncati per difetto e per eccesso sono molto familiari ed intervengono frequentemente nella vita di tutti i giorni, insieme con il concetto di **valore arrotondato ad n cifre decimali**, che é invece dato da $INT(x \cdot 10^n + 1/2)/10^n$.

■

Osserviamo infine che ci si può servire del concetto di valori troncati per difetto e per eccesso di un numero reale per dimostrare la seguente

Proposizione 7.3. *Gli insiemi $\mathbf{Q}$ ed $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ sono densi in $\mathbf{R}$, nel senso che se $a, b \in \mathbf{R}$ ed $a < b$, allora esistono $x \in \mathbf{Q}$ ed $y \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ tali che $a < x < b$ e $a < y < b$.*

Pertanto tra due numeri reali esistono infiniti numeri razionali ed infiniti numeri irrazionali.

Dim. Sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $b - a > 1/10^n$ e sia x il valore troncato per eccesso di a con n cifre decimali; si ha allora che $x \in \mathbf{Q}$ ed $a < x < a + 1/10^n < b$.

D'altra parte, detto ε un numero irrazionale compreso tra 0 ed 1, (ad esempio $\varepsilon = \sqrt{2}/2$), e posto

$$y = \begin{cases} a + 1/10^n & \text{se } a \notin \mathbf{Q}, \\ a + \varepsilon/10^n & \text{se } a \in \mathbf{Q}, \end{cases}$$

si ha che y é un numero irrazionale tale che $a < y < a + 1/10^n < b$.

8 . - Intervalli

Se a, b sono due numeri reali tali che $a < b$ diconsi **intervalli di estremi a e b** gli insiemi:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\} && (\text{intervallo chiuso}) \\]a, b[&= \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\} && (\text{intervallo aperto}) \\ [a, b[&= \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\} && (\text{intervallo semiaperto superiormente}) \\]a, b] &= \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\} && (\text{intervallo semiaperto inferiormente}). \end{aligned}$$

Se su una retta fissiamo un riferimento cartesiano e diciamo rispettivamente A e B i punti di ascissa a e b , allora tali intervalli possono essere interpretati come i segmenti di estremi A e B , rispettivamente compresi gli estremi A e B , esclusi gli estremi A e B , compreso A ed escluso B e viceversa.

Inoltre diconsi **intervalli illimitati** gli insiemi:

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x \in \mathbf{R} | x \geq a\} && (\text{intervallo chiuso illimitato superiormente}) \\]a, +\infty[&= \{x \in \mathbf{R} | x > a\} && (\text{intervallo aperto illimitato superiormente}) \\]-\infty, b] &= \{x \in \mathbf{R} | x \leq b\} && (\text{intervallo chiuso illimitato inferiormente}) \\]-\infty, b[&= \{x \in \mathbf{R} | x < b\} && (\text{intervallo aperto illimitato inferiormente}). \end{aligned}$$

Geometricamente essi rappresentano una delle due semirette aventi per estremo il punto A di ascissa a rispetto ad un assegnato riferimento cartesiano, compreso o escluso l'estremo A di tale semiretta a seconda che l'intervallo sia chiuso o aperto.

Infine osserviamo che talvolta si usa il simbolo $] - \infty, +\infty[$ per indicare l'intera retta reale $\mathbf{R}$.

9 . - Valore assoluto

Ricordiamo che per ogni numero reale x dicesi **valore assoluto** di x il numero reale:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Le principali proprietà del valore assoluto sono le seguenti:

- (1) $|0| = 0$, $|x| > 0$ per ogni $x \neq 0$,
- (2) $|x| = |-x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
- (3) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- (4) $|xy| = |x||y|$,
- (5) $|x| < r \iff -r < x < r$,
- (6) $|x| > r \iff x < -r$ oppure $x > r$,
- (7) $|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$,
- (8) $|x - a| > r \iff x < a - r$ oppure $x > a + r$.

Pertanto l'insieme dei numeri reali x tali che $|x - a| < r$ é l'intervallo $]a - r, a + r[$. In altri termini, l'insieme delle soluzioni della disequazione $|x - a| < r$ é il segmento con centro nel punto di ascissa a e raggio r ; invece l'insieme delle soluzioni della disequazione $|x - a| > r$ é l'insieme dei punti esterni a tale segmento.

■

10 - Minorante, maggiorante, minimo, massimo

Definizione 10.1. Sia X un insieme non vuoto di numeri reali; si dice allora:

- **minorante di X** un qualunque numero reale a tale che $a \leq x$ per ogni $x \in X$;
- **maggiorante di X** un qualunque numero reale b tale che $b \geq x$ per ogni $x \in X$.

Si dice che X é

- **limitato inferiormente** se esiste almeno un minorante di X ,
- **limitato superiormente** se esiste almeno un maggiorante di X ,
- **limitato**, se X é limitato sia inferiormente che superiormente,
- **illimitato inferiormente** se non esiste alcun minorante di X ,
- **illimitato superiormente** se non esiste alcun maggiorante di X .

■

Ad esempio gli intervalli del tipo $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ sono insiemi limitati. Anzi é evidente che un insieme é limitato se e solo esiste un intervallo $[a, b]$ che lo contiene.

Invece gli intervalli del tipo $[a, +\infty[$ ed $]a, +\infty[$ sono insiemi limitati inferiormente ed illimitati superiormente; analogamente gli insiemi del tipo $]-\infty, b]$ ed $]-\infty, b[$ sono esempi di insiemi limitati superiormente ed illimitati inferiormente.

■

Osservazione 10.2 - Si vede facilmente che l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali é illimitato superiormente.

Infatti, supposto per assurdo che $\mathbf{N}$ é limitato superiormente, sia x un maggiorante di $\mathbf{N}$; allora $INT(x) + 1$ sarebbe un numero naturale maggiore di x e questo contraddice l'ipotesi che x é un maggiorante di $\mathbf{N}$.

■

Osservazione 10.3 - Dalla Osservazione precedente segue che gli insiemi $\mathbf{Q}^+$ ed $\mathbf{R}^+$, sono illimitati superiormente, poiché un loro maggiorante sarebbe anche un maggiorante di $\mathbf{N}$.

Invece gli insiemi $\mathbf{Z}^-$, $\mathbf{Q}^-$ e $\mathbf{R}^-$ sono illimitati inferiormente, perché se esistesse un minorante x per uno di tali insiemi, allora $-x$ sarebbe un maggiorante di $\mathbf{N}$.

Infine $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ sono illimitati sia inferiormente che superiormente.

■

Osservazione 10.4 - L'insieme delle potenze di 10 é illimitato superiormente.

Infatti, se cosí non fosse, un maggiorante di tale insieme sarebbe un maggiorante di $\mathbf{N}$, dal momento che ogni numero naturale é compreso tra due successive potenze di 10.

In generale, si dimostra che, per ogni $a > 1$, l'insieme $\{a, a^2, a^3, \dots\}$ delle potenze di a é illimitato superiormente.

■

Osservazione 10.5 - E' evidente che se dell'insieme X esiste un minorante a , allora esistono infiniti minoranti, poiché qualunque numero $a' < a$ é ancora un minorante di X . Analogamente, se di X esiste un maggiorante b , allora ne esistono infiniti, poiché qualunque numero $b' > b$ é un maggiorante di X .

■

Osservazione 10.6 - Se X é limitato inferiormente (rispett. superiormente), e quindi ha infiniti minoranti (rispett. maggioranti), allora al massimo uno di essi appartiene ad X .

Infatti se esistessero due minoranti (maggioranti) a' ed a'' di X che appartengono ad X , allora dovrà essere sia $a' \leq a''$ che $a'' \leq a'$, e quindi $a' = a''$, a causa della proprietà antisimmetrica della relazione $\leq$.

■

Queste considerazioni giustificano la seguente

Definizione 10.7. - *L'unico minorante di X che appartiene ad X , (se esiste), dicesi il più piccolo elemento di X o anche il **minimo di X** e si denota con il simbolo $\min(X)$.*

*Analogamente l'unico maggiorante di X che appartiene ad X , (se esiste), dicesi il più grande elemento di X o anche il **massimo di X** e si denota con il simbolo $\max(X)$.*

Si ha dunque che

$$\begin{aligned} m = \min(X) &\iff m \in X \quad e \quad \forall x \in X : m \leq x \\ m = \max(X) &\iff m \in X \quad e \quad \forall x \in X : m \geq x. \end{aligned}$$

■

Ad esempio, é evidente che $1 = \min \mathbf{N}$ e che per ogni $a, b \in \mathbf{R}$, con $a < b$ si ha:

$$a = \min([a, b]) = \min([a, b]) = \min([a, +\infty[), \quad b = \max([a, b]) = \max(]a, b]) = \max(]-\infty, b]).$$

Inoltre per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha che $INT(x)$ é il più grande numero intero minore o uguale ad x , cioè :

$$INT(x) = \max\{k \in \mathbf{Z} | k \leq x\}.$$

■

Osservazione 10.8 - Si dimostra facilmente che:

- a) se $X \subset \mathbf{R}$ é un insieme finito, allora esistono $\min(X)$ e $\max(X)$;
- b) se X é un insieme non vuoto di numeri naturali, allora esiste $\min(X)$;
- c) se X é un insieme non vuoto e limitato inferiormente (rispettivamente superiormente) di numeri interi relativi, allora esiste $\min(X)$, (rispett. il $\max(X)$).

La dimostrazione viene lasciata per esercizio; osserviamo solo che la proprietà b) viene descritta dicendo che la relazione $\leq$ nell'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali é una relazione di **BUON ordine**.

■

11 . - Estremo inferiore ed estremo superiore

Anche se X é limitato inferiormente, (superiormente), non é detto che esista il minimo, (massimo) di X , cioè che tra gli infiniti minoranti (rispett. maggioranti) di X , ce ne sia uno che appartenga ad X .

Ad esempio, nel caso $X =]a, +\infty[$, si ha che X é limitato inferiormente da a ma non esiste il $\min(X)$, dal momento che:

$$(\star) \quad x \text{ minorante di } X \implies x \leq a \quad \text{e quindi} \quad x \notin X.$$

Infatti se esistesse un minorante x di X tale che $x > a$, si avrebbe $a < (a+x)/2 < x$; pertanto sarebbe $(a+x)/2 \in X$ ed $(a+x)/2 < x$, contro l'ipotesi che x é un minorante di X .

Si noti che la condizione $(\star)$ vale anche nel caso $X =]a, b[$ o $X =]a, b]$, dal momento che un minorante per $]a, b[$ o $]a, b]$ é minorante per $]a, +\infty[$.

In definitiva se X é un intervallo del tipo $]a, +\infty[$, $]a, b[$ o $]a, b]$, allora il $\min(X)$ non esiste, ma l'estremo iniziale a dell'intervallo X é il più grande elemento dell'insieme dei minoranti di X , o più semplicemente il più grande minorante di X .

■

In maniera analoga si prova che, se X é un intervallo del tipo $] - \infty, b[$, $]a, b[$ o $[a, b[$, allora

$$x \text{ maggiorante di } X \implies x \geq b \text{ e quindi } x \notin X;$$

pertanto il $\max(X)$ non esiste, ma l'estremo finale b dell'intervallo X é il piú piccolo elemento dell'insieme dei maggioranti di X , o piú semplicemente il piú piccolo maggiorante di X .

■

Queste considerazioni suggeriscono la seguente

Definizione 11.1. Se $X \subset \mathbf{R}$ é un insieme limitato inferiormente, allora il piú grande minorante di X (se esiste) viene detto **l'estremo inferiore di X** e viene denotato $\inf(X)$.

Se invece X é limitato superiormente, allora il piú piccolo maggiorante di X (se esiste) viene detto **l'estremo superiore di X** e viene denotato $\sup(X)$.

Esempio 1 - Da quanto visto sopra si deduce che per ogni $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, risulta:

$$\begin{aligned} a &= \inf([a, b]) = \inf([a, b]) = \inf([a, +\infty[), \\ b &= \sup([a, b]) = \sup([a, b]) = \sup(]-\infty, b]). \end{aligned}$$

Esempio 2 - Consideriamo l'insieme X dei reciproci dei numeri naturali, cioè

$$X = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\} = \{x \in \mathbf{R}^+ \mid \exists n \in \mathbf{N} \text{ t.c. } x = 1/n\}.$$

Evidentemente si ha $\max(X) = 1$, ma di X non esiste il minimo dal momento che per ogni $x = 1/n \in X$ si ha che $x/2 = 1/(2n) \in X$ ed $x/2 < x$.

D'altra parte si ha $\inf(X) = 0$, dal momento che 0 é un minorante di X e risulta

$$x \text{ minorante di } X \implies x \leq 0.$$

Infatti se esistesse $x > 0$ tale che x é minorante di X , allora sarebbe $0 < x \leq 1/n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi $1/x$ sarebbe un maggiorante dell'insieme N dei numeri naturali.

Esempio 3 - Consideriamo l'insieme

$$Y = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots, (n-1)/n, \dots\} = \{x \in \mathbf{R}^+ \mid \exists n \in \mathbf{N} \text{ t.c. } x = (n-1)/n = 1 - 1/n\} \subset [0, 1[.$$

Evidentemente si ha che $\min(Y) = 0$ e che 1 é un maggiorante di Y ; d'altra parte, si vede facilmente che

$$x \text{ maggiorante di } Y \implies x \geq 1 \text{ e quindi } x \notin Y.$$

Infatti se esistesse $x < 1$ tale che x é maggiorante di Y , allora sarebbe $x \geq 1 - 1/n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi $n \leq 1/(1-x)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, cioè $1/(1-x)$ sarebbe un maggiorante dell'insieme N dei numeri naturali.

Pertanto nessun maggiorante di Y appartiene ad Y ed 1 é il piú piccolo maggiorante di Y ; questo prova che di Y non esiste il massimo e che $\sup(Y) = 1$.

Osservazione 11.2 - E' evidente che se di un insieme $X \subset \mathbf{R}$ esiste il minimo o il massimo, allora risulta

$$\min(X) = \inf(X) \quad \text{o} \quad \max(X) = \sup(X).$$

Infatti $\min(X)$ é un minorante di X ed appartiene ad X , sicché é maggiore o uguale di qualunque minorante di X ; pertanto $\min(X)$ é il piú grande minorante di X , cioè l'estremo inferiore di X . Il discorso é analogo per il $\max(X)$.

Pertanto, per ogni $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ si ha:

$$\begin{aligned} \inf([a, b]) &= \min([a, b]) = a; & \sup([a, b]) &= \max([a, b]) = b \\ \inf([a, +\infty[) &= \min([a, +\infty[) = a; & \sup(]-\infty, b]) &= \max(]-\infty, b]) = b. \end{aligned}$$

Osservazione 11.3 - Dalla proprietà di completezza di $(\mathbf{R}, \leq)$ si deduce immediatamente che:

- a) ogni insieme $X \subset \mathbf{R}$ limitato superiormente ha estremo superiore,
- b) ogni insieme $X \subset \mathbf{R}$ limitato inferiormente ha estremo inferiore.

Infatti, se $X \subset \mathbf{R}$ è limitato superiormente, allora X e l'insieme M dei maggioranti di X sono separati e quindi, per la proprietà di completezza, esiste un elemento separatore tra X ed M . Ebbene tale separatore è proprio l'estremo superiore di X : infatti, esso è un maggiorante per X ed è minore o uguale a tutti gli elementi di M , cioè a tutti i maggioranti di X .

Se X è limitato inferiormente, allora sono separati l'insieme M dei minoranti di X ed X medesimo, e allora (l'unico) elemento separatore tra M ed X è l'estremo inferiore di X .

Osservazione 11.4 - In definitiva, se X è un insieme non vuoto di numeri reali, allora possono presentarsi due alternative:

- (a) X è limitato inferiormente (rispett. superiormente),
- (b) X è illimitato inferiormente (rispett. superiormente).

Nel caso (a), esiste $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che $\alpha = \inf(X)$, (rispett. $\alpha = \sup(X)$). Ne segue che possono presentarsi ancora due alternative:

- (a1) $\inf(X) \in X$, (rispett. $\sup(X) \in X$),
- (a2) $\inf(X) \notin X$, (rispett. $\sup(X) \notin X$).

Nel caso (a1), il minimo di X esiste e coincide con $\inf(X)$, (rispett. il massimo di X esiste e coincide con $\sup(X)$). Nel caso (a2), il minimo di X non esiste e $\inf(X)$ ne è un utile surrogato, (rispett. il massimo di X non esiste e $\sup(X)$ ne è un utile surrogato).

Nel caso (b), non esiste alcun minorante, (maggiorante), di X e quindi non esiste (in $\mathbf{R}$) il minimo (massimo) di X e neppure l'estremo inferiore (superiore) di X : in tal caso si pone:

$$\inf(X) = -\infty, \quad \sup(X) = +\infty.$$

Osservazione 11.5 - In realtà si vede facilmente che le proprietà a) e b) della precedente Osservazione 11.3 sono equivalenti alla proprietà di completezza, (tanto che alcuni autori indicano proprio la a) o la b) come proprietà di completezza).

Infatti, se A e B sono insiemi separati, allora A è limitato superiormente, B è limitato inferiormente, ed anzi tutti gli elementi di B sono maggioranti per A e viceversa gli elementi di A sono minoranti per B .

Ebbene, se supponiamo vera la a), allora esisterà $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che $\alpha = \sup(A)$; ebbene $\alpha = \sup(A)$ è un separatore tra A e B , dal momento che $\sup(A)$ è un maggiorante per A ed è minore o uguale a tutti gli elementi di B , poiché essi sono maggioranti di A .

Analogamente, se supponiamo vera la b), allora esisterà $\beta \in \mathbf{R}$ tale che $\beta = \inf(B)$; ebbene $\beta = \inf(B)$ è un separatore tra A e B , dal momento che è un minorante per B ed è maggiore o uguale a tutti gli elementi di A , poiché essi sono minoranti di B .

Dalle considerazioni fatte sopra si deduce altresì che:

Proposizione 11.6 -. *Se A e B sono insiemi separati di numeri reali allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- a) A e B sono contigui;
- b) $\sup(A) = \inf(B)$;
- c) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$, $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Dim. di $a) \Rightarrow b)$. Si é visto infatti che, se A e B sono insiemi separati, allora l'estremo superiore di A e l'estremo inferiore di B esistono e sono separatori tra A e B . Di conseguenza, se A e B sono contigui, (cioé se hanno un solo elemento separatore), allora deve aversi la $b)$.

Dim. di $b) \Rightarrow c)$. Siano $\alpha = \sup(A) \in \mathbf{R}, \beta = \inf(B) \in \mathbf{R}$ e fissiamo $\varepsilon > 0$.

Allora $\alpha - \varepsilon/2$ é minore di α e quindi non é un maggiorante di A ; analogamente, $\beta + \varepsilon/2$ é maggiore di β e quindi non é un minorante di B . Ne segue che esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che

$$\alpha - \varepsilon/2 < a, \quad \beta + \varepsilon/2 > b;$$

essendo $\alpha = \beta$, ne segue che risulta :

$$b - a < (\beta + \varepsilon/2) - (\alpha - \varepsilon/2) = \beta - \alpha + \varepsilon = \varepsilon,$$

e la $c)$ é provata.

Dim. di $c) \Rightarrow a)$. Supponiamo per assurdo che A e B non siano contigui e quindi che tra A e B esistano due diversi elementi separatori x ed y . Supponiamo per esempio che sia $x < y$ e poniamo $\varepsilon = y - x$; allora, per la $c)$, esistono $a \in A, b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Dal momento che x ed y sono separatori tra A e B , dovrebbe aversi allora $a \leq x < y \leq b$, e quindi $b - a \geq y - x = \varepsilon$, contraddicendo l'ipotesi che $b - a < \varepsilon$.

■

Pertanto se A e B sono insiemi contigui, allora il loro unico separatore é $\sup(A) = \inf(B)$.

Si noti come la $c)$ riesce particolarmente utile, perché consente di dimostrare che due insiemi sono contigui, senza bisogno di ricercare i separatori tra A e B o di calcolare il $\sup(A)$ e l' $\inf(B)$.

POTENZE, RADICI, LOGARITMI

1 . - Potenze e Radici

Ricordiamo che, per ogni $a \in \mathbf{R}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$, dicesi **potenza n -sima di a** il numero reale

$$a^n = \begin{cases} a & \text{se } n = 1, \\ \text{prodotto di } n \text{ fattori uguali ad } a & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Le principali proprietà delle potenze con esponente intero naturale sono le seguenti:

$$(P1) \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$(P2) \quad (a^n)^m = a^{nm},$$

$$(P3) \quad n < m \implies \begin{cases} a^n < a^m & \text{se } a > 1, \\ a^n > a^m & \text{se } a < 1, \end{cases}$$

$$(P4) \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad a^n/b^n = (a/b)^n, \quad 1/a^n = (1/a)^n,$$

$$(P5) \quad 0 \leq a < b \implies a^n < b^n,$$

■

Dalla (P5) e dall'assioma di completezza discende allora il seguente

TEOREMA 1.1 - (sull'esistenza della radice n -sima).

Per ogni $y \in \mathbf{R}^+$ esiste uno ed un solo $x \in \mathbf{R}^+$ tale che $x^n = y$.

Tale numero reale x dicesi **RADICE n -sima ARITMETICA** di y e si denota $\sqrt[n]{y}$.

Dim. L'unicità discende chiaramente dalla (P4).

D'altra parte, fissato $y > 0$ e posto $A = \{a \in \mathbf{R}^+ | a^n < y\}$, e $B = \{b \in \mathbf{R}^+ | b^n > y\}$, si prova che:

(1) A e B sono non vuoti,

(2) A e B sono separati,

(3) $a \in A$ (rispett. $b \in B$), $\implies \exists \epsilon > 0$ tale che $a + \epsilon \in A$ (rispett. $b - \epsilon \in B$).

Ne segue che gli insiemi A e B hanno un elemento separatore x , e per la (3) si ha che $x \notin A$ e $x \notin B$; pertanto sarà $x^n = y$.

N.B.: implicitamente si è provato che A e B sono insiemi contigui e che pertanto risulta

$$\sqrt[n]{y} = \sup A = \inf B = \sup\{a \in \mathbf{R}^+ | a^n < y\} = \inf\{b \in \mathbf{R}^+ | b^n > y\}.$$

■

Osservazione 1.2 - E' opportuno ricordare le principali **proprietà delle radici aritmetiche**

Per ogni $x > 0, y > 0$ e per ogni $n, h \in \mathbf{N}$ si ha:

$$(R1) \quad \sqrt[n]{x^n} = x, \quad (\sqrt[n]{x})^n = x,$$

$$(R2) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[nh]{x^h},$$

$$(R3) \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}, \quad \text{e quindi} \quad \sqrt[n]{1/x} = 1/\sqrt[n]{x}, \quad \sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}.$$

Infatti la (R1) é una riformulazione del concetto di radice n -sima.

La (R2) discende dal fatto che: $a = \sqrt[n]{x} \implies a^n = x \implies x^h = (a^n)^h = a^{nh} \implies \sqrt[nh]{x^h} = a = \sqrt[n]{x}$.

La (R3) consegue dal fatto che:

$$a = \sqrt[n]{x} \wedge b = \sqrt[n]{y} \implies x = a^n \wedge y = b^n \implies xy = a^n b^n = (ab)^n \implies \sqrt[n]{xy} = ab = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}.$$

■

N. B. Se $x \in \mathbf{R}$ ed $y \in \mathbf{R}^+$, allora si ha:

$$\sqrt{x^2 y} = |x| \sqrt{y} \quad \text{e non} \quad \sqrt{x^2 y} = x \sqrt{y},$$

$$x \sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{x^2 y}, & \text{se } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^2 y}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \text{e non} \quad x \sqrt{y} = \sqrt{x^2 y}.$$

■

2 . - Potenze con esponente reale

Vogliamo ora estendere il concetto di potenza di un numero $a > 0$ al caso in cui l'esponente è un numero reale x , e vogliamo dare questa definizione in modo che vengano conservate le proprietà (P1-P4) delle potenze :

$$(P1) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

$$(P2) \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

$$(P3) \quad x < y \implies \begin{cases} a^x < a^y & \text{se } a > 1, \\ a^x > a^y & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$(P4) \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x, \quad a^x / b^x = (a/b)^x, \quad 1/a^x = (1/a)^x.$$

■

Per ogni $a \in \mathbf{R}^+$, dovendo essere $a = a^1 = a^{1+0} = a^1 a^0 = a \cdot a^0$, si deve avere:

$$a^0 \stackrel{def}{=} 1.$$

■

D' altra parte, per ogni $n \in \mathbf{N}$, dovendo essere $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, si deve avere :

$$a^{-n} \stackrel{def}{=} 1/a^n = (1/a)^n.$$

Ad esempio $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$, $(1/2)^{-3} = 2^3 = 8$.

■

Se $r = k/n \in \mathbf{Q}$, con $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, dovendo essere $(a^r)^n = a^{rn} = a^k$, si deve avere:

$$a^r = a^{k/n} \stackrel{def}{=} \sqrt[n]{a^k}.$$

Ad esempio $3^{1/2} = \sqrt{3}$, $2^{3/5} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$, ecc.

■

Se $a > 1$ ed $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, allora, dovendo essere soddisfatta la proprietà (P3), per ogni $r, s \in \mathbf{Q}$, $r < x < s$ si dovrà avere $a^r < a^x < a^s$.

In altre parole, a^x dovrà essere (l'unico) elemento separatore tra gli insiemi

$$A = \{a^r : r \in \mathbf{Q}, r < x\} \quad \text{e} \quad B = \{a^s : s \in \mathbf{Q}, s > x\}.$$

In effetti si dimostra che A e B sono contigui, e quindi possiamo definire a^x come l'unico elemento separatore tra A e B . In altri termini si può porre

$$a^x \stackrel{def}{=} \sup(A) = \sup(\{a^r : r \in \mathbf{Q}, r < x\}) = \inf(B) = \inf(\{a^s : s \in \mathbf{Q}, s > x\}).$$

Nel caso $0 < a < 1$, le diseguaglianze devono essere tutte invertite, e quindi possiamo definire a^x come l'unico elemento separatore tra B ed A , cioè:

$$a^x \stackrel{def}{=} \sup(B) = \sup(\{a^s : s \in \mathbf{Q}, s > x\}) = \inf(A) = \inf(\{a^r : r \in \mathbf{Q}, r < x\}).$$

Ebbene, con le definizioni appena date, si dimostra che per le potenze con esponente reale valgono effettivamente le proprietà (P1 - P4).

■

3 . - Logaritmi

Sia a un numero reale tale che $a > 0$ e $a \neq 1$; allora si dimostra che:

Teorema 3.1 - (sull'esistenza dei logaritmi).

Per ogni $y > 0$ esiste uno ed un solo numero reale $x \in \mathbf{R}$ tale che $a^x = y$.

*Tale numero reale x dicesi **LOGARITMO in base a di y** e si denota $\log_a(y)$.*

(Cenno della dimostrazione). Dalla proprietà (P3) delle potenze si deduce che

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$$

e dunque, fissato $y > 0$, si ha che l'equazione $a^x = y$ ha al massimo una soluzione.

D'altra parte, posto $A = \{x \in \mathbf{R} \mid a^x < y\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R} \mid a^x > y\}$, si dimostra che

- A e B sono non vuoti,
- A e B sono separati; precisamente A è la parte sottostante e B è quella soprastante nel caso $a > 1$, mentre la situazione è invertita nel caso $0 < a < 1$.
- Se x è un elemento separatore tra A e B o tra B ed A , si ha che $x \notin A$ e $x \notin B$ e quindi $a^x = y$.

■

N.B.: implicitamente si è provato che A e B , (rispett. B ed A), sono contigui e $\log_a(y)$ è l'unico elemento separatore tra A e B , (rispett. B ed A); in altri termini si ha:

$$\log_a(y) = \begin{cases} \sup(A) = \inf(B) = \sup(\{x \in \mathbf{R} \mid a^x < y\}) = \inf(\{x \in \mathbf{R} \mid a^x > y\}) & \text{se } a > 1 \\ \sup(B) = \inf(A) = \sup(\{x \in \mathbf{R} \mid a^x > y\}) = \inf(\{x \in \mathbf{R} \mid a^x < y\}) & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

■

Osservazione 3.2 - E' opportuno ricordare le principali **Proprietà dei logaritmi**

- (L1) $a^x = y \iff x = \log_a(y)$, per ogni $x \in \mathbf{R}, y > 0$;
- (L2) $\log_a(a^x) = x$, $a^{\log_a(y)} = y$, per ogni $x \in \mathbf{R}, y > 0$;
- (L3) $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$,
- (L4) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$, $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$,
- (L5) $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$, $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a(x)$, $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$,

In effetti la (L1) é proprio la definizione di logaritmo; la (L2) é una sua riformulazione.

La (L3) deriva dal fatto che $a^0 = 1$ ed $a^1 = a$.

La (L4) deriva dal fatto che posto $u = \log_a(x)$ e $v = \log_a(y)$ si ha $x = a^u, y = a^v$ e quindi

$$x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v} \quad \text{e} \quad x/y = a^u/a^v = a^{u-v}$$

ovvero $\log_a(x \cdot y) = u + v = \log_a(x) + \log_a(y)$, e $\log_a(x/y) = u - v = \log_a(x) - \log_a(y)$.

Infine $\log_a(1/x) = \log_a(1) - \log_a(x) = -\log_a(x)$.

La (L5) deriva dal fatto che posto $\log_a(x) = u$ si ha $a^u = x$ e quindi $x^y = (a^u)^y = a^{yu}$, donde segue che $\log_a(x^y) = yu = y \log_a(x)$.

■

Osservazione 3.3 - Dalla 5) della precedente Osservazione 3.2 é possibile ricavare la seguente proprietá che consente di passare dai logaritmi in una base ai logaritmi in un'altra base :

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Infatti, posto $u = \log_b(x)$ si ha $x = b^u$ e quindi $\log_a(x) = \log_a(b^u) = u \log_a(b)$, donde segue la tesi.

Pertanto basta conoscere (o tabulare) i logaritmi in una base, per conoscere i logaritmi in qualunque base.

Ovviamente una base particolarmente interessante é la base $a = 10$; per ogni $x > 0$ il logaritmo in base 10 di x dicesi logaritmo decimale (o di Briggs) di x e si denota con il simbolo $\text{Log}(x)$.

Esiste però un altro numero reale che, per motivi che saranno chiari in seguito, costituisce una base fondamentale per le potenze e per i logaritmi; si tratta del numero e , detto numero di Nepero, numero irrazionale le cui prime cifre sono 2,71828..... Per ogni $x > 0$ il logaritmo in base e di x dicesi **logaritmo naturale** di x e si denota con il simbolo $\log(x)$ o $\ln(x)$.

■

Osservazione 3.4 - E' molto utile anche una formula per il cambio di base in una potenza:

$$a^x = b^{\log_b(a^x)} = b^{x \log_b(a)}.$$

In particolare verrà usata spesso la relazione

$$a^x = e^{x \log(a)}.$$

FUNZIONI

1. - Generalità e primi esempi

Il concetto di funzione è uno dei concetti fondamentali, se non il più importante, di tutto il corso, perché esso è alla base di tutti gli altri. Si tratta di un concetto che si incontra continuamente nella vita di tutti i giorni ed anche nel linguaggio corrente diciamo per esempio:

- in funzione della risposta che riceverò da quell'amico, deciderò cosa fare,
- la lunghezza di una sbarretta metallica o il volume di un liquido è funzione della sua temperatura,
- il prezzo di un bene è funzione della domanda di quel bene o dell'offerta di quel bene,

e così via.

In tutti i casi si sta descrivendo una situazione in cui sono in gioco due “variabili”, tra cui esiste uno stretto legame di dipendenza.

- La mia decisione, tra un insieme di scelte possibili, dipende dalla risposta che riceverò, in un insieme di risposte possibili.

- Se poniamo un filo metallico su una sorgente termica, ci accorgiamo che il filo si allunga, man mano che la sua temperatura aumenta.

- Il prezzo di un bene dipende dalla domanda di quel bene, cioè dal numero dei potenziali compratori e dalla quantità acquistata da ciascuno di essi: più quel bene è ambito, desiderato dai potenziali compratori, maggiore sarà il suo prezzo.

Nello stesso tempo, il prezzo di un bene, (ad esempio uva da tavola), dipende dall'offerta, cioè dalla quantità prodotta di quel bene. Se la produzione di quest'anno è scarsa rispetto a quella dello scorso anno, il prezzo di vendita quest'anno sarà maggiore di quello dello scorso anno; viceversa, se quest'anno c'è sovrapproduzione rispetto all'anno scorso, sicuramente i produttori dovranno vendere ad un prezzo più basso di quello spuntato lo scorso anno.

■

Nella vita di tutti i giorni ci si può accontentare di dare una descrizione generica e superficiale del rapporto di dipendenza tra le due variabili.

La Matematica richiede invece un atteggiamento molto più rigoroso ed esplicito e d'altra parte anche nella vita di tutti i giorni non ci accontenteremmo di sapere che il prezzo crescerà se (rispetto allo scorso anno) la produzione diminuirà e decrescerà se la produzione aumenterà, e vorremmo invece poter prevedere quale sarà il prezzo effettivo se la produzione di quest'anno sarà di 1000, 1100 o 1200 tonnellate.

Si dà dunque la seguente

Definizione 1.1 -. *Dicesi **funzione**, (o **applicazione**, **trasformazione** o **mappa**, una qualunque legge o procedimento che associa ad ogni elemento x di un insieme non vuoto X uno ed un solo elemento y di un secondo insieme non vuoto Y .*

■

Esempio 1 - *(La schedina del Totocalcio)* Consideriamo la ben nota regola che associa ad ogni partita di calcio il simbolo 1 se la squadra di casa ha vinto, il simbolo 2 se la squadra di casa ha perso, il simbolo $\times$ se la partita è finita con un pareggio.

La schedina vincente del Totocalcio di una determinata domenica può essere vista come la funzione dall'insieme delle partite previste da quella schedina all'insieme $\{1, 2, \times\}$ che associa ad ogni partita il suo esito per la squadra di casa, (vittoria, sconfitta, pareggio).

Ovviamente, se ad ogni partita in schedina si associa il suo risultato, ad es. 0-0, 2-1 o 2-3, si ottiene un'altra funzione.

■

Esempio 2 - (*Il check-in all'aeroporto*). Consideriamo un determinato volo, ad esempio il volo Bari - Roma con partenza alle ore 06,50 e supponiamo che per quel volo non sia ammesso il check-in elettronico. Ne segue che prima della partenza ognuno dei viaggiatori che hanno prenotato quel volo e ne hanno acquistato il biglietto si presenta al check-in, mostra il biglietto e ne riceve la carta di imbarco, dove é indicato il posto che gli é stato assegnato.

Le operazioni di check-in possono quindi essere viste come una funzione, quella che assegna ad ogni viaggiatore, (nell'insieme delle persone che hanno prenotato quel volo), uno ed un solo posto sull'aereo, (rappresentato da una coppia ordinata formata da un numero ed una lettera).

Esempio 3 - (*L'orario ferroviario*). Consideriamo una pagina dell'orario ferroviario ufficiale relativo ad esempio alla tratta Bari-Milano. Si tratta di una tabella in cui in ciascuna riga é riportata una stazione ferroviaria incontrata lungo il viaggio e in ciascuna colonna é rappresentato un treno individuato da un nome, un numero o una sigla.

Sulla prima e sull'ultima riga si legge quindi per ogni treno in servizio tra Bari e Milano rispettivamente l'ora di partenza da Bari e l'ora di arrivo a Milano.

Esse possono essere viste come due funzioni che associano ad ogni treno rispettivamente l'ora di partenza da Bari e l'ora di arrivo a Milano. Si tratta effettivamente di funzioni poiché per ogni treno sono univocamente determinate l'ora prevista per la partenza e l'ora prevista per l'arrivo.

Dalla stessa pagina si può ricavare una terza funzione, quella che associa ad ogni treno la durata del viaggio su quel treno tra Bari e Milano.

Esempio 4 - (*Il codice fiscale*). Consideriamo la regola con cui l'Agenzia delle Entrate assegna, ad ogni persona che lo richieda, il *codice fiscale*, cioè una stringa alfanumerica formata da 16 simboli organizzati come segue:

- le prime tre lettere sono estratte dal cognome, le successive tre lettere sono estratte dal nome, (in genere le prime tre consonanti),
- tali lettere sono seguite da due cifre che indicano l'anno di nascita, una lettera che indica il mese di nascita, altre due cifre per indicare il giorno di nascita e il sesso,
- infine c'è una lettera e tre numeri che rappresentano il comune di nascita ed una lettera finale di controllo.

Si tratta chiaramente di una funzione, perché ad ogni persona viene assegnato uno ed un solo codice fiscale.

■

Osservazione 1.2 - Una funzione può essere immaginata come una macchina utensile in cui entra un qualunque **input** x di X e (sulla base di un programma di lavorazione interno alla macchina) ne esce un unico prodotto o **output** y in Y .

Ad esempio nel caso del check-in o del codice fiscale c'è proprio un computer che riceve come input i dati anagrafici della persona e produce come output la carta d'imbarco o la tessera con il codice fiscale.

■

Osservazione 1.3 - Un'altra maniera di descrivere una funzione é immaginarla come una serie di frecce che congiungono ciascun punto x di X con uno ed un solo punto y di Y ; per questo motivo, X dicesi **insieme di partenza** ed Y dicesi **insieme di arrivo**.

Ovviamente da ogni punto di X parte una ed una sola freccia, ma in un punto di Y possono giungere anche diverse frecce (uscenti da diversi punti di X). Ad esempio, nel caso della schedina vincente del Totocalcio, é normale che ci siano due o più partite in cui la squadra di casa ha vinto (o perso o pareggiato).

■

Osservazione 1.4 - La funzione, cioè la regola che descrive la maniera di associare ad ogni $x \in X$ il corrispondente valore y , viene in genere indicata con una lettera del tipo $f, g, h, \dots$, e per indicare che X è l'insieme di partenza ed Y l'insieme di arrivo si scrive $f : X \longrightarrow Y$.

Se la funzione è indicata con la lettera f , allora l'insieme di partenza viene detto anche **insieme di definizione** o **dominio** di f e viene indicato anche con il simbolo $\text{dom}(f)$.

Inoltre, per ogni x in X , l'unico punto y di Y corrispondente ad x , cioè il punto di arrivo dell'unica freccia uscente da x , dicesi **immagine** di x mediante f o **valore** che la funzione f assume in x o **valore di f in x** e viene indicato con il simbolo $f(x)$.

L'insieme di tutti i punti immagine di f o equivalentemente di tutti i valori assunti da f , (cioè l'insieme di tutti i punti di arrivo delle frecce uscenti dai punti di X), dicesi **insieme immagine di f** o **insieme dei valori di f** e viene indicato con i simboli $\text{Im}(f)$ o $f(X)$ o $\{f(x) : x \in X\}$. Si ha dunque

$$\text{Im}(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) : x \in X\} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ t.c. } y = f(x)\}.$$

Si chiama infine **grafico di f** l'insieme

$$\mathcal{G}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

■

2. - Funzioni reali di una variabile reale

Un caso particolarmente interessante è quello di una funzione in cui sia il generico punto x dell'insieme di partenza che il corrispondente valore $f(x)$ sono numeri reali; siffatte funzioni prendono il nome di **funzioni reali di una variabile reale**.

Questo capita tutte le volte che si sta studiando un fenomeno in cui intervengono due grandezze strettamente legate tra loro, di cui x ed $y = f(x)$ rappresentano le misure (rispetto a determinate unità di misura); ad esempio la quantità prodotta (misurata in Kg, litri, metri cubi, ecc.) e il costo di produzione (misurato in euro o dollari), il tempo (misurato in secondi, ore o giorni) e lo spazio percorso da un oggetto in movimento (misurato in metri o chilometri) o il livello dell'inventario, cioè la quantità di un determinato bene presente in magazzino.

Nel caso di una funzione reale di una variabile reale, in genere ci si limita ad indicare la regola con cui si calcola $f(x)$ a partire dal generico punto x , sottintendendo che l'insieme di arrivo è $\mathbf{R}$ e l'insieme di partenza $\text{dom}(f)$ è l'insieme di tutti i numeri reali per cui si può calcolare $f(x)$, (salvo il caso in cui si voglia indicare esplicitamente come insieme di partenza un particolare sottoinsieme $X \subseteq \mathbf{R}$), .

Ad esempio nel caso delle funzioni descritte dalle leggi:

$$f_1(x) = 2x + 3, \quad f_2(x) = x/(x - 2), \quad f_3(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

si ha chiaramente che $2x + 3$ si può calcolare di ogni $x \in \mathbf{R}$, mentre $x/(x - 2)$ si può calcolare solo se $x \neq 2$; infine $\sqrt{1 - x^2}$ si può calcolare se e solo se risulta $1 - x^2 \geq 0$ e quindi se e solo se $-1 \leq x \leq 1$.

Ne segue che

$$\text{dom}(f_1) = \mathbf{R}, \quad \text{dom}(f_2) = \mathbf{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[, \quad \text{dom}(f_3) = [-1, 1].$$

■

Invece l'insieme immagine $\text{Im}(f)$ di f non è altro che l'insieme degli $y \in \mathbf{R}$ per cui l'equazione $f(x) = y$ ammette soluzione.

Ad esempio risulta:

- $y = 2x + 3 \iff x = (y - 3)/2,$
- $y = x/(x - 2) \iff xy - 2y = x \iff x = 2y/(y - 1)$
- $y = \sqrt{1 - x^2} \iff y \geq 0 \wedge y^2 = 1 - x^2 \iff y \geq 0 \wedge x = \pm\sqrt{1 - y^2},$

e quindi l'equazione $f_1(x) = y$ ha soluzione per ogni $y \in \mathbf{R}$, l'equazione $f_2(x) = y$ ha soluzione se e solo se risulta $y \neq 1$, l'equazione $f_3(x) = y$ ha soluzione se e solo se risulta $y \geq 0 \wedge 1 - y^2 \geq 0$, cioè se e solo se $0 \leq y \leq 1$. Ne segue che risulta:

$$Im(f_1) = \mathbf{R}, \quad Im(f_2) = \mathbf{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[, \quad Im(f_3) = [0, 1].$$

■

Infine il grafico di f , cioè l'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \in dom(f) \wedge y = f(x)\},$$

può essere identificato con l'insieme di tutti i punti del piano le cui coordinate (rispetto ad un assegnato riferimento cartesiano) sono $(x, f(x))$ al variare di x in $dom(f)$. Se $dom(f)$ è un intervallo e i punti di coordinate $(x, f(x))$ variano con "regolarità", il grafico di f sarà una curva piana.

Per ogni punto di tale curva, se (x, y) è la coppia delle sue coordinate (rispetto all'assegnato riferimento cartesiano), allora si ha che $x \in dom(f)$ ed $y = f(x)$. Pertanto $dom(f)$ ed $Im(f)$ sono le proiezioni ortogonali di $\mathcal{G}(f)$ sull'asse x e sull'asse y rispettivamente.

■

Una curva piana è il grafico di una funzione se ogni retta parallela all'asse y interseca la curva al massimo in un punto. Ad esempio una circonferenza non è il grafico di una funzione reale di una variabile reale, perché ci sono infinite rette parallele all'asse y che intersecano la circonferenza in due punti.

Se $\mathcal{C}$ è una curva piana che è grafico di una funzione f , allora $dom(f)$ è l'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ tali che la retta per x parallela all'asse y incontra la curva $\mathcal{C}$ (in un unico punto). Per ogni $x \in dom(f)$ si considera la retta per x parallela all'asse y fino ad intersecare la curva $\mathcal{C}$; l'ordinata del punto di intersezione è $f(x)$.

■

3 . - Funzioni iniettive, suriettive, bigettive. Funzioni invertibili e relativa inversa

Le funzioni $f : X \longrightarrow Y$ possono essere classificate in base alla seguente

Definizione 3.1 -. Si dice che la funzione $f : X \longrightarrow Y$ è :

- *suriettiva* se $Im(f) = Y$, cioè se e solo se per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$,
- *iniettiva* se ad elementi diversi di X corrispondono elementi diversi di Y , cioè se e solo se non esistono $x_1, x_2 \in X$ tali che $x_1 \neq x_2$ ed $f(x_1) = f(x_2)$;
- *bigettiva* se è iniettiva e suriettiva e quindi se e solo se per ogni $y \in Y$ esiste uno ed un solo $x \in X$ tale che $y = f(x)$.

■

Ad esempio, nel caso della schedina vincente del Totocalcio di una determinata domenica si tratta di una funzione che non è iniettiva ed è suriettiva se e solo se quella domenica c'è stata almeno una partita finita con la vittoria della squadra di casa, almeno una partita finita con la sconfitta della squadra di casa ed almeno una partita finita in parità.

L'esempio del codice fiscale rappresenta una funzione iniettiva, (poiché persone diverse hanno codici fiscali diversi), ma non suriettiva. L'esempio del check-in del volo rappresenta una funzione che è iniettiva, (perché a persone diverse vengono assegnati posti diversi), ed è suriettiva se e solo se l'aereo viaggia a pieno carico, sicché tutti i posti sono occupati.

L'esempio dell'orario ferroviario descrive una funzione bigettiva.

■

Se f é iniettiva, allora da ogni punto di X parte una ed una sola freccia ed in ogni punto di $Im(f) \subseteq Y$ giunge una sola freccia, sicché il processo di assegnazione di un $y \in Y$ ad ogni $x \in X$ può essere invertito, nel senso che possiamo considerare il processo inverso di assegnazione ad ogni $y \in Im(f)$ dell'unico $x \in X$ da cui occorre partire per giungere in y .

Queste considerazioni suggeriscono la seguente

Definizione 3.2 -. *Se f é iniettiva, (in particolare bigettiva), si dice che f é **invertibile**; in tal caso, la legge che associa ad ogni $y \in Im(f)$ l'unico $x \in X$ tale che $y = f(x)$ é una nuova funzione, che viene detta la **funzione inversa** di f e viene denotata con il simbolo f^{-1} .*

Ovviamente si ha $dom(f^{-1}) = Im(f)$ ed $Im(f^{-1}) = dom(f)$; inoltre, per ogni $x \in dom(f)$, e per ogni $y \in Im(f)$ si ha chiaramente:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \quad f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Ad esempio, nel caso dell'orario ferroviario la funzione inversa associa ad ogni ora di partenza da Bari di un treno diretto a Milano (o ad ogni ora di arrivo a Milano di un treno partito da Bari) il corrispondente treno. Nel caso del check-in, la funzione inversa associa ad ogni posto occupato sull'aereo il corrispondente viaggiatore e nel caso della funzione codice fiscale la funzione inversa associa ad ogni codice fiscale già assegnato la persona avente quel codice fiscale.

■

Nel caso delle funzioni reali di una variabile reale le precedenti definizioni possono essere facilmente illustrate graficamente; si ha infatti che una funzione reale é:

- ★ suriettiva se e solo se per ogni $y \in \mathbf{R}$ esiste un punto del grafico di ordinata y e quindi se e solo se ogni retta parallela all'asse x interseca il grafico di f almeno in un punto,
- ★ iniettiva se e solo se non esistono due punti distinti del grafico di f che abbiano la stessa ordinata e quindi se e solo se ogni retta parallela all'asse x interseca il grafico di f al massimo in un punto;
- ★ bigettiva se e solo se ogni retta parallela all'asse x interseca il grafico di f in uno ed un solo punto.

L'insieme $Im(f)$ é l'insieme degli $y \in \mathbf{R}$ tali che la retta parallela all'asse x passante per il punto dell'asse y di ordinata y interseca il grafico di f .

Se f é iniettiva, allora f^{-1} é la funzione che associa ad ogni $y \in Im(f)$ l'ascissa dell'(unico) punto di intersezione del grafico di f con la retta parallela all'asse x passante per il punto dell'asse y di ordinata y .

■

Possiamo vedere la stessa cosa da un altro punto di vista e dire che una funzione reale é

- ★ suriettiva se e solo se per ogni $y \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione,
- ★ iniettiva se e solo se per ogni $y \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha al massimo una soluzione ,
- ★ bigettiva se e solo se per ogni $y \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha una ed una sola soluzione.

L'insieme immagine $Im(f)$ di f non é altro che l'insieme degli $y \in \mathbf{R}$ per cui l'equazione $f(x) = y$ ammette soluzione.

Se f é iniettiva, (in particolare bigettiva), allora la funzione inversa di f é la funzione che associa ad ogni $y \in Im(f)$ l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$.

Pertanto, per vedere se una funzione reale é suriettiva, iniettiva, bigettiva e per trovare l'eventuale funzione inversa, si cerca di risolvere la generica equazione $f(x) = y$. Ebbene:

- (1) se esiste $y \in \mathbf{R}$ per cui l'equazione $f(x) = y$ ha almeno due soluzioni, allora f non é iniettiva e quindi non é invertibile;
- (2) se esiste $y \in \mathbf{R}$ per cui l'equazione $f(x) = y$ non ha soluzione, allora f non é suriettiva e l'immagine di f non é altro che l'insieme degli $y \in \mathbf{R}$ per cui l'equazione $f(x) = y$ ammette soluzione;

(3) se per ogni $y \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha una sola soluzione, allora f é bigettiva e la sua inversa é la funzione che associa ad ogni $y \in \mathbf{R}$ l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$;

(4) se per ogni $y \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = y$ non ha soluzione oppure ha una sola soluzione, allora f é iniettiva ma non suriettiva e la sua inversa é la funzione che associa ad ogni $y \in Im(f)$ l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$.

■

Esempio 1 - Per la funzione $f(x) = 2x + 3$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$y = f(x) = 2x + 3 \iff x = (y - 3)/2.$$

Pertanto, l'equazione $y = f(x) = 2x + 3$ ha una ed una sola soluzione $x = (y - 3)/2$ per ogni $y \in \mathbf{R}$ e quindi f é bigettiva e la sua inversa é la funzione f^{-1} che associa ad ogni $y \in \mathbf{R}$ il numero reale $x = (y - 3)/2$.

■

Esempio 2 - Per la funzione $f(x) = 2x/(x - 3)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$f(x) = y \iff 2x/(x - 3) = y \iff 2x = xy - 3y \iff x(y - 2) = 3y.$$

Ne segue l'equazione $f(x) = y$ non ha soluzione se $y = 2$, ha solo la soluzione $x = 3y/(y - 2)$ se $y \neq 2$.

Pertanto, f é iniettiva, ma non suriettiva; l'insieme $Im(f)$ é l'insieme $\mathbf{R} - \{2\}$, la funzione inversa di f é la funzione che associa ad ogni $y \in \mathbf{R} - \{2\}$ il numero reale $x = 3y/(y - 2)$.

■

Esempio 3 - Per la funzione $f(x) = x^2/(2x - 1)$ per ogni $x \in \mathbf{R} - \{1/2\}$ si ha:

$$f(x) = y \iff x^2/(2x - 1) = y \iff x^2 = 2xy - y \iff x^2 - 2yx + y = 0 \iff x = y \pm \sqrt{y^2 - y}.$$

L'equazione $f(x) = y$ ha soluzione se e solo se $y^2 - y \geq 0$, cioè se e solo se $y \leq 0$ oppure $y \geq 1$; inoltre tale equazione ha due soluzioni se $y < 0$ o $y > 1$.

Pertanto f non é iniettiva e nemmeno suriettiva; l'insieme immagine di f é l'insieme $] - \infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

4 . - Restrizione e prolungamento

Definizione 4.1 -. Sia f una funzione di X in Y e sia $A \subset X$; se ci limitiamo ad applicare la regola della funzione f ai soli elementi di A , otteniamo una nuova funzione che prende il nome di **restrizione** di f ad A e viene denotata con il simbolo $f|_A$.

In altri termini $f|_A$ é la funzione di A in Y tale che $f|_A(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Se invece B é un insieme tale che $X \subset B$, allora dicesi **prolungamento** di f a B una qualunque funzione $g : B \longrightarrow Y$ tale che $g|_X = f$, cioè tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

■

Il concetto di restrizione torna utile quando si sta considerando una funzione che non soddisfa una proprietà desiderabile, ed allora si cerca una parte A di X in modo che $f|_A$ la soddisfi.

Consideriamo ad esempio la funzione $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; si ha evidentemente:

$$y = f(x) = x^2 \iff y \geq 0 \wedge x = \pm\sqrt{y}.$$

Pertanto, f non é iniettiva, e quindi non é invertibile; se però consideriamo la restrizione di f all'intervallo $[0, +\infty[$ otteniamo una funzione iniettiva; la sua inversa é la funzione che associa ad ogni $y \in [0, +\infty[$ il numero $x = \sqrt{y}$.

Il concetto di prolungamento torna utile per esempio quando stiamo considerando una funzione reale definita in un intervallo aperto $]a, b[$ e abbiamo interesse a definire la funzione anche negli estremi a e b .

Ovviamente la restrizione di una funzione é unica, ma ci sono infiniti prolungamenti e quindi si tratterá di scegliere il prolungamento che piú soddisfa le nostre aspettative.

■

5 . - Funzione composta

Consideriamo due funzioni f e g che immaginiamo come due macchine utensili e supponiamo di poter mettere tali macchine in serie una dietro l'altra. Allora possiamo considerare l'output $y = f(x)$ prodotto dalla prima funzione f come input per la seconda funzione g ed ottenere l'output corrispondente $z = g(f(x))$; é come se avessimo un'unica macchina in cui entra x ed esce $z = g(f(x))$.

A partire dalle due funzioni f e g abbiamo quindi ottenuto una nuova funzione, quella che associa ad ogni x il valore $z = g(f(x))$; tale funzione viene indicata con il simbolo $g \circ f$ e dicesi **funzione composta** tra f e g , (in questo ordine, prima f e poi g , anche se si scrive prima g e poi f).

Ovviamente si ha che

$$\text{dom}(g \circ f) = \{x \mid x \in \text{dom}(f) \wedge f(x) \in \text{dom}(g)\},$$

e quindi, per poter costruire la funzione composta $g \circ f$, occorre che tale insieme sia non vuoto. In tal caso diremo che f é **componibile** con g .

Ad esempio la funzione $g \circ f$, composta tra la funzione $y = f(x) = 1/(1 - x^2)$ e la funzione $z = g(y) = \sqrt{y}$ é la funzione

$$z = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}};$$

si ha $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 - x^2 \neq 0\} = \mathbf{R} - \{\pm 1\}$, $\text{dom}(g) = [0, +\infty[$, e quindi

$$\begin{aligned} \text{dom}(g \circ f) &= \{x \in \mathbf{R} \mid x \in \text{dom}(f) \wedge f(x) \in \text{dom}(g)\} = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 - x^2 \neq 0 \wedge 1/(1 - x^2) \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbf{R} \mid 1 - x^2 > 0\} =] - 1, 1[. \end{aligned}$$

■

Si noti che in generale si ha $g \circ f \neq f \circ g$, cioé che l'operazione di composizione di due funzioni non gode della proprietà commutativa.

Ad esempio, considerata la funzione $f \circ g$ composta tra la funzione $y = g(x) = \sqrt{x}$ e la funzione $z = f(y) = 1/(1 - y^2)$, si ha che

$$\begin{aligned} \text{dom}(f \circ g) &= \{x \in \mathbf{R} \mid x \in \text{dom}(g) \wedge g(x) \in \text{dom}(f)\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \in \text{dom}(f)\} = \\ &= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq \pm 1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[\neq \text{dom}(g \circ f), \end{aligned}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{1 - (\sqrt{x})^2} = \frac{1}{1 - x} \neq g \circ f(x).$$

Osservazione 5.1 - Se f e g sono funzioni iniettive ed f é componibile con g , allora anche $g \circ f$ é iniettiva e quindi invertibile; risulta inoltre $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Infatti risulta

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \implies g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \implies g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2);$$

inoltre per ogni $z \in \text{Im}(g \circ f)$, $x \in \text{dom}(g \circ f)$ si ha:

$$x = (g \circ f)^{-1}(z) \iff z = g \circ f(x) = g(f(x)) \iff f(x) = g^{-1}(z) \iff x = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z).$$

■

6 . - Funzioni monotone

Le funzioni reali di una variabile reale possono essere ulteriormente classificate in base alla seguente

Definizione 6.1 -. Si dice che una funzione $f : X = \text{dom}(f) \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é

- **crescente** se per ogni $x_1, x_2 \in X$ si ha: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **decescente** se per ogni $x_1, x_2 \in X$ si ha: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **strettamente crescente** se per ogni $x_1, x_2 \in X$ si ha: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
- **strettamente decrescente** se per ogni $x_1, x_2 \in X$ si ha: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Una funzione crescente, decrescente, strettamente crescente o strettamente decrescente dicesi semplicemente **monotona**.

■

Osservazione 6.2 - Ovviamente, una funzione f é crescente, decrescente, strettamente crescente o strettamente decrescente se e solo se $-f$ é rispettivamente decrescente, crescente, strettamente decrescente o strettamente crescente.

Inoltre, se f é strettamente crescente (rispett. strettamente decrescente), allora f é crescente (rispett. decrescente) .

Osservazione 6.3 - E' altresí evidente che f é strettamente crescente, (rispett. strettamente decrescente), se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ risulta:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad (\text{rispett. } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0) .$$

Invece, f é crescente, (rispett. decrescente), se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ risulta:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad (\text{rispett. } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0) .$$

Osservazione 6.4 - Se f é strettamente crescente (rispett. strettamente decrescente), allora f é iniettiva e quindi invertibile; la sua inversa f^{-1} é, al pari di f , strettamente crescente (rispett. strettamente decrescente).

Infatti, se x_1 ed x_2 sono due elementi distinti di $\text{dom}(f)$, allora il rapporto $[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)$ é > 0 o < 0 , a seconda che f sia strettamente crescente o strettamente decrescente; in ogni caso tale rapporto é diverso da 0 e quindi si ha $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Per quanto riguarda la monotonia della funzione inversa f^{-1} , basta dimostrare che per ogni $y_1, y_2 \in \text{Im}(f)$, $y_1 \neq y_2$ si ha :

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} \begin{cases} > 0, & \text{se } f \text{ é strettamente crescente,} \\ < 0, & \text{se } f \text{ é strettamente decrescente.} \end{cases}$$

Infatti tale rapporto é il reciproco di

$$\frac{y_2 - y_1}{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)} = \frac{f(f^{-1}(y_2)) - f(f^{-1}(y_1))}{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)} ,$$

e l'ultimo rapporto é > 0 o < 0 , a seconda che f sia strettamente crescente o strettamente decrescente.

Osservazione 6.5 - Se f e g sono due funzioni reali di una variabile reale, allora si vede facilmente che

- (1) se f e g sono entrambe strettamente crescenti o entrambe strettamente decrescenti, allora $g \circ f$ é strettamente crescente,
- (2) se una delle funzioni f e g é strettamente crescente e l'altra é strettamente decrescente, allora $g \circ f$ é strettamente decrescente.

Infatti per ogni $x_1, x_2 \in \text{dom}(g \circ f)$, $x_1 \neq x_2$ si ha:

$$\frac{g \circ f(x_2) - g \circ f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{g(f(x_2)) - g(f(x_1))}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

e tali rapporti sono entrambi > 0 o entrambi < 0 a seconda che f e g siano strettamente crescenti o strettamente decrescenti, e sono invece uno positivo e l'altro negativo se una delle due funzioni é strettamente crescente e l'altra é strettamente decrescente.

■

7 . - Funzioni limitate o illimitate

Definizione 7.1 -. Si dice che una funzione $f : X = \text{dom}(f) \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é :

- **limitata inferiormente** se e solo se l'insieme $\text{Im}(f)$ é limitato inferiormente cioè se e solo se esiste $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) \geq \alpha$ per ogni $x \in X$;
- **limitata superiormente** se e solo se l'insieme $\text{Im}(f)$ é limitato superiormente cioè se e solo se esiste $\beta \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) \leq \beta$ per ogni $x \in X$;
- **limitata** se e solo se l'insieme $\text{Im}(f)$ é limitato cioè se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ per ogni $x \in X$;
- **illimitata superiormente** se l'insieme $\text{Im}(f)$ é illimitato superiormente e quindi se e solo se per ogni $\beta \in \mathbf{R}$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) > \beta$;
- **illimitata inferiormente** se l'insieme $\text{Im}(f)$ é illimitato inferiormente e quindi se e solo se per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) < \alpha$.

Se f é limitata inferiormente, (rispett. superiormente), dicesi **minorante**, (rispett. **maggiorante**), di f un qualunque minorante, (rispett. **maggiorante**), dell'insieme $\text{Im}(f)$, cioè un qualunque numero reale α tale che $f(x) \geq \alpha$, (rispett. $f(x) \leq \alpha$), per ogni $x \in X$.

Inoltre l'estremo inferiore o superiore di $\text{Im}(f)$, cioè il piú grande minorante o il piú piccolo maggiorante di f , diconsi **estremo inferiore** ed **estremo superiore** di f e vengono denotati con i simboli

$$\inf_{x \in X} f(x) \quad \text{o} \quad \sup_{x \in X} f(x).$$

Se f é illimitata inferiormente o superiormente si pone:

$$\inf_{x \in X} f(x) \stackrel{\text{conv}}{=} -\infty \quad \text{o} \quad \sup_{x \in X} f(x) \stackrel{\text{conv}}{=} +\infty.$$

Infine si dice che f é **dotata di minimo o di massimo** se l'insieme $\text{Im}(f)$ é dotato di minimo o massimo. In tal caso esiste un punto $\underline{x} \in X$, (rispett. $\bar{x} \in X$) tale che

$$f(\underline{x}) = \min(\text{Im}(f)), \quad (\text{rispett. } f(\bar{x}) = \max(\text{Im}(f))),$$

cioé tale che

$$f(x) \geq f(\underline{x}), \quad \text{per ogni } x \in X, \quad (\text{rispett. } f(x) \leq f(\bar{x}), \quad \text{per ogni } x \in X).$$

Si dice che $\underline{x}$, (rispett. $\bar{x}$) é un **punto di minimo**, (rispett. **punto di massimo**) per f , mentre $f(\underline{x})$, (rispett. $f(\bar{x})$), dicesi **valore minimo**, (rispett. **valore massimo**) di f .

Ovviamente il valore minimo (o massimo) di f , (se esiste), é unico, ma, se f non é iniettiva, possono esistere diversi punti di minimo, (o massimo).

■

Osservazione 7.2 - Ricordando che $y = \alpha$ è l'equazione di una retta parallela all'asse x , possiamo illustrare graficamente le precedenti definizioni, nel senso che:

- f è limitata inferiormente, (rispett. superiormente), se e solo se esiste una retta parallela all'asse x che giace sotto (rispett. sopra) il grafico di f ;
- f è limitata se e solo se il grafico di f è contenuto in una striscia parallela all'asse x , limitata da due rette di equazioni $y = \alpha$ ed $y = \beta$;
- f è illimitata inferiormente, (rispett. superiormente), se e solo se non esiste una retta parallela all'asse x che giaccia sotto (rispett. sopra) il grafico di f ;
- f è dotata di minimo, (rispett. massimo), se esiste una retta parallela all'asse x che giace sotto (rispett. sopra) il grafico di f ed interseca tale grafico; le ascisse dei punti di intersezione sono i punti di minimo (rispett. massimo), la corrispondente ordinata è il valore minimo (rispett. massimo) di f .

■

8 . - Alcuni esempi

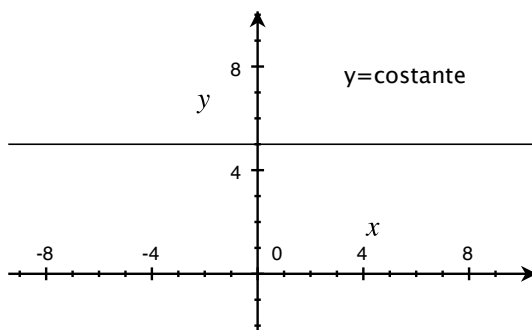
Esempio 1 - (*Funzione costante*) - Consideriamo la funzione $f(x) = c \in \mathbf{R}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Si ha chiaramente: $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$, $\text{Im}(f) = \{c\}$; pertanto f non è iniettiva e nemmeno suriettiva, è limitata inferiormente e superiormente, è dotata di minimo e di massimo ed ogni $x \in \mathbf{R}$ è punto di minimo e punto di massimo per f .

Infine f è sia crescente che decrescente, (non strettamente), dal momento che risulta:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2.$$

Il grafico di f è la retta parallela all'asse x di equazione $y = c$.



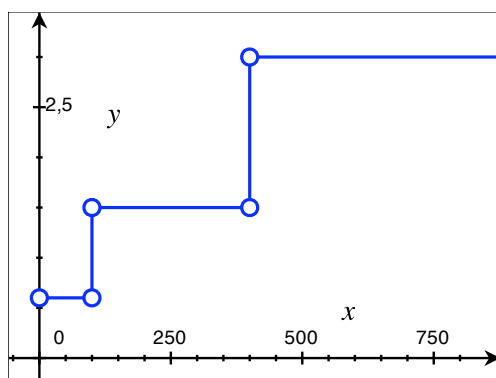
■

Esempio 2 - (*Funzione tariffe postali*) - Consideriamo la seguente funzione che può descrivere ad esempio il costo dell'affrancatura di un plico in funzione del suo peso x :

$$f(x) = \begin{cases} 0,60 \text{ euro} & \text{se } 0 < x \leq 100 \text{ grammi}, \\ 1,50 \text{ euro} & \text{se } 100 \text{ grammi} < x \leq 400 \text{ grammi}, \\ 3,00 \text{ euro} & \text{se } x > 400 \text{ grammi}. \end{cases}$$

Si ha chiaramente: $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^+$, $\text{Im}(f) = \{0,60; 1,50; 3,00\}$; pertanto f non è iniettiva e nemmeno suriettiva, è limitata inferiormente e superiormente, è dotata di minimo e di massimo, ogni $x \in]0, 100]$ è punto di minimo ed ogni $x > 400$ è punto di massimo per f .

Inoltre f è crescente, non strettamente.



Il grafico di f è una curva a scala, unione del segmento di estremi $(0; 0, 60)$ e $(100; 0, 60)$ con il segmento di estremi $(100; 1,50)$ e $(400; 1,50)$ e la semiretta parallela all'asse x di origine $(400; 3)$ orientata positivamente.

■

Esempio 3 - Consideriamo le funzioni $f(x) = x$, e $g(x) = -x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Si ha:

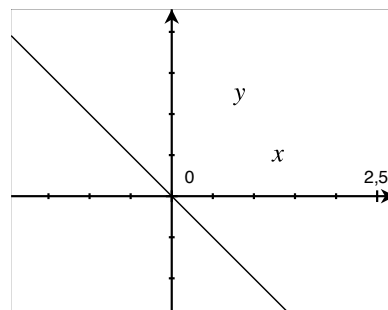
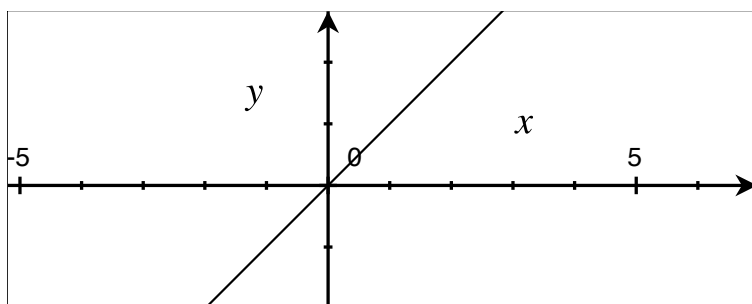
$$y = f(x) = x \iff x = y \quad \text{ed} \quad y = g(x) = -x \iff x = -y.$$

Ne segue che $\mathbf{R} = \text{dom}(f) = \text{dom}(g) = \text{Im}(f) = \text{Im}(g)$, e quindi f e g sono illimitate inferiormente e superiormente; inoltre f e g sono bigettive e risulta $f^{-1} = f$, $g^{-1} = g$.

Si ha infine che f è strettamente crescente e g è strettamente decrescente, poiché:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1 > 0, \quad \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = -1 < 0 \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2.$$

Il grafico di f e di g sono le rette di equazione $y = x$ e $y = -x$ rispettivamente, cioè la bisettrice del primo e terzo quadrante e la bisettrice del secondo e quarto quadrante.



Esempio 4 - (*Funzione valore assoluto*) - Consideriamo la funzione

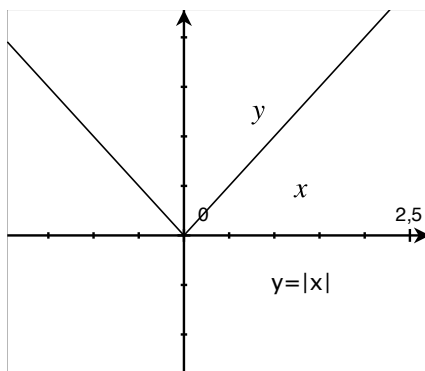
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si ha: $y = f(x) = |x| \iff y \geq 0 \wedge x = \pm y$.

Ne segue che $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$, $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$, che f non è iniettiva, né suriettiva, illimitata superiormente, dotata di minimo. Il valore minimo è 0 e (l'unico) punto di minimo è $\underline{x} = 0$.

Infine f non è crescente, né decrescente in $\mathbf{R}$, ma le restrizioni di f agli intervalli $] -\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$ sono rispettivamente strettamente decrescente e strettamente crescente.

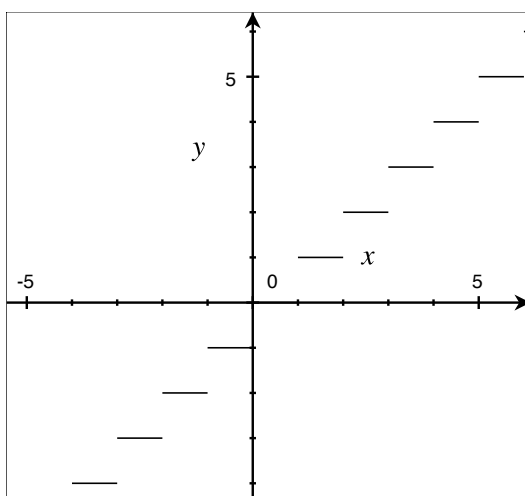
Il grafico di f é l'unione della bisettrice del primo quadrante con la bisettrice del secondo quadrante.



Esempio 5 - (Funzione parte intera) - $f(x) = \text{INT}(x)$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Si ha evidentemente $f(x) = k$ per ogni $x \in [k, k + 1[$ e per ogni $k \in \mathbf{Z}$ e quindi $\text{Im}(f) = \mathbf{Z}$.

Ne segue che f non é iniettiva, non é suriettiva, é illimitata inferiormente e superiormente, é crescente (ma non strettamente crescente)



Esempio 6 - (Funzione parte decimale) - $f(x) = \text{DEC}(x) = x - \text{INT}(x)$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

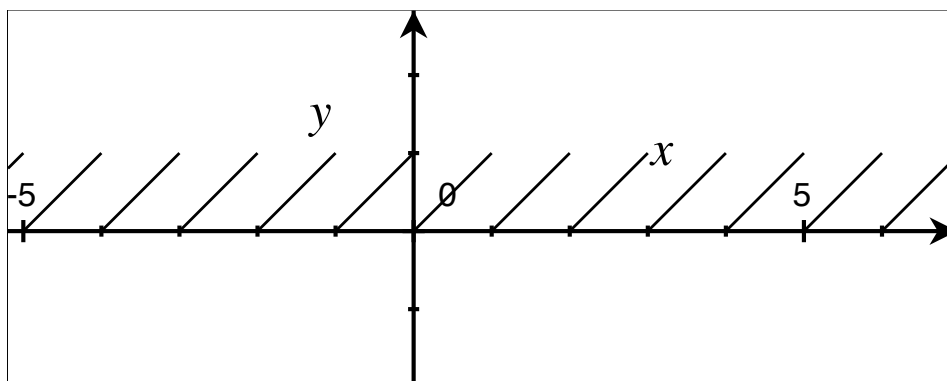
Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $0 \leq f(x) < 1$ ed $f(x + k) = f(x)$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

Ne segue che l'equazione $y = f(x) = \text{DEC}(x) = x - \text{INT}(x)$ non ha soluzioni se $y < 0$ oppure $y \geq 1$ ed ha infinite soluzioni $x = y + k$ con $k \in \mathbf{Z}$, se $0 \leq y < 1$.

Pertanto f non é iniettiva e risulta $\text{Im}(f) = [0, 1[$; ne segue che f non é suriettiva, é limitata (inferiormente e superiormente), é dotata di minimo ma non di massimo. Il valore minimo é 0 e tutti gli elementi di $\mathbf{Z}$ sono punti di minimo; inoltre l'estremo superiore di f é il numero 1.

Infine, f é periodica di periodo 1 e quindi, in $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$, non é crescente, e nemmeno decrescente; invece f é crescente strettamente nell'intervallo $[k, k + 1[$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

Il grafico di f é l'unione degli infiniti segmenti paralleli di estremi i punti $(k, 0)$ (compreso) e $(k + 1, 1)$ (escluso), con $k \in \mathbf{Z}$ arbitrario.



■

9 . - Operazioni tra funzioni reali

Le funzioni reali di una variabile reale, al pari dei numeri reali, possono essere sommate, moltiplicate e divise, nel senso che se f e g sono due funzioni reali di una variabile reale, allora a partire da esse é possibile costruire le funzioni

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Evidentemente si ha che

$$\text{dom}(f + g) = \text{dom}(f \cdot g) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g), \quad \text{dom}(f/g) = \text{dom}(f) \cap \{x \in \text{dom}(g) \mid g(x) \neq 0\}.$$

Ad esempio se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 2x$, allora si ha

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + x^2 - 2x, \quad (f \cdot g)(x) = \sqrt{x}(x^2 - 2x), \quad (f/g)(x) = \sqrt{x}/(x^2 - 2x) = 1/((x-2)\sqrt{x}).$$

ed ovviamente

$$\text{dom}(f + g) = \text{dom}(f \cdot g) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) = [0, +\infty[\cap \mathbf{R} = [0, +\infty[,$$

$$\text{dom}(f/g) = \text{dom}(f) \cap \{x \in \text{dom}(g) \mid g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0 \wedge x^2 - 2x \neq 0\} =]0, 2[\cup]2, +\infty[.$$

■

10 . - Sequenze e Successioni

Capita frequentemente di leggere una lista o elenco ordinato; ad esempio

<i>Lu</i>		<i>Sampdoria</i>
<i>Ma</i>		<i>Juventus</i>
<i>Me</i>		<i>Inter</i>
<i>Gi</i>	oppure	<i>Lazio</i>
<i>Ve</i>		...
<i>Sa</i>		...
<i>Do</i>		<i>Livorno</i>

Si tratta chiaramente di funzioni del tipo

$1 \longrightarrow Lu$		$1 \longrightarrow Juventus$
$2 \longrightarrow Ma$		$2 \longrightarrow Inter$
$3 \longrightarrow Me$		$3 \longrightarrow Genoa$
...	oppure	
...		
...		...
...		$20 \longrightarrow Livorno$

ed infatti sono spesso organizzate nella forma

1	...
2	...
3	...
...	...

Una funzione da un insieme del tipo $\{1, 2, \dots, n\}$ in X dicesi **sequenza** di punti di X .

L'elemento di X corrispondente al numero 1 dicesi primo termine e si indica x_1 , l'elemento di X corrispondente al numero 2 dicesi secondo termine e si indica x_2 , e così via.

L'intera sequenza viene indicata con il simbolo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

■

Una lista o elenco infinito, cioè una funzione da $\mathbf{N}$ in X , dicesi **successione** di elementi di X ; gli elementi corrispondenti ad 1, 2, 3, ... diconsì rispettivamente il primo, secondo, terzo termine, ; in generale l'elemento corrispondente ad n dicesi n -simo termine della successione e viene denotato con il simbolo x_n .

L'intera successione viene indicata con il simbolo

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad \text{oppure} \quad (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \quad \text{oppure} \quad (x_n)_n.$$

L'insieme immagine dicesi **insieme dei termini** della successione e viene denotato con i simboli:

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} \quad \text{oppure} \quad \{x_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

Se $X = \mathbf{R}$, si dice che la successione é una **successione di numeri reali**. Esempi di successioni di numeri reali sono le seguenti:

1	$,$	$\frac{1}{2}$	$,$	$\frac{1}{3}$	$,$	$\dots$	$,$	$\frac{1}{n}$	$,$	$\dots$	denotata anche	$(1/n)_n$
$\frac{1}{2}$	$,$	$\frac{2}{3}$	$,$	$\frac{3}{4}$	$,$	$\dots$	$,$	$\frac{n}{n+1}$	$,$	$\dots$	denotata anche	$(n/(n+1))_n$
1	$,$	$\frac{1}{4}$	$,$	$\frac{1}{9}$	$,$	$\dots$	$,$	$\frac{1}{n^2}$	$,$	$\dots$	denotata anche	$(1/n^2)_n$
a	$,$	a^2	$,$	a^3	$,$	$\dots$	$,$	a^n	$,$	$\dots$	denotata anche	$(a^n)_n$

Una successione di numeri reali $(x_n)_n$ dicesi **limitata o illimitata, inferiormente o superiormente**, se e solo tale é l'insieme dei termini. Analogamente, dicesi **minorante, maggiorante, estremo inferiore ed estremo superiore** della successione $(x_n)_n$ rispettivamente un minorante, un maggiorante, l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme dei termini della successione.

Infine, la successione $(x_n)_n$ é crescente, decrescente, strettamente crescente o strettamente decrescente se e solo se per ogni $n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$, si ha rispettivamente:

$$x_n \leq x_m, \quad x_n \geq x_m, \quad x_n < x_m, \quad x_n > x_m.$$

E' evidente allora che $(x_n)_n$ é crescente, decrescente, strettamente crescente o strettamente decrescente se e solo se per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha rispettivamente:

$$x_n \leq x_{n+1}, \quad x_n \geq x_{n+1}, \quad x_n < x_{n+1}, \quad x_n > x_{n+1}$$

ovvero (nel caso di successioni a termini positivi) se e solo se per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha rispettivamente

$$x_{n+1}/x_n \geq 1, \quad x_{n+1}/x_n \leq 1, \quad x_{n+1}/x_n > 1, \quad x_{n+1}/x_n < 1.$$

■

Ad esempio le successioni $(n/(n+1))_n$ ed $(n^2)_n$ sono strettamente crescenti, perché (come si vede facilmente) il rapporto tra ciascun termine e il precedente é > 1 . Invece le successioni $(1/n)_n$ ed $(1/n^2)_n$ sono strettamente decrescenti, perché il rapporto tra ciascun termine e il precedente é < 1 .

Infine la successione $(a^n)_n$ delle potenze di a é strettamente crescente se $a > 1$ ed é strettamente decrescente se $0 < a < 1$, perché il rapporto tra ciascun termine e il precedente é proprio a .

■

Osservazione - Talvolta la legge che definisce una successione viene descritta attraverso una regola che permette di calcolare il termine n -simo x_n a partire dal termine precedente x_{n-1} . Si dice in tal caso che la successione é **definita per ricorrenza o con procedimento ricorsivo**.

Esempi di successioni definite per ricorrenza sono le seguenti:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n + q \end{cases} \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}, \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y_1 = a \\ y_{n+1} = y_n \cdot q \end{cases} \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

In tali successioni é costante rispettivamente la differenza e il rapporto tra un qualunque termine della successione e quello precedente; tali successioni prendono rispettivamente il nome di **progressione aritmetica e progressione geometrica di primo termine a e ragione q** .

Si noti che in questo caso é possibile trovare una formula esplicita per calcolare x_n ed y_n , per ogni $n \in \mathbf{N}$; infatti é evidente che risulta $x_n = a + (n-1)q$ ed $y_n = a \cdot q^{n-1}$, e quindi la definizione per ricorrenza é solo piú comoda per descrivere le proprietà della successione.

Talvolta invece una formula esplicita per definire la successione non esiste e quindi si deve necessariamente usare la definizione per ricorrenza. E' il caso per esempio del procedimento ricorsivo

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases} \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N},$$

che costruisce una successione strettamente decrescente di numeri razionali che approssimano per eccesso $\sqrt{2}$ con un errore progressivamente sempre piú piccolo man mano che n cresce.

■

FUNZIONI ELEMENTARI

In questo capitolo studieremo una classe di funzioni di fondamentale importanza perché di uso molto frequente.

1 . - Funzioni lineari affini - $f(x) = mx + q$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, con $m \neq 0$.

Si ha:

$$y = f(x) = mx + q \iff x = (y - q)/m,$$

donde segue che :

- $\text{dom}(f) = \text{Im}(f) = \mathbf{R}$,
- f è illimitata inferiormente e superiormente,
- f è bigettiva e la sua inversa è la funzione $f^{-1}(y) = x = (y - q)/m$.

Inoltre si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + q - mx_1 - q}{x_2 - x_1} = m \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2,$$

e quindi f è strettamente crescente se $m > 0$, strettamente decrescente se $m < 0$.

■

Il segno di m dice quindi se f è strettamente crescente o decrescente, il valore assoluto di m dice invece quanto rapidamente f cresca o decresca, dal momento che risulta

$$f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2,$$

e quindi gli incrementi (o decrementi) subiti dalla variabile $y = f(x)$ sono proporzionali all'incremento della variabile x secondo il fattore di proporzionalità m .

■

In particolare si ha

$$m = f(x + 1) - f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R},$$

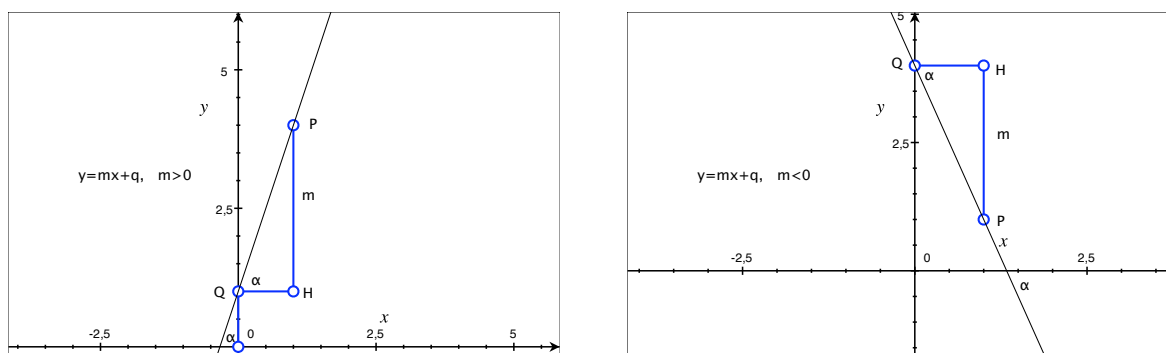
e quindi m misura l'incremento (o decremento) di valore di $f(x)$ conseguente ad un incremento unitario della variabile x ; gli economisti danno a tale incremento il nome di **valore marginale** della funzione. Ad esempio, se $f(x)$ misura il costo di produzione di un bene in funzione della quantità prodotta x , allora il *costo marginale* è l'incremento di costo derivante dall'incremento della produzione di una unità.

■

Osserviamo che il grafico di f è una retta, la retta r di equazione $y = mx + q$. Ricordiamo al riguardo che i parametri q ed m hanno un significato geometrico importante.

Il numero $q = f(0)$ dicesi **ordinata all'origine** o **intercetta** della retta, poiché rappresenta l'ordinata del punto del grafico di ascissa 0, cioè l'ordinata del punto di intersezione della retta r con l'asse y .

Invece, il numero m dicesi **coefficiente angolare** della retta r , poiché esso dipende dall'ampiezza α dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle x , (per l'esattezza si ha $m = \text{tg}(\alpha)$), e quindi dalla **pendenza** della retta r rispetto al semiasse positivo delle x .



Infatti, detti P e Q i punti del grafico di ascisse 1 e 0 e detto H il punto di intersezione della retta per P parallela all'asse y con la retta per Q parallela all'asse x , si ha che

$$m = m + q - q = f(1) - f(0) = (\text{ordinata di } P) - (\text{ordinata di } Q) = (\text{ordinata di } P) - (\text{ordinata di } H) ;$$

pertanto m rappresenta la lunghezza del segmento orientato $\overrightarrow{HP}$, (cateto del triangolo rettangolo QHP , in cui l'altro cateto QH ha lunghezza unitaria) ed è chiaro che la lunghezza di tale cateto dipende dall'ampiezza dell'angolo che la semiretta $\overrightarrow{QP}$ forma con la semiretta $\overrightarrow{QH}$, cioè da α .

Si noti che se misuriamo gli angoli in radianti partendo dal semiasse positivo delle x e consideriamo positivi gli angoli percorsi in senso antiorario e negativi quelli percorsi in senso orario, allora si ha che

$$m > 0 \iff 0 < \alpha < \pi/2 \quad \text{ed} \quad m < 0 \iff -\pi/2 < \alpha < 0.$$

■

2 . - Funzioni quadratiche - $f(x) = ax^2 + bx + c$

Consideriamo dapprima il caso $a > 0$; vedremo poi il caso $a < 0$.

L'insieme di definizione di f è $\mathbf{R}$; per trovare l'insieme immagine di f cerchiamo di risolvere l'equazione $f(x) = y$. Ebbene, risulta:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \iff 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 4ay \iff (2ax + b)^2 = 4ay + b^2 - 4ac.$$

Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si ha quindi che l'equazione $f(x) = y$ ha soluzione se e solo se $4ay + \Delta \geq 0$ ed in tal caso l'equazione ha le soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + \Delta}}{2a}.$$

In particolare, l'equazione $f(x) = 0$ ha soluzione se e solo se $\Delta \geq 0$; in tal caso le soluzioni di tale equazione sono date da

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Pertanto f non è iniettiva e l'insieme $Im(f)$ è l'intervallo $[-\Delta/4a, +\infty[$; ne segue che f non è suriettiva, è illimitata superiormente e limitata inferiormente; il valore minimo è $y_0 = -\Delta/4a$ e (l'unico) punto di minimo è $x_0 = -b/2a$.

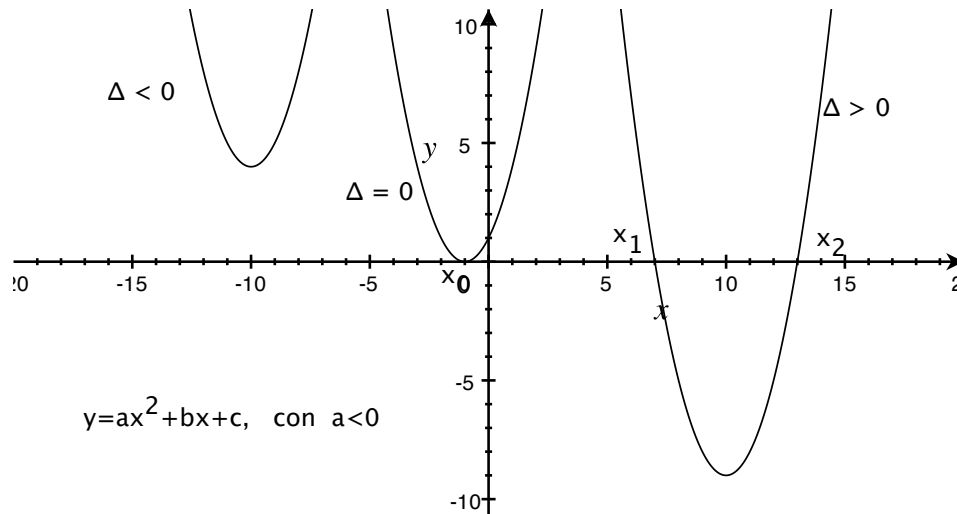
Per studiare la monotonia di f consideriamo il rapporto

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b;$$

considerato che $b = -2ax_0$, tale rapporto coincide con $a(x_2 + x_1 - 2x_0) = a(x_1 - x_0 + x_2 - x_0)$, e quindi é positivo se x_1 ed x_2 sono maggiori di x_0 ed é negativo se x_1 ed x_2 sono minori di x_0 . Pertanto, f é strettamente crescente nell'intervallo $[x_0, +\infty[$ ed é strettamente decrescente nell'intervallo $] -\infty, x_0]$.

Si noti che se $\Delta < 0$, allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) \geq \min Im(f) = y_0 = -\Delta/4a > 0$ e dunque il grafico di f giace tutto al di sopra dell'asse x .

Se invece é $\Delta = 0$, allora per ogni $x \neq x_0$ si ha $f(x) > f(x_0) = \min(Im(f)) = y_0 = -\Delta/4a = 0$ e dunque il grafico di f giace sopra l'asse x e tocca tale asse nel punto $(x_0, 0)$.



Infine nel caso $\Delta > 0$, l'equazione $f(x) = 0$ ha due soluzioni

$$x_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a < -b/(2a) = x_0 \quad \text{ed} \quad x_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a > -b/(2a) = x_0;$$

per la monotonia di f negli intervalli $[x_0, +\infty[$ e $] -\infty, x_0]$, si deduce che

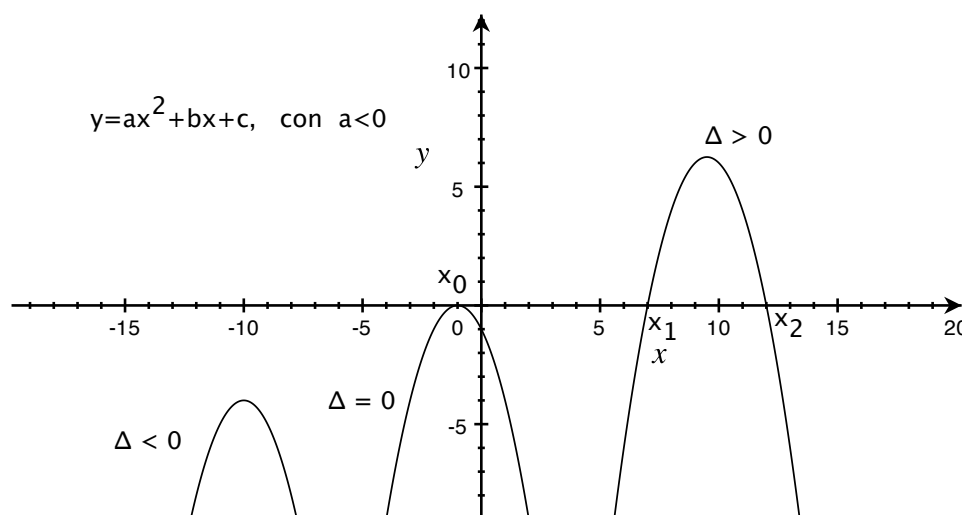
- $f(x) < f(x_1) = f(x_2) = 0$ se $x_1 < x \leq x_0$ o $x_0 \leq x < x_2$, e dunque per ogni $x \in]x_1, x_2[$.
- $f(x) > f(x_2) = f(x_1) = 0$ per ogni $x > x_2$ e per ogni $x < x_1$.

In definitiva $f(x)$ é negativa all'interno dell'intervallo delle radici x_1, x_2 dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ed é positiva all'esterno di tale intervallo.

■

Nel caso $a < 0$, tutte le diseguaglianze devono essere invertite e quindi

- l'insieme immagine $Im(f)$ di f é l'intervallo $] -\infty, y_0]$,
- f é illimita inferiormente e dotata di massimo;
- il valore massimo di f é $y_0 = -\Delta/4a$ e l'unico punto di massimo é $x_0 = -b/2a$,
- f é strettamente crescente nell'intervallo $] -\infty, x_0]$ ed é strettamente decrescente in $[x_0, +\infty[$,
- se $\Delta < 0$, allora $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$,
- se $\Delta = 0$, allora $f(x) < f(x_0) = 0$ per ogni $x \neq x_0$,
- se $\Delta > 0$, allora l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni distinte x_1 e x_2 con $x_1 < x_0 < x_2$ e si ha che $f(x)$ é positiva all'interno dell'intervallo $]x_1, x_2[$ delle radici ed é negativa all'esterno di tali radici.



■

In definitiva,

- se $\Delta < 0$, allora l'equazione $f(x) = 0$ non ha radici reali ed $f(x)$ é concorde con a per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $\Delta = 0$, allora l'equazione $f(x) = 0$ ha un'unica radice reale $x_0 = -b/2a$ ed $f(x)$ é concorde con a per ogni $x \neq x_0$;
- se $\Delta > 0$, allora l'equazione $f(x) = 0$ ha due radici reali e distinte x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ ed $f(x)$ é concorde con a all'esterno dell'intervallo $[x_1, x_2]$ delle radici ed é discorde da a all'interno di tale intervallo.

■

3 . - Funzione potenza n -sima

Sia $n \in \mathbf{N}$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^n$: essa viene detta **funzione potenza n -sima**.

L'insieme di definizione di f é chiaramente $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$; si ha inoltre:

$$(a) \quad 0 \leq x_1 < x_2 \implies f(x_1) = x_1^n < x_2^n = f(x_2) .$$

Infatti, dalla compatibilitá di $>$ con la moltiplicazione discende che:

$$0 \leq x_1 < x_2 \implies 0 \leq (x_1/x_2) < 1 \implies 0 \leq (x_1/x_2)^n < 1 \implies 0 \leq x_1^n/x_2^n < 1 \implies x_1^n < x_2^n .$$

Per studiare le altre proprietá occorre distinguere il caso n dispari dal caso n pari.

Primo caso : n pari.

$$(b') \quad f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x),$$

e quindi f non é iniettiva e il suo grafico é una curva simmetrica rispetto all'asse y ;

(c') $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$, e quindi f non é suriettiva, é illimitata superiormente, e dotata di minimo; il valore minimo é 0 e (l'unico) punto di minimo é $\underline{x} = 0$;

(d') f non é monotona, ma le sue restrizioni agli intervalli $[0, +\infty[$ e $] - \infty, 0]$ sono rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente.

Secondo caso : n dispari.

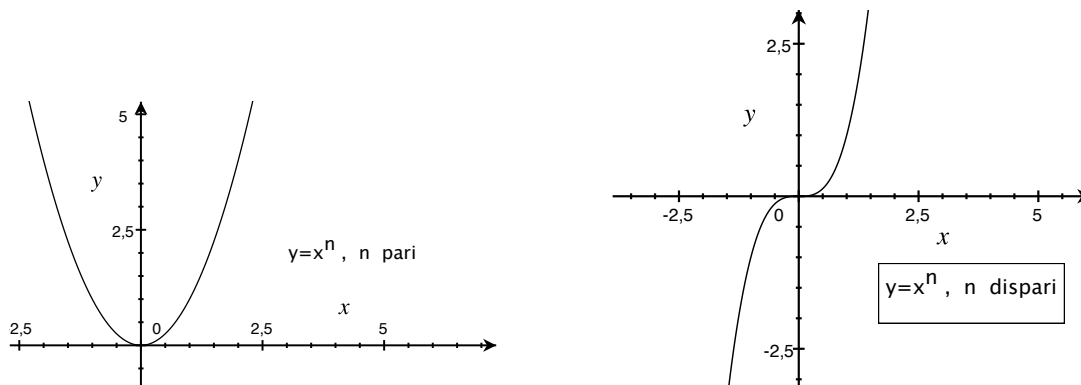
$$(b'') \quad f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x),$$

e quindi il grafico di f é una curva simmetrica rispetto all'origine;

$$(c'') \quad \text{Im}(f) = \mathbf{R}, \quad \text{e quindi } f \text{ é suriettiva ed illimitata inferiormente e superiormente,}$$

$$(d'') \quad f \text{ é strettamente crescente in } \mathbf{R} \text{ e quindi iniettiva, e dunque bigettiva.}$$

Le seguenti figure mostrano i grafici della funzione potenza n -sima per n pari e per n dispari.



La (b') e (b'') sono ovvie.

La (c') e la (c'') discendono dal teorema di esistenza della radice n -sima aritmetica: infatti, se n é pari, allora l'equazione $y = f(x) = x^n$ ha soluzione se e solo se $y \geq 0$, e in tal caso ha due soluzioni $x = \pm \sqrt[n]{y}$.

Invece, nel caso n dispari, si ha che l'equazione $y = f(x)$ ha una ed una sola soluzione, precisamente $x = \sqrt[n]{y}$ se $y \geq 0$ ed $x = -\sqrt[n]{|y|}$ se $y < 0$.

La (d') discende dalla (a) e dal fatto che

$$x_1 < x_2 \leq 0 \implies 0 \leq -x_2 < -x_1 \implies (-x_2)^n < (-x_1)^n \implies x_2^n < x_1^n \implies f(x_2) < f(x_1).$$

Infine la (d'') discende dal fatto che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$ si ha $x_1^n = f(x_1) < f(x_2) = x_2^n$. Infatti, la tesi é ovvia se $x_1 < 0 < x_2$, perché in tal caso risulta $x_1^n < 0 < x_2^n$, e discende da (a) nel caso $0 \leq x_1 < x_2$; infine, nel caso $x_1 < x_2 \leq 0$ si ha:

$$x_1 < x_2 \leq 0 \implies 0 \leq -x_2 < -x_1 \implies (-x_2)^n < (-x_1)^n \implies -x_2^n < -x_1^n \implies x_1^n < x_2^n.$$

■

4. - Funzione radice n -sima aritmetica

Sia f la restrizione della funzione potenza n -sima all'intervallo $[0, +\infty[$; si ha evidentemente che:

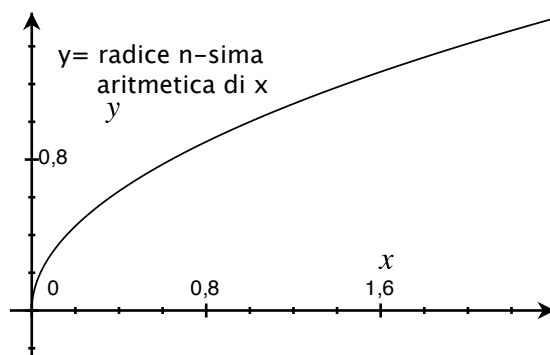
$$\text{dom}(f) = \text{Im}(f) = [0, +\infty[, \text{ e che } f \text{ é strettamente crescente, e quindi iniettiva.}$$

La sua inversa f^{-1} é la funzione che ad ogni $y \geq 0$ associa l'unico $x \geq 0$ tale che $x^n = y$, cioè la radice n -sima aritmetica $\sqrt[n]{y}$ di y . Essa prende il nome di **funzione radice n -sima aritmetica**.

Le principali proprietà di tale funzione sono le seguenti:

- $\text{dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = [0, +\infty[, \quad \text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = [0, +\infty[$,
- f^{-1} non é suriettiva, é illimitata superiormente, e dotata di minimo;
- il valore minimo é 0 e (l'unico) punto di minimo é $\underline{x} = 0$;
- f^{-1} é strettamente crescente, e quindi iniettiva.

La figura seguente mostra il grafico della funzione radice n -sima aritmetica.



■

Osservazione 4.1 - Sia f la funzione potenza n -sima con n dispari; si ha allora che

$\text{dom}(f) = \text{Im}(f) = \mathbf{R}$ e che f é strettamente crescente e bigettiva e quindi invertibile.

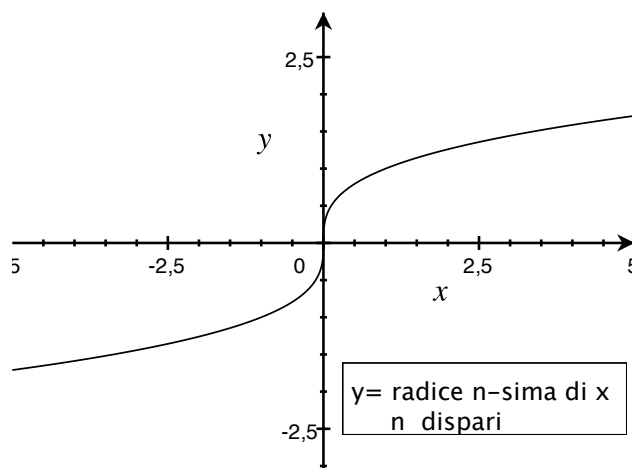
La sua inversa f^{-1} soddisfa le proprietà:

- $\text{dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = \mathbf{R}$, $\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = \mathbf{R}$,
- f^{-1} é strettamente crescente e bigettiva, illimitata inferiormente e superiormente.

La funzione f^{-1} associa ad ogni $y \in \mathbf{R}$ l'unico numero reale x tale che $x^n = y$; tale numero x prende il nome di **radice n -sima algebrica di y** e viene indicata ancora con il simbolo $\sqrt[n]{y}$.

E' evidente che la radice n -sima algebrica di y coincide con la sua radice n -sima aritmetica $\sqrt[n]{y}$ se $y \geq 0$, mentre coincide con $-\sqrt[n]{|y|}$ se $y < 0$. (Ad esempio $\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{|-8|}$).

La funzione f^{-1} che associa ad ogni $y \in \mathbf{R}$ la radice n -sima algebrica di y dicesi **funzione radice n -sima algebrica**; il suo grafico é mostrato nella figura seguente.



■

5 . - Funzione esponenziale in base a

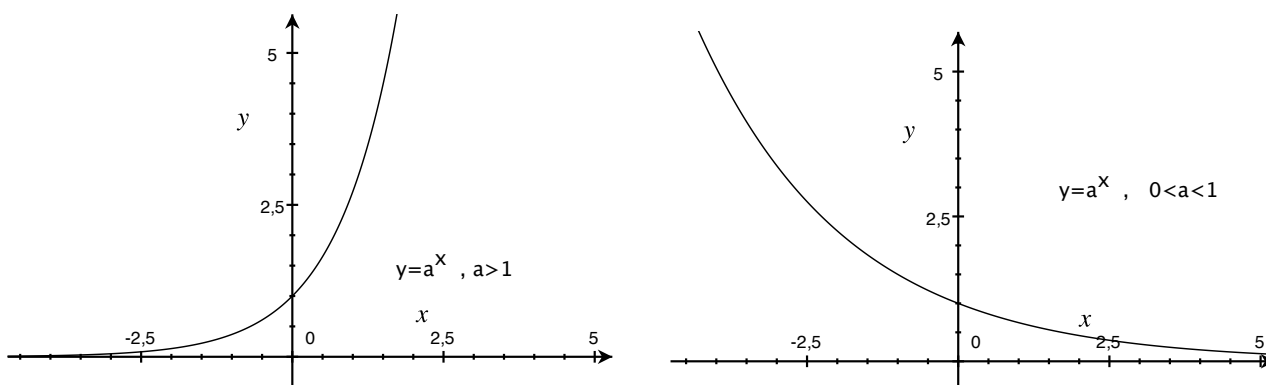
Fissiamo un numero reale $a > 0$ e $a \neq 1$ e consideriamo la funzione $f(x) = a^x$; essa viene detta **funzione esponenziale in base a** .

Le principali proprietà di tale funzione sono le seguenti:

- (1) l'insieme di definizione di f è $\mathbf{R}$,
- (2) f è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$; in ogni caso f è iniettiva;
- (3) $Im(f) =]0, +\infty[$;
- (4) f non è suriettiva, è illimitata superiormente, ma è limitata inferiormente;
- (5) f non è dotata di minimo, ma il suo estremo inferiore è il numero 0.

Infatti la (1) è ovvia, perché abbiamo definito a^x per qualunque $x \in \mathbf{R}$, e la (2) è una riformulazione della proprietà (P3) delle potenze in base a . La (3) è una riformulazione del teorema di esistenza del logaritmo; infine la (4) e la (5) discendono dalla (3).

Le Figure seguenti mostrano il grafico della funzione esponenziale in base a con $a > 1$ e $0 < a < 1$.



■

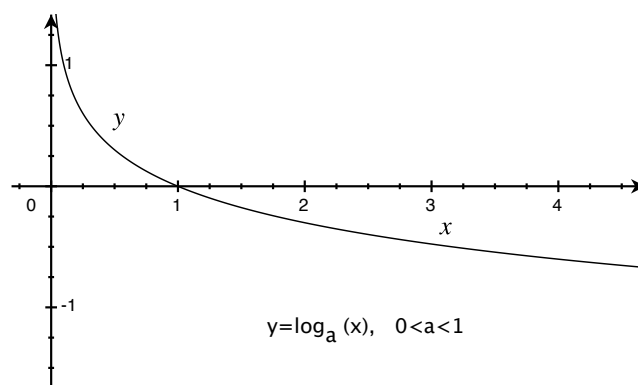
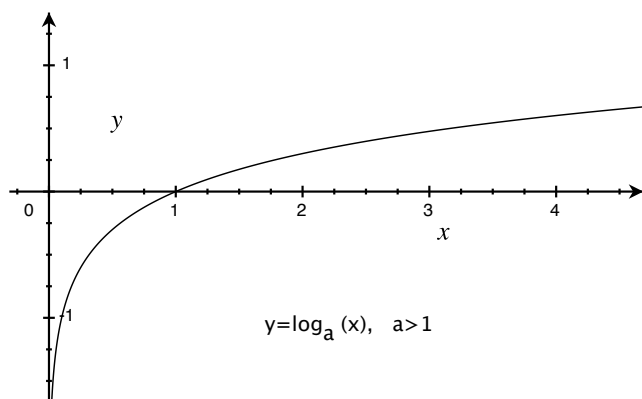
6 . - Funzione logaritmo in base a

Sia $a \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$ e sia f la funzione esponenziale in base a : sappiamo che f è iniettiva e quindi invertibile. La sua inversa f^{-1} associa ad ogni $y \in Im(f) =]0, +\infty[$ l'unico $x \in \mathbf{R}$ tale che $y = f(x) = a^x$, cioè il logaritmo in base a di y ; essa prende il nome di **funzione logaritmo in base a** .

Le proprietà della funzione logaritmo in base a sono le seguenti:

- $dom(f^{-1}) = Im(f) =]0, +\infty[$, $Im(f^{-1}) = Dom(f) = \mathbf{R}$,
- f^{-1} è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$;
- f^{-1} è bigettiva, illimitata inferiormente e superiormente.

Le Figure seguenti mostrano il grafico della funzione logaritmo in base a con $a > 1$ e $0 < a < 1$.



■

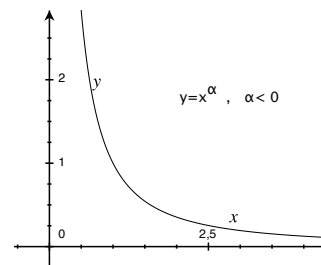
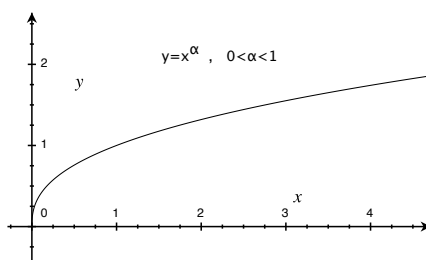
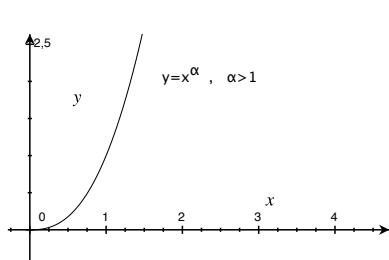
7 . - Funzione potenza di esponente reale

Sia $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha$; tale funzione dicesi **funzione potenza con esponente α** .

Le principali proprietà di tale funzione sono le seguenti:

- a) $\text{dom}(f) = \text{Im}(f) =]0, +\infty[$,
- b) f é strettamente crescente se $\alpha > 0$, strettamente decrescente se $\alpha < 0$.

Le Figure seguenti mostrano il grafico della funzione potenza $y = x^\alpha$ con $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$ e $\alpha < 0$.



Infatti la a) deriva dal fatto che x^α si può calcolare se e solo se $x > 0$ e dal fatto che l'equazione $y = f(x)$ ha soluzione se e solo se $y \in \mathbf{R}^+$ dal momento che risulta $y = f(x) = x^\alpha \iff y > 0 \wedge x = y^{1/\alpha}$.

Per provare la b), prendiamo ad arbitrio un numero $a > 1$, (ad esempio $a = 2$), ed osserviamo che risulta

$$x^\alpha = a^{\log_a(x^\alpha)} = a^{\alpha \log_a x} \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Pertanto f é la funzione composta delle funzioni $f_1(x) = \log_a(x)$, $f_2(x) = \alpha x$, $f_3(x) = a^x$. La tesi discende allora dal fatto che f_1 ed f_3 sono strettamente crescenti ed f_2 é strettamente crescente se $\alpha > 0$, strettamente decrescente se $\alpha < 0$.

■

FUNZIONI CIRCOLARI

In natura esistono numerosissimi fenomeni a carattere periodico: si pensi all'alternarsi delle stagioni, all'alternarsi del giorno e della notte, i battiti cardiaci, l'oscillazione di un pendolo, le onde meccaniche o elettromagnetiche, ma anche i cicli economici di espansione e recessione; ebbene, per descrivere e studiare questi fenomeni vengono adoperate delle particolari funzioni, dette **funzioni circolari**.

1 . - Le funzioni seno e coseno

Al fine di introdurre le funzioni circolari, consideriamo un punto materiale P che si muova su una circonferenza $\mathcal{C}$ di moto circolare uniforme; il moto di quel punto sarà perfettamente conosciuto se ne conosciamo istante per istante le coordinate cartesiane rispetto ad un assegnato riferimento cartesiano.

Possiamo allora renderci conto facilmente del fatto che se scegliamo nel piano del moto un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, in modo che l'origine sia nel centro della circonferenza $\mathcal{C}$ e l'unità di misura sui due assi coincida con il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$, quando il punto materiale P si muove sulla circonferenza, la sua ascissa e la sua ordinata oscillano tra -1 ed 1 , cioè le proiezioni ortogonali di P sull'asse x e sull'asse y oscillano tra i punti di coordinate $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e tra i punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$, descrivendo un tipo particolare di moto rettilineo detto **moto armonico**.

Possiamo essere più precisi ed osservare che istante per istante la posizione del punto dipenderà dalla posizione iniziale del punto in movimento, dalla lunghezza dell'arco percorso dall'inizio del moto ed anche dal fatto che il moto avvenga in senso antiorario o in senso orario.

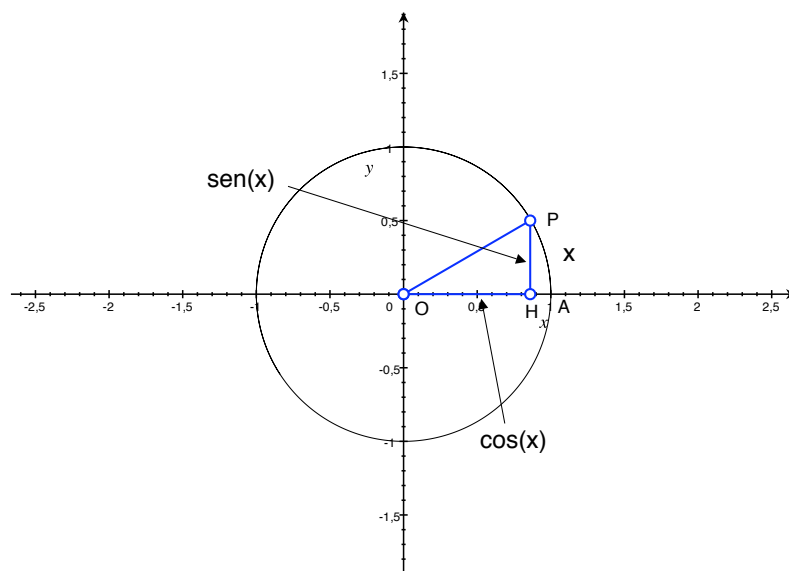
Consideriamo dunque nel piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $(0, 0)$ e raggio 1 . Sia poi A il punto di intersezione di tale circonferenza con il semiasse positivo delle x : a partire da tale punto verranno misurati tutti gli archi, e per questa ragione A dicesi l' **origine degli archi**.

Per ogni numero reale x , diremo **arco orientato di lunghezza x** l'arco di origine A e lunghezza $|x|$, percorso in senso antiorario o in senso orario a seconda che sia $x \geq 0$ oppure $x < 0$.

Ad esempio, gli archi orientati di lunghezza 1 e -2 sono rispettivamente l'arco di lunghezza 1 percorso in senso antiorario e l'arco di lunghezza 2 percorso in senso orario. Ovviamente, ricordato che la lunghezza della circonferenza è 2π , se x è maggiore di 2π , ad esempio $x = 15$, vuol dire che il punto ha percorso in senso antiorario due giri completi della circonferenza e poi un ulteriore arco di lunghezza $15 - 4\pi$. Analogamente l'arco orientato di lunghezza -8 è l'arco ottenuto percorrendo in senso orario una intera circonferenza ed un arco residuo di lunghezza $8 - 2\pi$.

Ebbene, per ogni $x \in \mathbf{R}$, l'ascissa e l'ordinata del punto P estremo dell'arco orientato di lunghezza x diconsi rispettivamente **coseno di x** e **seno di x** , (in simboli $\cos(x)$ e $\sin(x)$).

In altri termini $\cos(x)$ e $\sin(x)$ sono rispettivamente le lunghezze dei segmenti orientati $\overrightarrow{OH}$ ed $\overrightarrow{HP}$, dove H è la proiezione ortogonale del punto P sull'asse x .



Osservazione 1.1 - Dal momento che la circonferenza $\mathcal{C}$ ha raggio unitario, se x é la lunghezza dell'arco orientato AP , allora x é pure la misura in radianti dell'angolo AOP ; per questo motivo la circonferenza $\mathcal{C}$ prende il nome di **circonferenza goniometrica**.

■

Osservazione 1.2 - Se il punto materiale P é partito dal punto A e la sua velocità angolare di rotazione é tale che il punto compia un giro completo in un tempo esattamente uguale alla lunghezza della circonferenza, allora dopo un tempo $t > 0$ avrà percorso un arco orientato di lunghezza $x = t$ se il moto é avvenuto in senso antiorario ed avrà percorso invece un arco orientato di lunghezza $x = -t$ se il moto é avvenuto in senso orario.

Ne segue che la restrizione all'intervallo $[0, +\infty[$ (rispett. all'intervallo $]-\infty, 0]$) delle funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$ descrivono il moto delle proiezioni sull'asse x e sull'asse y del punto P che, partito da A , si muova sulla circonferenza $\mathcal{C}$ in senso antiorario, (rispett. in senso orario), in modo che il tempo impiegato per effettuare un giro completo sia esattamente uguale alla lunghezza 2π della circonferenza.

In generale, se il punto si muove di moto circolare uniforme in modo da impiegare un tempo T per effettuare un giro completo, allora dopo un tempo $t > 0$ avrà percorso un arco orientato di lunghezza $x = \omega t$ o $x = -\omega t$ (con $\omega = 2\pi/T$), a seconda che il moto sia avvenuto in senso antiorario o orario; pertanto, il moto delle proiezioni sull'asse x e sull'asse y del punto P é descritto dalle funzioni

$$x = \cos \omega t, \quad y = \sin \omega t$$

con $t \geq 0$ o $t \leq 0$ a seconda che il moto avvenga in senso antiorario o orario.

■

Le **proprietá fondamentali delle funzioni seno e coseno** sono le seguenti:

(1) Evidentemente, l'insieme di definizione delle funzioni seno e coseno é $\mathbf{R}$.

■

(2) Le funzioni $\sin$ e $\cos$ sono periodiche di periodo 2π , cioé per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Infatti, se a partire da A giungiamo nel punto P percorrendo un arco di lunghezza x e a partire da P percorriamo un'intera circonferenza, percorrendo complessivamente un arco di lunghezza $x + 2\pi$, ci ritroveremmo nuovamente nel punto P e quindi l'ascissa e l'ordinata di P sono rispettivamente il coseno e il seno sia di x che di $x + 2\pi$.

■

(3) Chiaramente l'estremo dell'arco di lunghezza 0 é $A = (1, 0)$, l'estremo degli archi di lunghezza π e $-\pi$ é il punto di coordinate $(-1, 0)$, l'estremo dell'arco di lunghezza $\pi/2$ é il punto di coordinate $(0, 1)$, l'estremo dell'arco di lunghezza $-\pi/2$ é $(-1, 0)$. Si ha dunque:

$$\begin{array}{llll} \cos(0) = 1, & \cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1, & \cos(\pi/2) = 0, & \cos(-\pi/2) = 0, \\ \sin(0) = 0, & \sin(\pi) = \sin(-\pi) = 0, & \sin(\pi/2) = 1, & \sin(-\pi/2) = -1. \end{array}$$

■

(4) Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OHP si ha che $\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HP}^2$ e quindi

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

■

(5) L'insieme immagine delle funzioni seno e coseno é l'intervallo $[-1, 1]$.

Infatti da (4) si deduce che $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ e $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Viceversa per ogni $z \in [-1, 1]$ esistono sulla circonferenza goniometrica almeno un punto P di ascissa z ed almeno un punto Q di ordinata z ; detta x_1 la lunghezza dell'arco orientato AP e detta x_2 la lunghezza dell'arco orientato AQ , si ha che $\cos(x_1) = z$ e $\sin(x_2) = z$.

■

(6) Da (5) si deduce che le funzioni seno e coseno sono dotate di minimo e massimo valore; il valore minimo é -1 e il valore massimo é 1 . Per la funzione coseno, un punto di minimo é π , un punto di massimo é 0 ; per la funzione seno, un punto di minimo é $-\pi/2$, un punto di massimo é $\pi/2$.

Piú in generale, per ogni $k \in \mathbf{Z}$ si ha che $(2k-1)\pi$ e $2k\pi$ sono rispettivamente un punto di minimo ed un punto di massimo della funzione coseno, $-\pi/2 + 2k\pi$ e $\pi/2 + 2k\pi$ sono rispettivamente un punto di minimo ed un punto di massimo della funzione seno.

■

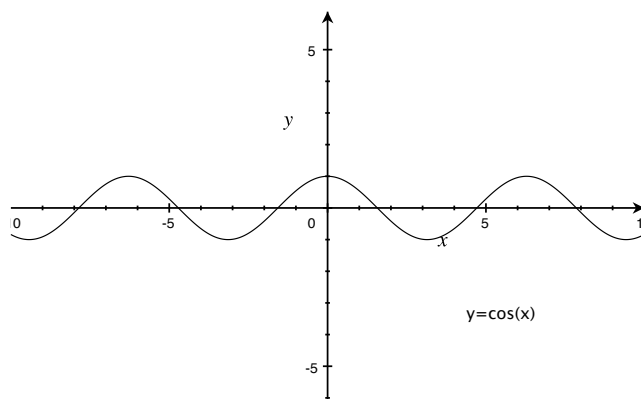
(7) La funzione coseno é strettamente decrescente nell'intervallo $[0, \pi]$ ed é strettamente crescente nell'intervallo $[\pi, 2\pi]$; invece la funzione seno é strettamente crescente nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ ed é strettamente decrescente nell'intervallo $[\pi/2, 3\pi/2]$.

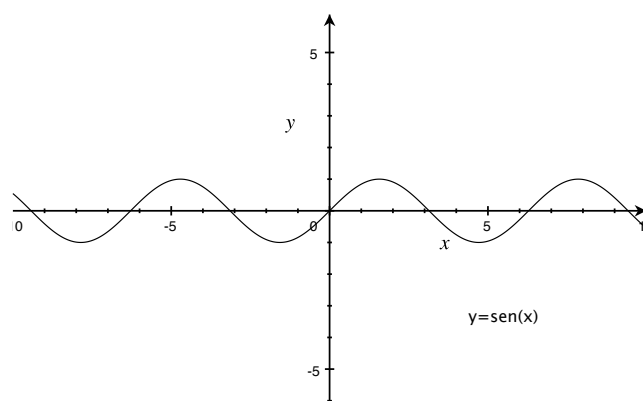
Anzi (a causa del fatto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π) per ogni $k \in \mathbf{Z}$ si ha che:

- la funzione coseno é strettamente decrescente nell'intervallo $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ed é strettamente crescente nell'intervallo $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$;
- la funzione seno é strettamente crescente nell'intervallo $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$ ed é strettamente decrescente nell'intervallo $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$.

■

Le figure seguenti mostrano il grafico delle funzioni coseno e seno





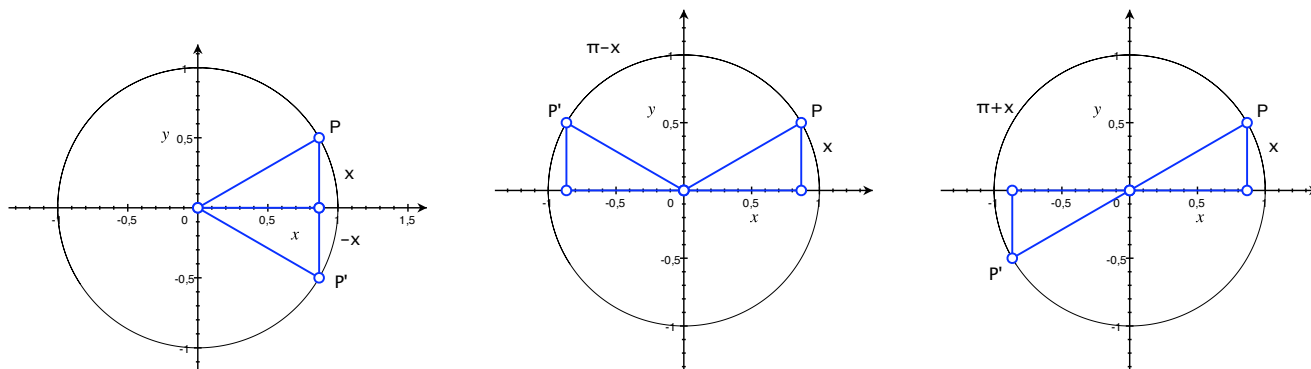
■

(8) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$\begin{array}{ll} \cos(-x) = \cos(x), & \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x), \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x), & \text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(x), \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x), & \text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}(x), \end{array}$$

Infatti, dalle seguenti figure si deduce chiaramente che:

- detti P e P' rispettivamente gli estremi degli archi orientati di lunghezza x e $-x$, si ha che P e P' hanno la stessa ascissa ed ordinata opposta,
- detti P e P' rispettivamente gli estremi degli archi orientati di lunghezza x e $\pi - x$, si ha che P e P' hanno la stessa ordinata ed ascissa opposta,
- detti P e P' rispettivamente gli estremi degli archi orientati di lunghezza x e $\pi + x$, si ha che P e P' hanno ascisse opposte ed ordinate opposte.



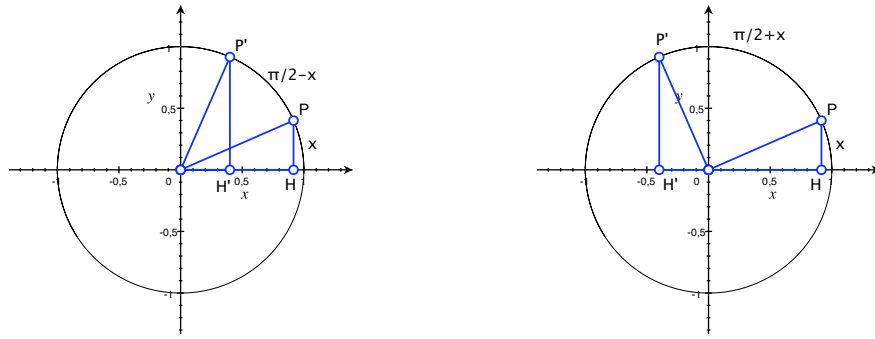
■

(9) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$\begin{array}{ll} \cos(\pi/2 - x) = \text{sen}(x), & \text{sen}(\pi/2 - x) = \cos(x). \\ \cos(\pi/2 + x) = -\text{sen}(x), & \text{sen}(\pi/2 + x) = \cos(x). \end{array}$$

Infatti, dalle seguenti figure si deduce chiaramente che, detti P e P' rispettivamente gli estremi degli archi orientati di lunghezza x e $\pi/2 - x$ e detti H ed H' le proiezioni di P e P' sull'asse x , si ha che i triangoli rettangoli OHP ed $OH'P'$ hanno gli angoli di uguale ampiezza e l'ipotenusa di uguale lunghezza; ne segue che anche i cateti avranno uguale lunghezza, cioè $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{H'P'} = \overrightarrow{OH}$.

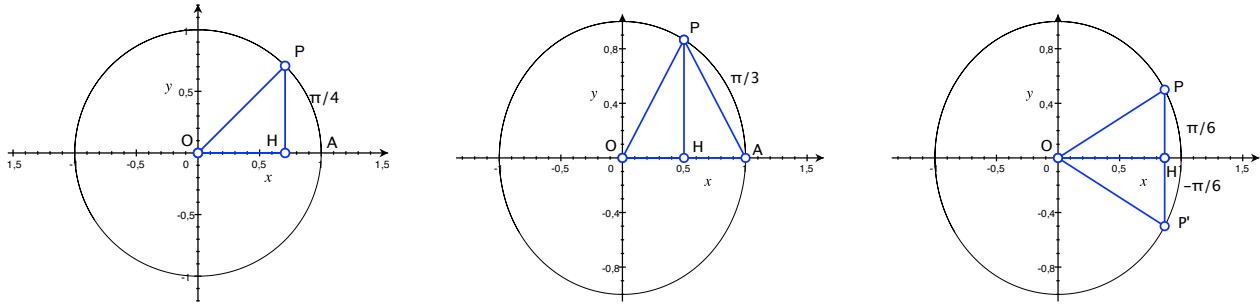
Lo stesso accade se P e P' sono gli estremi degli archi orientati di lunghezza x e $\pi/2 + x$, solo che ora si ha $\overrightarrow{OH'} = -\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{H'P'} = \overrightarrow{OH}$.



■

(10) Si ha

$$\begin{aligned} \cos(\pi/4) &= \sqrt{2}/2, & \sin(\pi/4) &= \sqrt{2}/2, \\ \cos(\pi/3) &= 1/2, & \sin(\pi/3) &= \sqrt{3}/2, \\ \cos(\pi/6) &= \sqrt{3}/2, & \sin(\pi/6) &= 1/2, \end{aligned}$$



Infatti detto P l'estremo dell'arco di lunghezza $\pi/4$ ed H la sua proiezione ortogonale sull'asse x , si ha chiaramente che il triangolo OHP è un triangolo rettangolo isoscele, la cui ipotenusa ha lunghezza unitaria; ne segue che i cateti OH ed HP hanno lunghezza $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.

Invece, detto P l'estremo dell'arco di lunghezza $\pi/3$ ed H la sua proiezione sull'asse x , si ha che il triangolo OAP è un triangolo equilatero; ne segue che $\cos(\pi/3) = OH = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$

Infine, detti P e P' gli estremi degli archi orientati di lunghezza $\pi/6$ e $-\pi/6$ e detta H la proiezione ortogonale di P e P' sull'asse x , si ha che il triangolo OPP' è un triangolo equilatero; ne segue che $\sin(\pi/6) = HP = 1/2$, $\cos(\pi/3) = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$.

■

Osservazione 1.3 - Si può dimostrare che sussistono le seguenti **Formule di addizione**:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Di conseguenza sussistono le seguenti **Formule di duplicazione**:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x), \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x). \end{aligned}$$

■

2 . - Le funzioni tangente e cotangente

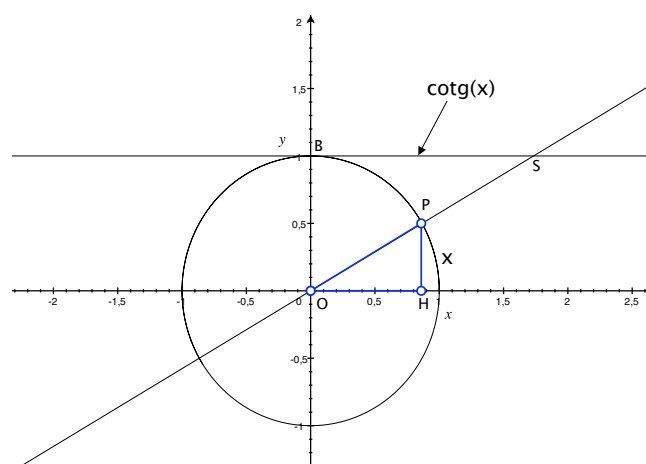
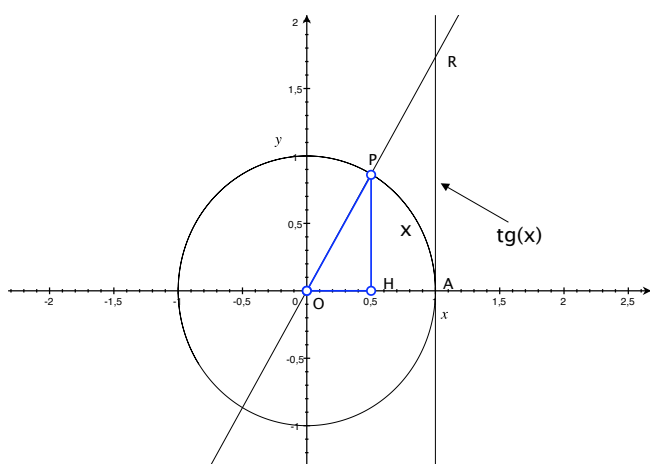
Consideriamo le funzioni

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \quad (\text{tangente di } x), \quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}, \quad (\text{cotangente di } x)$$

■

Il significato geometrico di tali funzioni é molto semplice. Infatti, considerato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e considerata la circonferenza goniometrica, cioè la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $(0,0)$ e raggio 1, siano A e B i punti di intersezione di tale circonferenza con i semiassi positivi delle x e delle y e siano r ed s le rette tangenti a $\mathcal{C}$ in A e B .

Per ogni $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, (rispett. per ogni $x \in]0, \pi[$), detto P l'estremo dell'arco orientato di lunghezza x e detta H la proiezione di P sull'asse x , sia R il punto di intersezione della semiretta OP con la retta r , (rispett. sia S il punto di intersezione della semiretta OP con la retta s).



Dalla similitudine dei triangoli OHP , ed OAR (rispett. OHP ed OBS), si deduce allora che

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{\overrightarrow{HP}}{\overrightarrow{OH}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{OA}} = \overrightarrow{AR},$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{HP}} = \frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{OB}} = \overrightarrow{BS}.$$

■

Le principali **proprietà delle funzioni tangente e cotangente** sono le seguenti.

(1) Evidentemente l'insieme di definizione delle funzioni tangente e cotangente é rispettivamente l'insieme

$$\operatorname{dom}(\operatorname{tg}) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi \text{ per ogni } k \in \mathbf{Z}\}, \quad \operatorname{dom}(\operatorname{cotg}) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi \text{ per ogni } k \in \mathbf{Z}\}.$$

■

(2) Le funzioni tg e cotg sono periodiche di periodo π , cioè

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x), \quad \operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg}(x).$$

Infatti

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-\cos(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)$$

$$\cotg (x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cotg (x)$$

■

(3) L'insieme immagine delle funzioni tg e $\cotg$ é $\mathbf{R}$.

Infatti per ogni $y \in \mathbf{R}$, detti R ed S i punti delle rette r ed s rispettivamente di coordinate $(1, y)$ ed $(y, 1)$, siano P_1 e P_2 i punti di intersezione delle semirette OR ed OS con la circonferenza $\mathcal{C}$ e siano x_1 ed x_2 le lunghezze degli archi orientati OP_1 ed OP_2 ; evidentemente risulta

$$\operatorname{tg} (x_1) = \overrightarrow{AR} = y, \quad \cotg (x_2) = \overrightarrow{BS} = y,$$

e questo prova la tesi.

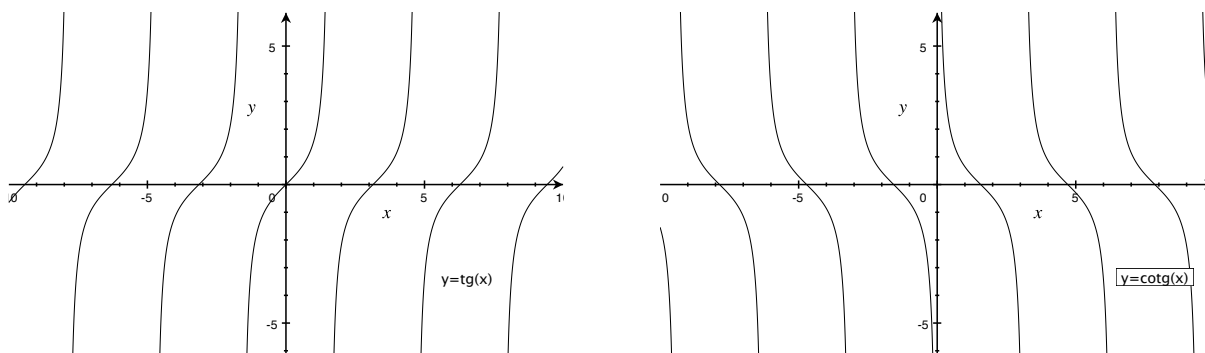
■

(4) Dal significato geometrico di tangente e cotangente, si deduce immediatamente che la funzione tangente é strettamente crescente nell'intervallo $] - \pi/2, \pi/2[$, la funzione cotangente é strettamente decrescente nell'intervallo $]0, \pi[$.

Di qui e dal fatto che tali funzioni sono periodiche di periodo π si deduce che per ogni $k \in \mathbf{Z}$ la funzione tangente é strettamente crescente nell'intervallo $] - \pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, mentre la funzione cotangente é strettamente decrescente nell'intervallo $]k\pi, (k + 1)\pi[$.

■

Le figure seguenti mostrano il grafico delle funzioni tangente e cotangente.



■

(5) Infine, dalle analoghe proprietà delle funzioni seno e coseno si deduce immediatamente che:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (0) &= 0 = \cotg (\pi/2), & \operatorname{tg} (\pi/4) &= \cotg (\pi/4) = 1, \\ \operatorname{tg} (\pi/3) &= \cotg (\pi/6) = \sqrt{3}, & \operatorname{tg} (\pi/6) &= \cotg (\pi/3) = 1/\sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} (-x) &= -\operatorname{tg} (x), & \cotg (-x) &= -\cotg (x), \\ \operatorname{tg} (\pi - x) &= -\operatorname{tg} (x), & \cotg (\pi - x) &= -\cotg (x), \\ \operatorname{tg} (\pi/2 - x) &= \cotg (x), & \cotg (\pi/2 - x) &= \operatorname{tg} (x), \\ \operatorname{tg} (\pi/2 + x) &= -\cotg (x), & \cotg (\pi/2 + x) &= -\operatorname{tg} (x). \end{aligned}$$

■

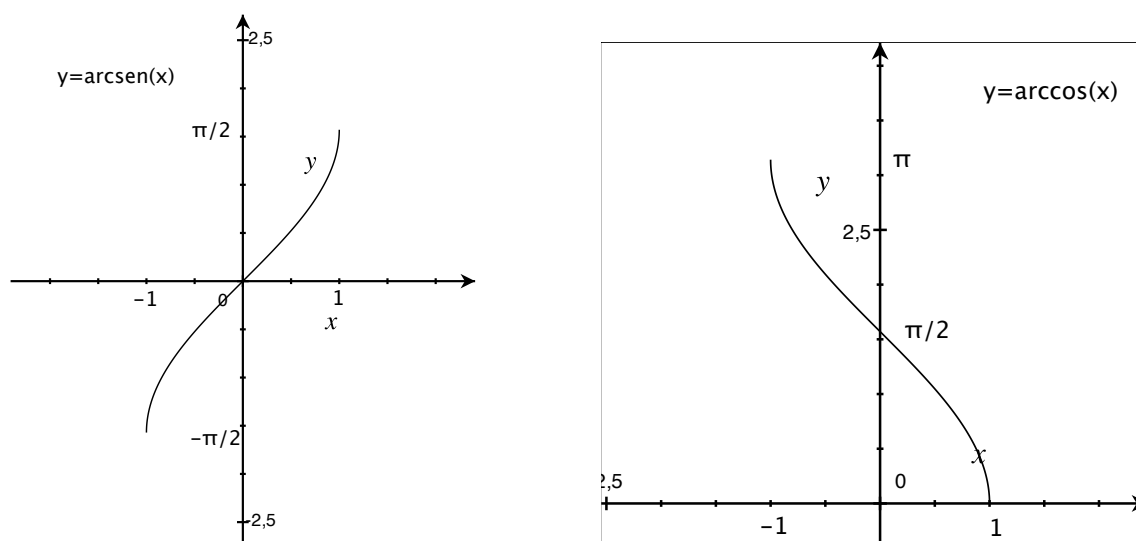
3 . - Funzioni circolari inverse

Le funzioni $\text{sen}, \text{cos}, \text{tg}, \text{cotg}$ non sono invertibili, dal momento che esse sono periodiche e quindi non iniettive; però scegliendo opportune restrizioni, esse possono essere invertite.

Ad esempio, la restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ è strettamente crescente, (e quindi invertibile), e la sua immagine è l'intervallo $[-1, 1]$; la sua inversa dicesi **funzione arcoseno** ed è una funzione strettamente crescente dall'intervallo $[-1, 1]$ nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Analogamente, la restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ è strettamente decrescente, (e quindi invertibile), e la sua immagine è l'intervallo $[-1, 1]$; la sua inversa dicesi **funzione arcocoseno** ed è una funzione strettamente decrescente dall'intervallo $[-1, 1]$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

Le figure seguenti mostrano il grafico delle funzioni arcoseno ed arcocoseno.



Per ogni $y \in [-1, 1]$ si ha che $\text{arcsen}(y)$ è l'unico elemento x dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ tale che $\text{sen}(x) = y$, mentre $\text{arccos}(y)$ è l'unico elemento x dell'intervallo $[0, \pi]$ tale che $\text{cos}(x) = y$.

Ad esempio risulta

$\text{arcsen}(0) = 0,$	$\text{arccos}(0) = \pi/2,$
$\text{arcsen}(1) = \pi/2,$	$\text{arccos}(1) = 0,$
$\text{arcsen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4,$	$\text{arccos}(\sqrt{2}/2) = \pi/4,$
$\text{arcsen}(1/2) = \pi/6,$	$\text{arccos}(1/2) = \pi/3,$
$\text{arcsen}(\sqrt{3}/2) = \pi/3,$	$\text{arccos}(\sqrt{3}/2) = \pi/6,$
$\text{arcsen}(-1) = -\pi/2,$	$\text{arccos}(-1) = \pi,$
$\text{arcsen}(-\sqrt{2}/2) = -\pi/4,$	$\text{arccos}(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4,$
$\text{arcsen}(-1/2) = -\pi/6,$	$\text{arccos}(-1/2) = 2\pi/3,$
$\text{arcsen}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3,$	$\text{arccos}(-\sqrt{3}/2) = 5\pi/6.$

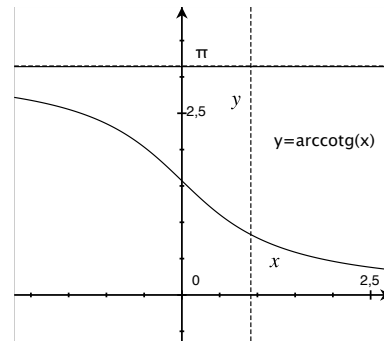
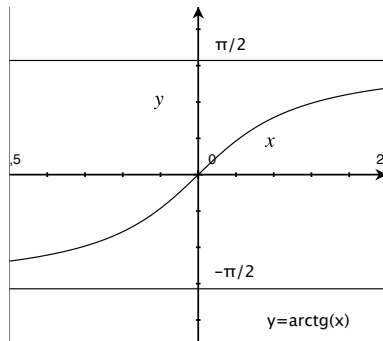
In generale:

$\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}(x)$	per ogni $x \in [0, 1]$
$\text{arccos}(-x) = \pi - \text{arccos}(x)$	per ogni $x \in [0, 1],$
$\text{arcsen}(x) > 0 = \text{arcsen}(0)$	per ogni $x \in]0, 1],$
$\text{arcsen}(x) < 0 = \text{arcsen}(0)$	per ogni $x \in [-1, 0[,$
$\text{arccos}(x) > 0 = \text{arccos}(1)$	per ogni $x \in [-1, 1[.$

D'altra parte, la restrizione della funzione tangente all'intervallo $] - \pi/2, \pi/2[$ é strettamente crescente e la restrizione della funzione cotangente all'intervallo $]0, \pi[$ é strettamente decrescente; inoltre il loro insieme immagine é $\mathbf{R}$.

Ne segue che tali restrizioni sono invertibili; le loro inverse diconsi rispettivamente **funzione arcotangente** e **funzione arcocotangente** (in simboli $\arctg$ ed $\operatorname{arccotg}$); esse sono rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente; l'insieme di definizione di tali funzioni é $\mathbf{R}$ e il loro insieme immagine é rispettivamente l'intervallo $] - \pi/2, \pi/2[$ e l'intervallo $]0, \pi[$.

Le figure seguenti mostrano il grafico delle funzioni $\arctg$ ed $\operatorname{arccotg}$.



Per ogni $y \in \mathbf{R}$ si ha che $\arctg(y)$ é l'unico elemento x dell'intervallo $] - \pi/2, \pi/2[$ tale che $\operatorname{tg}(x) = y$, mentre $\operatorname{arccotg}(y)$ é l'unico elemento x dell'intervallo $]0, \pi[$ tale che $\operatorname{cotg}(x) = y$.

Ad esempio risulta

$$\begin{array}{ll} \arctg(0) = 0, & \operatorname{arccotg}(0) = \pi/2, \\ \arctg(1) = \pi/4, & \operatorname{arccotg}(1) = \pi/4, \\ \arctg(\sqrt{3}) = \pi/3, & \operatorname{arccotg}(\sqrt{3}) = \pi/6, \\ \arctg(\sqrt{3}/3) = \pi/6, & \operatorname{arccotg}(\sqrt{3}/3) = \pi/3, \\ \arctg(-1) = -\pi/4, & \operatorname{arccotg}(-1) = 3\pi/4, \\ \arctg(-\sqrt{3}) = -\pi/3, & \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) = 5\pi/6, \\ \arctg(-\sqrt{3}/3) = -\pi/6, & \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}/3) = 2\pi/3. \end{array}$$

In generale:

$$\begin{array}{ll} \arctg(-x) = -\arctg(x) & \text{per ogni } x > 0 \\ \operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg}(x) & \text{per ogni } x > 0, \\ \arctg(x) > 0 = \arctg(0) & \text{per ogni } x > 0, \\ \arctg(x) < 0 = \arctg(0) & \text{per ogni } x < 0, \\ \operatorname{arccotg}(x) > 0 & \text{per ogni } x \in \mathbf{R}. \end{array}$$

INTRODUZIONE AL CONCETTO DI LIMITE

In questo capitolo introdurremo il concetto fondamentale dell'Analisi Matematica, cioè il concetto di “**limite di una funzione**”; da esso dedurremo poi i concetti di **derivata** e di **integrale definito** di una funzione che sono alla base del Calcolo Differenziale e del Calcolo Integrale.

1. - Alcuni esempi introduttivi

Per introdurre il concetto di limite partiremo da alcuni esempi che ci aiuteranno a dare (e ricordare) le definizioni rigorose.

Esempio 1 - Supponiamo di avere un capitale iniziale C che investiamo al tasso annuo x , ad esempio $x = 0,10 = 10\%$; dopo un anno il capitale C avrà fruttato un interesse Cx , e quindi avremo un capitale $C_1 = C + Cx = C(1 + x)$; se tale capitale viene investito ancora per un altro anno allo stesso tasso, alla fine del secondo anno avremo un capitale $C_2 = C_1(1 + x) = C(1 + x)^2$; se tale capitale viene investito ancora per un altro anno allo stesso tasso, alla fine del terzo anno avremo un capitale $C_3 = C_2(1 + x) = C(1 + x)^3$.

In generale, per ogni $n \in \mathbf{N}$, il capitale iniziale C dopo n anni sarà diventato pari a $C_n = C(1 + x)^n$; si dice che C_n è il “montante” dopo n anni di un capitale iniziale C investito al tasso annuo x in regime di capitalizzazione composta.

Ora è intuitivo che col passare del tempo, cioè con il crescere del numero n di anni in cui si conserva l'investimento, (ammesso che il tasso annuo x rimanga invariato nel tempo), il montante dopo n anni cresce sempre più e tende a diventare “infinitamente grande”.

Naturalmente se ci mettiamo nei panni della banca o altra istituzione che ha ricevuto il nostro investimento pattuendo un tasso annuo x in regime di capitalizzazione composta, essa avrà un debito nei nostri confronti, pari a $D_n = -C_n$, che col passare del tempo tende a diventare sempre più piccolo, nel senso che in valore assoluto tende a diventare sempre più grande, ma è un numero negativo.

■

Esempio 2 - Supponiamo di avere un capitale iniziale C che investiamo al tasso annuo x , ad esempio $x = 0,10 = 10\%$; dopo un anno il capitale C avrà fruttato un interesse Cx , e quindi avremo un capitale $C_1 = C + Cx = C(1 + x)$.

A pensarci bene, però, in questo modo i frutti dell'investimento, cioè gli interessi, ci sono riconosciuti solo alla fine dell'anno, mentre la banca che ha ricevuto il nostro investimento raccoglie i frutti fin da subito. Sarebbe più giusto che, per lo meno, i frutti dell'investimento venissero riconosciuti alla fine del semestre e poi alla fine dell'anno, cioè che la capitalizzazione avvenisse due volte nel corso dell'anno. In tal caso, il tasso semestrale sarebbe $x/2$ e alla fine dell'anno il montante sarebbe $C_2 = C(1 + (x/2))^2$.

A pensarci bene, aspettare sei mesi per vedere i frutti dell'investimento può essere considerato eccessivamente penalizzante: forse sarebbe più giusto aspettare un quadrimestre, cioè che la capitalizzazione avvenisse tre volte del corso dell'anno. In tal caso, il tasso quadrimestrale sarebbe $x/3$ e alla fine dell'anno il montante sarebbe $C_3 = C(1 + (x/3))^3$.

In generale, per ogni $n \in \mathbf{N}$, il montante di un capitale iniziale C investito al tasso annuo x e capitalizzato n volte nel corso dell'anno è pari a $C_n = C(1 + (x/n))^n$.

Intuitivamente, col crescere del numero n di volte in cui si effettua la capitalizzazione, (e quindi con il ridursi della durata dell'intervallo di tempo tra due successive capitalizzazioni), i termini della successione $(C_n)_n$ si avvicinano sempre più verso un numero C^* che rappresenta il montante che si avrebbe dopo un anno se gli interessi venissero riconosciuti istante per istante, o, come si dice, in *regime di capitalizzazione continua*.

■

Esempio 3 - Supponiamo di voler calcolare l'area di un cerchio, ad esempio del cerchio di raggio 1.

Ebbene, sappiamo facilmente calcolare l'area di un rettangolo, (base per altezza), sappiamo calcolare altrettanto facilmente l'area di un triangolo, (base per altezza diviso 2), sappiamo con maggior fatica calcolare l'area di un qualunque poligono, (scomponendolo in un numero finito di triangoli a due a due senza punti interni comuni e sommando le relative aree), ma non siamo in grado di calcolare l'area del cerchio, in quanto esso é una figura piana limitata da una “*linea curva*”.

Possiamo però approssimare l'area del cerchio andando a considerare l'area S_1 del quadrato inscritto nel cerchio ed é chiaro che cosí facendo commettiamo un errore per via del fatto che sono state trascurate le regioni piane comprese tra i lati del quadrato e il corrispondente arco di circonferenza.

Otterremmo una approssimazione migliore se considerassimo l'area S_2 l'ottagono regolare inscritto nel cerchio; l'approssimazione sarebbe ancora migliore se si considerasse l'area S_3 del poligono regolare inscritto con $16 = 2^4$ lati. In generale, per ogni $n \in \mathbf{N}$, l'area S_n del poligono regolare inscritto con 2^{n+1} lati rappresenta una approssimazione dell'area del cerchio e l'errore dell'approssimazione é tanto piú piccolo quanto maggiore é n , cioè quanto maggiore é il numero dei lati.

Intuitivamente i termini della successione $(S_n)_n$ si avvicinano sempre piú verso un numero S che rappresenta l'area del cerchio.

■

Esempio 4 - Consideriamo un'azienda che produce un certo bene in regime di monopolio; sia p il prezzo di vendita di quel bene e sia $q = q(p)$ la quantità domandata, cioè assorbita dal mercato, e prodotta dall'azienda al prezzo p . Supponiamo che la domanda del bene possa essere descritta da una legge del tipo $q = k/p^\alpha$, e che i costi di produzione siano dati da un costo fisso c_0 e da un costo di produzione per unità di prodotto c_1 . Ne segue che il costo di produzione, il ricavo e il profitto dell'azienda sono dati (in funzione del prezzo di vendita p) dalle funzioni

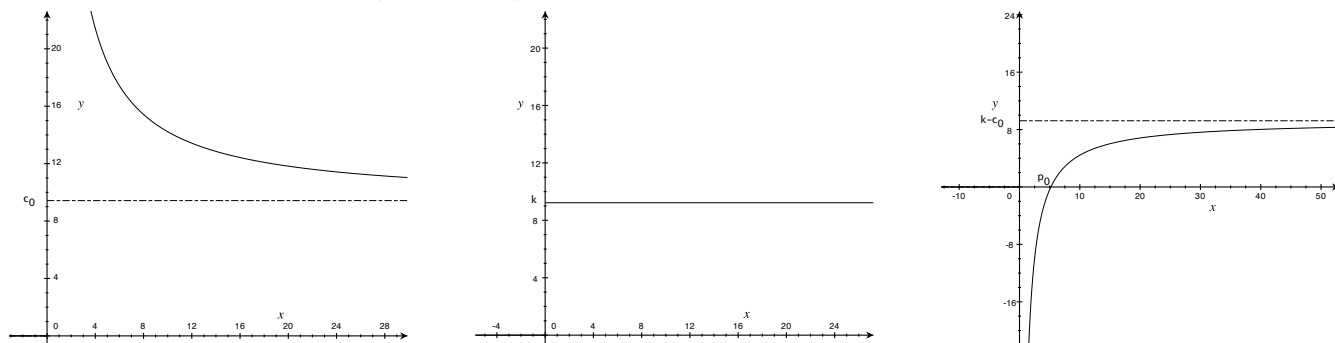
$$C(p) = c_0 + c_1 \cdot q(p) = c_0 + \frac{c_1 k}{p^\alpha}, \quad R(p) = p \cdot q(p) = kp^{1-\alpha}, \quad \Pi(p) = R(p) - C(p) = kp^{1-\alpha} - c_0 - \frac{c_1 k}{p^\alpha}.$$

A questo punto distinguiamo il caso $\alpha = 1$ dai casi $\alpha = 1/2$ ed $\alpha = 2$. Ad un incremento di prezzi del 5% corrisponde una riduzione della domanda all'incirca del 5% nel caso $\alpha = 1$, all'incirca del 2,5% nel caso $\alpha = 1/2$ e di quasi il 10% nel caso $\alpha = 2$.

Si tratta quindi di un bene molto voluttuario nel caso $\alpha = 2$, relativamente voluttuario nel caso $\alpha = 1$, relativamente di prima necessità nel caso $\alpha = 1/2$.

Primo caso: $\alpha = 1$ e quindi $C(p) = c_0 + c_1 k/p$, $R(p) = k$, $\Pi(p) = k - c_0 - c_1 k/p$.

Le figure seguenti mostrano (nell'ordine) i grafici di tali funzioni.



Da tali figure si vede che il ricavo dell'azienda é costante, non dipende dal prezzo che essa fissa per il bene prodotto, mentre il costo di produzione decresce al crescere del prezzo per la minore incidenza che ha il costo variabile. Inoltre l'ascissa p_0 del punto di intersezione del grafico della funzione profitto con l'asse delle

ascisse rappresenta il livello minimo di prezzo al di sotto del quale l'azienda non ha interesse a produrre perché avrebbe un profitto negativo, cioè i costi sarebbero superiori al ricavo.

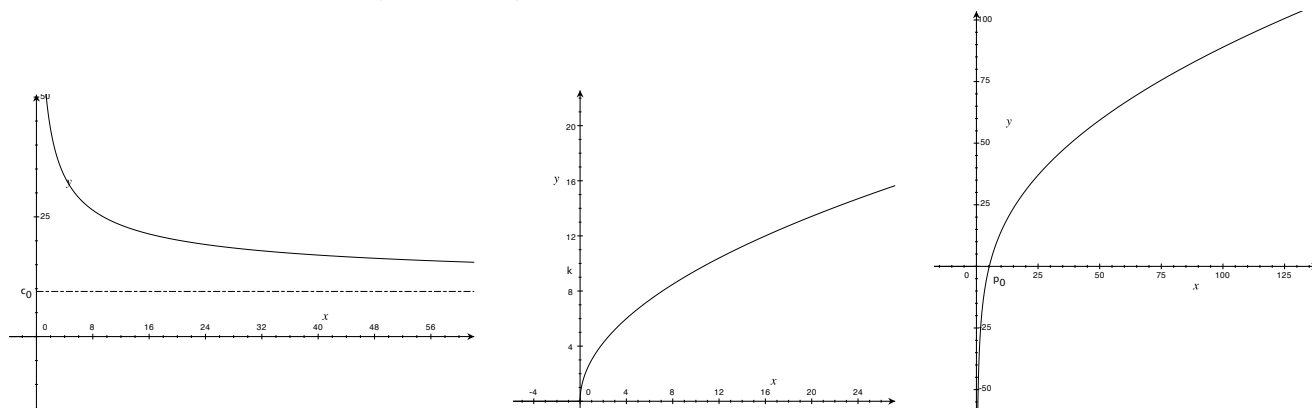
Anzi l'azienda ha interesse ad aumentare i prezzi, perché al crescere del prezzo p il costo di produzione diminuisce e il profitto aumenta; inoltre, man mano che p cresce, cioè man mano che p si sposta verso destra sull'asse delle ascisse, il costo di produzione e il profitto dell'azienda si avvicinano sempre più rispettivamente verso i numeri c_0 e $K - c_0$.

Si noti che se decisioni politiche imponessero all'azienda di produrre quel bene in perdita, cioè ad un prezzo $p < p_0$, allora il grafico mostra che quanto più basso è il prezzo di vendita p , (cioè quanto più p è vicino a 0), tanto più grande è il costo di produzione $C(p)$ e tanto più piccolo è il profitto $\Pi(p)$, (grande in valore assoluto, ma negativo), cioè tanto maggiori sono le perdite per l'azienda; inoltre il costo di produzione e le relative perdite tendono a diventare infinitamente grandi man mano che p si avvicina a 0.

■

Secondo caso: $\alpha = 1/2$ e quindi $C(p) = c_0 + \frac{c_1 k}{\sqrt{p}}$, $R(p) = k\sqrt{p}$, $\Pi(p) = k\sqrt{p} - c_0 - \frac{c_1 k}{\sqrt{p}}$.

Le figure seguenti mostrano (nell'ordine) i grafici di tali funzioni.



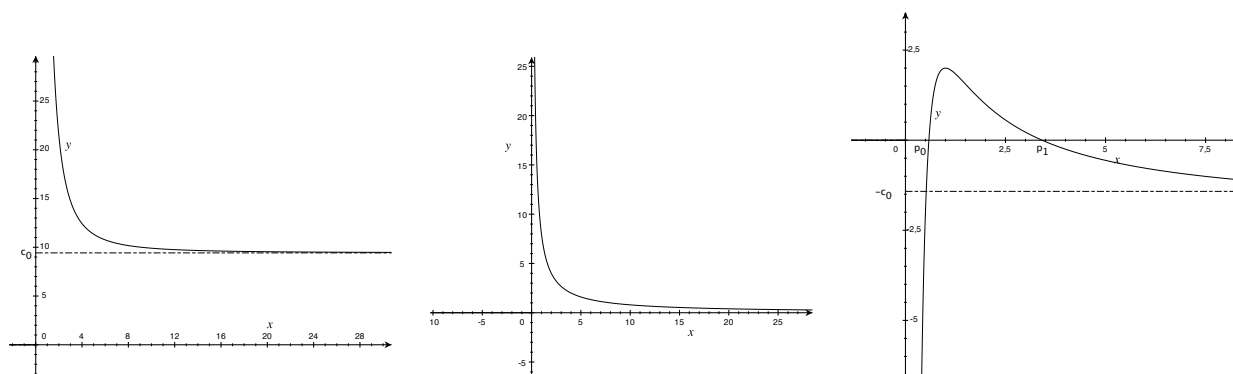
Da tali figure si vede che:

- (1) come prima esiste un livello minimo di prezzo p_0 al disotto del quale l'azienda non ha interesse a produrre,
- (2) l'azienda ha interesse ad aumentare i prezzi, poiché al crescere del prezzo di vendita p , il costo diminuisce, mentre il ricavo e il profitto aumentano, anzi man mano che p cresce il costo di produzione $C(p)$ si avvicina sempre più al costo fisso c_0 , mentre il ricavo $R(p)$ e il profitto $\Pi(p)$ tendono a diventare infinitamente grandi;
- (3) se l'azienda fosse obbligata a vendere ad un prezzo $p < p_1$, allora man mano che p si avvicina a 0 si ha che il costo di produzione tende a diventare sempre più grande, il ricavo $R(p)$ si avvicina sempre più a 0 e il profitto è negativo ed in valore assoluto sempre più grande.

■

Terzo caso: $\alpha = 2$ e quindi $C(p) = c_0 + \frac{c_1 k}{p^2}$, $R(p) = \frac{k}{p}$, $\Pi(p) = \frac{k}{p} - c_0 - \frac{c_1 k}{p^2}$.

Le figure seguenti mostrano i grafici di tali funzioni.



Da tali figure si vede che:

- (1) man mano che p si avvicina a 0 si ha che $C(p)$ ed $R(p)$ tendono a diventare sempre piú grandi mentre $\Pi(p)$ tende a diventare sempre piú piccolo, mentre al crescere di p si ha che $C(p)$, $R(p)$ e $\Pi(p)$ si avvicinano rispettivamente a c_0 , a 0 e a $-c_0$.
- (2) il grafico di Π interseca l'asse delle ascisse in due punti p_0 e p_1 con $0 < p_0 < p_1$ e l'azienda ha interesse a produrre ad un prezzo p compreso tra p_0 e p_1 , anzi avrebbe interesse a produrre al prezzo p^* per cui si ha il massimo profitto.

■

Esempio 5 - Consideriamo una curva *liscia* $\mathcal{C}$ grafico di una funzione f definita in un intervallo I e sia $P_0 = (x_0, f(x_0))$ un punto di $\mathcal{C}$: vogliamo definire il concetto di retta tangente alla curva $\mathcal{C}$.

A tal fine, per ogni $x \neq x_0$, consideriamo il punto $P = (x, f(x)) \in \mathcal{C}$ e la retta congiungente P e P_0 : ovviamente tra i punti del segmento P_0P e i corrispondenti punti del grafico di f ci sono notevoli discrepanze, ma tali discrepanze sono tanto piú contenute quanto piú P é vicino a P_0 , cioè quanto piú x é vicino ad x_0 .

Intuitivamente, quando x si avvicina ad x_0 , e quindi P si avvicina a P_0 , la retta congiungente P_0 con P tende ad una retta che é la retta che piú aderisce alla curva $\mathcal{C}$ vicino al punto P_0 , e che puó essere ragionevolmente definita **retta tangente a $\mathcal{C}$ in P_0** .

Tale retta puó essere identificata come la retta il cui coefficiente angolare é il numero a cui tende il coefficiente angolare $g(x) = [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ della retta P_0P quando x si avvicina ad x_0 .

■

Dagli esempi fatti si deduce che spesso capita di dover descrivere una situazione o affrontare un problema che sono descritti da una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali o piú in generale da una funzione reale f e capita che:

- (1) i termini della successione si avvicinano sempre piú ad un numero reale oppure tendono a diventare sempre piú grandi o tendono a diventare sempre piú piccoli, (cioé sempre piú grandi in valore assoluto ma negativi);
- (2) la funzione f é definita in un insieme X illimitato superiormente e man mano che x si sposta verso destra sull'asse x , il corrispondente valore $f(x)$ si avvicina sempre piú ad un numero reale l oppure tende a diventare sempre piú grande o tende a diventare sempre piú piccolo, (cioé sempre piú grande in valore assoluto ma negativo);
- (3) f é definita in un insieme X illimitato inferiormente e, man mano che x si sposta verso sinistra sull'asse x , si ha che $f(x)$ si avvicina sempre piú ad un numero reale l oppure tende a diventare sempre piú grande o tende a diventare sempre piú piccolo.
- (4) f é definita in un insieme che contiene infiniti punti vicini ad un numero reale x_0 e, man mano che x si avvicina ad x_0 , il corrispondente valore $f(x)$ si avvicina sempre piú ad un numero reale l oppure tende a diventare sempre piú grande o sempre piú piccolo.

n. 2 - Retta ampliata

A questo punto abbiamo bisogno di:

- trovare un adeguato simbolismo per descrivere le diverse situazioni illustrate sopra,
- dare delle definizioni rigorose per descrivere tali situazioni.

Per quanto riguarda la prima di tali questioni possiamo operare come segue.

All'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali aggiungiamo due nuovi simboli: $-\infty$ e $+\infty$ e chiamiamo **retta ampliata** l'insieme $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Ad $\hat{\mathbf{R}}$ viene estesa la relazione di ordine di $\mathbf{R}$ ponendo

$$-\infty < +\infty \quad \text{e} \quad -\infty < a < +\infty \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{R}.$$

In sostanza possiamo pensare a $-\infty$ e a $+\infty$ come a due **punti immaginari** all' "inizio" e alla "fine" della retta reale. Di conseguenza, possiamo pensare a due punti immaginari all'inizio e alla fine sia dell'asse x che dell'asse y .

Diremo allora "per x che tende ad x_0 ", "per x che tende a $+\infty$ " e "per x che tende a $-\infty$ ", (in simboli $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ rispettivamente), anziché dire "man mano che x si avvicina ad x_0 ", "man mano che x si sposta verso destra sull'asse x " e "man mano che x si sposta verso sinistra sull'asse x ".

Diremo inoltre che la successione o la funzione tende verso un numero reale l (in simboli $x_n \rightarrow l$ o $f(x) \rightarrow l$) se i termini della successione o i valori della funzione si avvicinano sempre più al numero l , che dicesi il limite della successione o della funzione.

Diremo invece che la successione o la funzione tende a $+\infty$ (rispett. $-\infty$) se i termini della successione o i valori della funzione tendono a diventare sempre più grandi, (rispett. sempre più piccoli). In effetti, in tal caso la proiezione sull'asse y dei punti del grafico si allontana dall'origine muovendosi verso l'alto, (rispett. verso il basso).

A questo punto rimane da dare una definizione rigorosa e inequivocabile di successione che tende ad un numero, a $+\infty$ e a $-\infty$, nonché di funzione che tende ad un numero, a $+\infty$ e a $-\infty$ per x che tende ad un numero x_0 , a $+\infty$ o a $-\infty$. Questo obiettivo sarà realizzato nei prossimi paragrafi.

3. - Limite di una successione

Partiremo dal concetto di successione che tende a $+\infty$ e a tal fine è opportuno tornare all'Esempio 1 del n. 1: il fatto che con il crescere del numero n di anni il montante C_n dopo n anni di un capitale iniziale C investito al tasso annuo x tende a diventare infinitamente grande, significa intuitivamente che partendo da un capitale iniziale ad esempio di 10000 euro:

- dopo un certo numero di anni certamente avrò un patrimonio maggiore di 20000,
- dovrò magari aspettare qualche altro anno, ma certamente dopo un certo numero di anni avrò un patrimonio maggiore di 50000 euro,
- certamente, prima o poi, io o i miei eredi avranno un patrimonio maggiore di 100000 euro,
- prima o poi, i miei eredi saranno milionari e prima o poi i loro eredi saranno miliardari e così via.

Pertanto, per quanto ambizioso o avido io possa essere, cioè per quanto grande possa essere la ricchezza che voglio accumulare, potrò certamente soddisfare questa mia ambizione, purché sia disposto ad aspettare.

Queste considerazioni ci guidano nel dare la seguente

Definizione 3.1. Diremo che la successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende a $+\infty$, e scriveremo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, se e solo se

$$\text{per ogni } M \in \mathbf{R} \text{ esiste } \bar{n} \in \mathbf{N} \text{ tale che per ogni } n \in \mathbf{N}, n > \bar{n} \text{ si ha } x_n > M.$$

Definizione 3.2. Diremo invece che $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende a $-\infty$, (in simboli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$), se e solo se

$$\text{per ogni } M \in \mathbf{R} \text{ esiste } \bar{n} \in \mathbf{N} \text{ tale che per ogni } n \in \mathbf{N}, n > \bar{n} \text{ si ha } x_n < M.$$

■

Nel caso dell'esempio, M rappresenta il grado di ambizione ed $\bar{n}+1$ rappresenta il numero minimo di anni che devo aspettare per poter dire di avere soddisfatto la mia ambizione. In generale la retta di equazione $y = M$ può essere considerata come un ostacolo da superare, e il fatto che la successione tende a $+\infty$ significa che per quanto alto possa essere questo ostacolo si ha che da un certo indice in poi tutti i termini della successione superano l'ostacolo; il numero $\bar{n}$ rappresenta il numero massimo di termini che devono essere scartati, perché non superano l'ostacolo,

Ovviamente il numero $\bar{n}$ dipende da M : di norma, quanto più grande è M , tanto più grande sarà $\bar{n}$. Infatti, più alto è l'ostacolo, maggiore è il numero di termini da scartare.

Naturalmente, considerazioni simili possono essere fatte per le successioni che tendono a $-\infty$.

■

Passiamo ora a dare la definizione di successione che tende ad un numero; a tal fine può essere utile ripensare all'esempio 3 del paragrafo precedente ed osservare che l'area del cerchio di raggio 1 è il numero π a cui si avvicinano i termini della successione $(S_n)_n$ per n che tende a $+\infty$ nel senso che:

- da un certo indice in poi, l'area del cerchio π e l'area S_n del poligono regolare di 2^{n+1} lati hanno la stessa parte intera, cioè l'errore dell'approssimazione $|S_n - \pi|$ è minore di 1,
- da un certo indice in poi, π ed S_n hanno la stessa parte intera e la stessa prima cifra decimale, cioè l'errore dell'approssimazione $|S_n - \pi|$ è minore di $1/10$,
- da un certo indice in poi, π ed S_n hanno anche la stessa seconda cifra decimale, cioè l'errore dell'approssimazione $|S_n - \pi|$ è minore di $1/100$, ecc.

In generale, fissando in maniera arbitraria un margine di tolleranza $\varepsilon > 0$, da un certo indice in poi, l'errore dell'approssimazione $|S_n - \pi|$ sarà minore di ε .

Queste considerazioni ci guidano nel dare la seguente

Definizione 3.3. Diremo che la successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende o converge verso il numero reale l o che l è il limite della successione $(x_n)_n$, (in simboli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$), se e solo se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \bar{n} \in \mathbf{N} \text{ tale che per ogni } n \in \mathbf{N}, n > \bar{n} \text{ si ha } |x_n - l| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \bar{n} \in \mathbf{N} \text{ tale che per ogni } n \in \mathbf{N}, n > \bar{n} \text{ si ha } l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

■

Nel caso dell'esempio, ε rappresenta il grado di tolleranza accettabile per l'errore dell'approssimazione e $2^{\bar{n}+2}$ rappresenta il numero minimo di lati che deve avere un poligono regolare inscritto nel cerchio per poter approssimare l'area del cerchio con un errore "accettabile".

In generale, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo considerare la "striscia" limitata dalle rette di equazione $y = l - \varepsilon$ ed $y = l + \varepsilon$: il fatto che la successione sia convergente verso l significa che, per quanto stretta possa essere questa striscia, certamente da un certo indice in poi tutti i punti (n, x_n) apparterranno a questa striscia. Il numero $\bar{n}$ rappresenta il numero massimo di punti che devono essere scartati, perché non appartengono alla striscia.

Ovviamente il numero $\bar{n}$ dipende da ε : di norma, quanto più piccolo è ε , tanto più grande sarà $\bar{n}$. Infatti, più stretta è la striscia, maggiore sarà il numero di termini da scartare.

■

4. - Limite di una funzione per x che tende a $+\infty$

Le precedenti Definizioni 3.1 - 3.3 possono essere immediatamente utilizzate per dare le definizioni di limite per x che tende a $+\infty$ di una funzione f definita in un insieme $X \subseteq \mathbf{R}$ illimitato superiormente.

Definizione 4.1. Diremo che f tende a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$, e scriveremo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, se e solo se

per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in X$, $x > \bar{x}$ si ha $f(x) > M$.

■

Definizione 4.2. Diremo che f tende a $-\infty$ per x tendente a $+\infty$, e scriveremo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, se e solo se

per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in X$, $x > \bar{x}$ si ha $f(x) < M$.

■

Definizione 4.3. Diremo infine che f tende o converge verso il numero reale l o che l è il limite della funzione $f(x)$ per x tendente a $+\infty$, (in simboli $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$), se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in X$, $x > \bar{x}$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

o equivalentemente

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in X$, $x > \bar{x}$ si ha $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

■

Il significato geometrico di funzione che tende a $+\infty$ (rispett. $-\infty$) per $x \rightarrow +\infty$ è evidente: per quanto alto (rispett. basso) possa essere l'ostacolo rappresentato dalla retta di equazione $y = M$, certamente da un certo punto $\bar{x}$ in poi il grafico di f passerà al di sopra (rispett. al di sotto) dell'ostacolo $y = M$.

Invece il fatto che f tende ad l significa che per quanto stretta possa essere la striscia limitata dalle rette di equazione $y = l - \varepsilon$ ed $y = l + \varepsilon$, certamente da un certo punto $\bar{x}$ in poi il grafico di f passerà dentro tale striscia.

■

5. - Limite di una funzione per x che tende a $-\infty$

Dalle precedenti Definizioni 4.1 - 4.3 possiamo immediatamente ricavare le definizioni di limite per x che tende a $-\infty$ di una funzione definita in un insieme $X \subseteq \mathbf{R}$ illimitato inferiormente.

Definizione 5.1. Diremo che f tende a $+\infty$ per x tendente a $-\infty$, e scriveremo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, se e solo se

per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in X$, $x < \bar{x}$ si ha $f(x) > M$.

■

Definizione 5.2. Diremo invece che f tende a $-\infty$ per x tendente a $-\infty$, e scriveremo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, se e solo se

per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in X$, $x < \bar{x}$ si ha $f(x) < M$.

■

Definizione 5.3. Diremo infine che f converge verso il numero reale l o che l é il limite della funzione $f(x)$ per x tendente a $-\infty$, (in simboli $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in X$, $x < \bar{x}$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

o equivalentemente

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in X$, $x < \bar{x}$ si ha $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Il significato geometrico di funzione che tende a $+\infty$, $-\infty$ o ad un numero l per $x \rightarrow -\infty$ é evidente.

■

6. - Limite di una funzione per x che tende ad un numero x_0

Cerchiamo ora di estendere il concetto di limite di una funzione $y = f(x)$ man mano che x si avvicina ad un numero reale x_0 rimanendo diverso da x_0 .

In base a quanto visto sopra sará naturale dire che (per $x \rightarrow x_0$) una funzione f :

- tende a $+\infty$ (rispett. $-\infty$) se e solo se per ogni $M \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) > M$ (rispett. $f(x) < M$), purché $x \in X$ sia diverso da x_0 e sufficientemente vicino ad x_0 , cioè purché la distanza $|x - x_0|$ di x da x_0 sia maggiore di 0 e abbastanza piccola,
- converge verso un numero reale l se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ purché la distanza $|x - x_0|$ di x da x_0 sia maggiore di 0 e abbastanza piccola.

Queste considerazioni ci guidano nel dare la seguente

Definizione 6.1. Diremo che f tende a $+\infty$ per $x \rightarrow x_0$, e scriveremo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se e solo se

per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$, si ha: $0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$

o equivalentemente se e solo se

per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}$ si ha $f(x) > M$.

■

Definizione 6.2. Diremo che f tende a $-\infty$ per $x \rightarrow x_0$, e scriveremo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, se e solo se

per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ si ha: $0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < M$

o equivalentemente se e solo se

per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}$ si ha $f(x) < M$.

■

Definizione 6.3. Infine diremo che f converge verso il numero reale l o che l é il limite della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$, (in simboli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$), se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ si ha: $0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

o equivalentemente se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}$ si ha $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

■

Il significato geometrico di funzione tendente a $+\infty$, (rispett. $-\infty$), per $x \rightarrow x_0$ é evidente: per quanto alto (rispett. basso) possa essere l'ostacolo rappresentato dalla retta di equazione $y = M$, certamente esiste $\delta > 0$ tale che la parte di grafico di f compreso nella striscia limitata dalle rette $x = x_0 - \delta$ ed $x = x_0 + \delta$ si trova al di sopra (rispett. al di sotto) dell'ostacolo $y = M$.

Invece il fatto che f tende ad l per $x \rightarrow x_0$ se e solo se, per quanto stretta possa essere la striscia limitata dalle rette $y = l - \varepsilon$ ed $y = l + \varepsilon$, certamente esiste $\delta > 0$ tale che la parte di grafico di f compreso nella striscia limitata dalle rette $x = x_0 - \delta$ ed $x = x_0 + \delta$ si trova tra le rette $y = l - \varepsilon$ ed $y = l + \varepsilon$.

■

Osservazione 6.4 - Il fatto che nelle precedenti definizioni si sia precisato

$$\dots\dots\forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\} \dots\dots$$

sta ad indicare che vogliamo che il valore che f assume in x_0 (se esiste, cioè se $x_0 \in X$) non abbia la minima influenza sull'eventuale limite di f per $x \rightarrow x_0$.

■

7. - Definizione unificata di limite

In definitiva abbiamo dato nove definizioni di limite di una funzione, a seconda che x tenda ad un numero, a $+\infty$ o a $-\infty$ e a seconda che il limite sia un numero, $+\infty$ e $-\infty$; ad esse sarebbero da aggiungere le definizioni 3.1, 3.2 e 3.3 relative alle successioni, che però sono casi particolari delle Definizioni 4.1, 4.2 e 4.3, in quanto una successione non é altro che una funzione il cui insieme di definizione é l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali.

Tutte queste definizioni possono però essere ricondotte ad un'unica definizione di limite attraverso il concetto di retta ampliata $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ e di intorno di un punto di $\hat{\mathbf{R}}$.

Definizione 7.1. *Si dice :*

- **intorno** di $+\infty$ un qualunque intervallo aperto illimitato superiormente, cioè del tipo $]\bar{x}, +\infty[$,
- **intorno** di $-\infty$ un qualunque intervallo aperto illimitato inferiormente, cioè del tipo $] - \infty, \bar{x}[$,
- **intorno** di un numero reale a un qualunque intervallo aperto di centro a , cioè del tipo $]a - r, a + r[$, con $r > 0$.
- **intorno destro** (rispettivamente **sinistro**) di un numero reale a un qualunque intervallo del tipo $]a, a + r[$ (rispettivamente $]a - r, a[$, con $r > 0$.

Per ogni $a \in \hat{\mathbf{R}}$ indicheremo con il simbolo $\mathcal{I}(a)$ l'insieme degli intorni di a .

■

Le nove definizioni 4.1-4.3, 5.1-5.3, 6.1-6.3 possono allora essere ricondotte ad un'unica definizione.

Definizione 7.2 -. *Sia f una funzione reale definita in un insieme $X \subseteq \mathbf{R}$ e siano x_0 ed l elementi di $\hat{\mathbf{R}}$; si pone allora:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \forall I \in \mathcal{I}(l) \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J - \{x_0\} : f(x) \in I,$$

$$\text{dove } I \text{ é del tipo } \begin{cases}]l - \varepsilon, l + \varepsilon[& \text{se } l \in \mathbf{R}, \\]M, +\infty[& \text{se } l = +\infty, \\] - \infty, M[& \text{se } l = -\infty \end{cases} \quad \text{e } J \text{ é del tipo } \begin{cases}]x_0 - \delta, x_0 + \delta[& \text{se } x_0 \in \mathbf{R}, \\]\bar{x}, +\infty[& \text{se } x_0 = +\infty, \\] - \infty, \bar{x}[& \text{se } x_0 = -\infty. \end{cases}$$

■

Osservazione 7.3 - Si noti che affinché la precedente definizione di limite abbia senso occorre che $x_0 \in \hat{\mathbf{R}}$ sia tale che per ogni intorno J di x_0 l'insieme $X \cap J - \{x_0\}$ sia non vuoto, cioè che vicino ad x_0 ci siano altri punti di X diversi da x_0 , anzi che ce ne siano infiniti.

Questo ci porta a dare la seguente definizione.

Definizione 7.4. Si dice che $x_0 \in \hat{\mathbf{R}}$ è un **punto di accumulazione** per X se per ogni intorno J di x_0 risulta $X \cap J - \{x_0\} \neq \emptyset$, cioè se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di X diverso da x_0 , e quindi se in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di X .

Indicheremo con il simbolo $Ac(X)$ l'insieme dei punti di accumulazione di X .

■

E' evidente che:

- 1) $-\infty$ è punto di accumulazione per X se e solo se X è illimitato inferiormente,
- 2) $+\infty$ è punto di accumulazione per X se e solo se X è illimitato superiormente,
- 3) se X è un qualunque intervallo, allora tutti i punti di X e i suoi estremi, (compresi eventualmente $\pm\infty$), sono punti di accumulazione per X ,
- 4) se X è l'unione di due o più intervalli, allora tutti i punti di X e gli estremi degli intervalli di cui X è l'unione sono punti di accumulazione per X .

In definitiva ha senso parlare di limite per $x \rightarrow x_0$ di una funzione f se e solo se x_0 è punto di accumulazione per l'insieme di definizione X di f , ad esempio se

- 1) X è illimitato superiormente (rispett. inferiormente) se $x_0 = +\infty$, (rispett. $-\infty$),
- 2) X è un intervallo oppure l'unione di due o più intervalli, ed x_0 è un punto di X oppure un estremo di uno degli intervalli di cui X è l'unione, (eventualmente $\pm\infty$).

■

Osservazione 7.5 - Dalla Definizione 7.2 si deduce in particolare che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} & \iff \forall \varepsilon > 0 \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J - \{x_0\} : l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty & \iff \forall M \in \mathbf{R} \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J - \{x_0\} : f(x) > M, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty & \iff \forall M \in \mathbf{R} \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J - \{x_0\} : f(x) < M. \end{aligned}$$

Pertanto per provare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, (rispettiv. $-\infty$), occorre:

- fissare arbitrariamente $M \in \mathbf{R}$,
- risolvere la disequazione $f(x) > M$, (rispettiv. $f(x) < M$),
- constatare che l'insieme delle soluzioni di tale disequazione CONTIENE l'intersezione di X con un opportuno intorno di x_0 , privato eventualmente di x_0 .

Invece per provare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbf{R}$, occorre:

- fissare arbitrariamente $\varepsilon > 0$,
- risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} f(x) > l - \varepsilon \\ f(x) < l + \varepsilon \end{cases} \quad \text{o equivalentemente la disequazione } |f(x) - l| < \varepsilon,$$

- constatare che l'insieme delle soluzioni di tale disequazione CONTIENE l'intersezione di X con un opportuno intorno di x_0 , privato eventualmente di x_0 .

■

Esempio 1 - Se risulta $f(x) = c$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora si ha: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ per ogni $x_0 \in \hat{\mathbf{R}}$.

Infatti per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme delle soluzioni della disequazione $|f(x) - c| < \varepsilon$ è l'intera retta reale $\mathbf{R}$, e quindi contiene qualunque intorno di qualunque punto x_0 della retta ampliata $\hat{\mathbf{R}}$.

■

Esempio 2 - Posto $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0 \quad \text{per ogni } x_0 \in \mathbf{R}.$$

Infatti per ogni $M \in \mathbf{R}$ le disequazioni $f(x) > M$ ed $f(x) < M$ sono soddisfatte negli intervalli $]M, +\infty[$ e $] -\infty, M[$, che sono intorni di $+\infty$ e $-\infty$. Infine per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, la disequazione $|f(x) - x_0| < \varepsilon$ è soddisfatta nell'intervallo $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, che è un intorno di x_0 .

■

Esempio 3 - Se risulta $f(x) = mx + q$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = mx_0 + q \quad \text{per ogni } x_0 \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > 0 \\ -\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } m > 0 \\ +\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}.$$

Infatti, fissati $x_0 \in \mathbf{R}$ ed $\varepsilon > 0$, l'insieme delle soluzioni della disequazione $|f(x) - (mx_0 + q)| < \varepsilon$, o equivalentemente $|m(x - x_0)| < \varepsilon$, è esattamente l'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ con $\delta = \varepsilon/|m| > 0$, che è un intorno di x_0 .

D'altra parte, nell'ipotesi che sia $m > 0$, allora per ogni $M \in \mathbf{R}$, gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni $f(x) > M$ ed $f(x) < M$ sono rispettivamente gli intervalli $]\bar{x}, +\infty[$ e $] -\infty, \bar{x}[$, con $\bar{x} = (M - q)/m$, e quindi esattamente un intorno di $+\infty$ ed un intorno di $-\infty$.

Nel caso invece $m < 0$, gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni $f(x) > M$ ed $f(x) < M$ sono rispettivamente gli intervalli $] -\infty, \bar{x}[$ e $]\bar{x}, +\infty[$, cioè un intorno di $-\infty$ ed un intorno di $+\infty$.

Questo dimostra completamente la tesi.

■

Esempio 4 - Si verifica facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ la disequazione $|x^2 - 0| < \varepsilon$ è soddisfatta se e solo se x appartiene all'intervallo $] -\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}[$, che è un intorno di 0.

Invece, fissato $M \in \mathbf{R}$, l'insieme delle soluzioni S della disequazione $x^2 > M$ coincide con $\mathbf{R}$ se $M < 0$ e coincide con l'insieme $] -\infty, \sqrt{M}[\cup]\sqrt{M}, +\infty[$ se $M \geq 0$; in entrambi i casi S contiene sia un intorno di $-\infty$ che un intorno di $+\infty$.

■

Esempio 5 - Per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$ si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Infatti, fissati $x_0 \in \mathbf{R}$ ed $\varepsilon > 0$, dalle disuguaglianze

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \text{e} \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbf{R},$$

si deduce che

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad \implies \quad |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni delle disequazioni $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ e $|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$ contiene l'intervallo $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, che è un intorno di x_0 . Questo dimostra la tesi.

■

PRIMI TEOREMI sui LIMITI

Nel seguito tutte le volte che si parla di limite di una funzione per $x \rightarrow x_0$ supporremo che quel limite abbia senso, e quindi che x_0 sia punto di accumulazione per l'insieme di definizione X di quella funzione, ad esempio che

- 1) X é illimitato superiormente (rispett. inferiormente) se $x_0 = +\infty$, (rispett. $-\infty$),
- 2) X é un intervallo oppure l'unione di due o piú intervalli, ed x_0 é un punto di X oppure un estremo di uno degli intervalli di cui X é l'unione.

■

1. - Il teorema di unicit  del limite

In questo paragrafo dimostreremo un fondamentale risultato, sul quale poggia l'intera teoria dei limiti e che afferma che il limite di una funzione (se esiste) é unico. Per poter enunciare e dimostrare tale teorema é per  opportuno premettere due osservazioni che si riveleranno utili nella dimostrazione di tale teorema e di diversi altri risultati in seguito.

Osservazione 1.1 - Se I_1 ed I_2 sono due intorni di uno stesso punto $a \in \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora risulta $I_1 \subseteq I_2$ oppure $I_2 \subseteq I_1$. Di conseguenza, l'intersezione di due (o pi ) intorni di uno stesso punto a di $\hat{\mathbf{R}}$ é un intorno di a .

Infatti, se $a \in \mathbf{R}$, gli intorni I_1 ed I_2 sono del tipo $I_1 =]a - \delta_1, a + \delta_1[$ ed $I_2 =]a - \delta_2, a + \delta_2[$, ed allora sar  $I_1 \subseteq I_2$ o $I_2 \subseteq I_1$ a seconda che sia $\delta_1 \leq \delta_2$ oppure $\delta_1 > \delta_2$.

Se invece é $a = +\infty$ (rispett. $a = -\infty$), allora I_1 ed I_2 sono del tipo $I_1 =]\bar{x}_1, +\infty[$ ed $I_2 =]\bar{x}_2, +\infty[$, (rispett. $I_1 =]-\infty, \bar{x}_1[$ ed $I_2 =]-\infty, \bar{x}_2[$). Ne segue che sar  $I_1 \subseteq I_2$ o $I_2 \subseteq I_1$ a seconda che sia $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$ o $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, (rispett. a seconda che risulti $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$ o $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$).

■

Osservazione 1.2 - Un' altra fondamentale propriet  degli intorni é la seguente propriet , detta **propriet  di separazione**:

$$a_1, a_2 \in \hat{\mathbf{R}}, a_1 \neq a_2 \implies \exists I_1 \in \mathcal{I}(a_1), \exists I_2 \in \mathcal{I}(a_2) \text{ tali che } I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

Infatti se $a_1 = -\infty$ ed $a_2 = +\infty$ basta porre $I_1 =]-\infty, \bar{x}_1[$ ed $I_2 =]\bar{x}_2, +\infty[$ con $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$.

Se $a_1 = -\infty$ ed $a_2 \in \mathbf{R}$ basta porre $I_1 =]-\infty, \bar{x}_1[$ ed $I_2 =]a_2 - r, a_2 + r[$, con $\bar{x}_1 < a_2 - r$.

Se $a_1 = +\infty$ ed $a_2 \in \mathbf{R}$ basta porre $I_1 =]\bar{x}_1, +\infty[$ ed $I_2 =]a_2 - r, a_2 + r[$, con $\bar{x}_1 > a_2 + r$.

Infine se a_1 ed a_2 sono numeri reali distinti, ad esempio $a_1 < a_2$, basta porre $I_1 =]a_1 - r, a_1 + r[$, ed $I_2 =]a_2 - r, a_2 + r[$, con $0 < r < (a_2 - a_1)/2$.

■

Teorema 1.3 - (Teorema di unicit  del limite). Siano $X \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in \hat{\mathbf{R}} \cap \text{Ac}(X)$ ed $f : X \mapsto \mathbf{R}$; se esistono $l_1, l_2 \in \hat{\mathbf{R}}$ tali che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$, allora si ha $l_1 = l_2$.

Dim.. Supponiamo per assurdo che $l_1 \neq l_2$; allora, per la propriet  di separazione, esistono $I_1 \in \mathcal{I}(l_1)$ ed $I_2 \in \mathcal{I}(l_2)$ tali che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Di conseguenza, per la definizione di limite applicata prima ad l_1 e poi ad l_2 , si ha che in corrispondenza di I_1 ed I_2 esistono due intorni J_1 e J_2 di x_0 tali che

$$f(x) \in I_1 \quad \text{per ogni } x \in X \cap J_1 - \{x_0\} \quad \text{ed} \quad f(x) \in I_2 \quad \text{per ogni } x \in X \cap J_2 - \{x_0\}.$$

Ne segue allora che $J_1 \cap J_2$ è un intorno di x_0 e quindi che $X \cap J_1 \cap J_2 - \{x_0\}$ non è vuoto, dal momento che x_0 è punto di accumulazione di X ; inoltre, per ogni $x \in X \cap J_1 \cap J_2 - \{x_0\}$, si ha che $f(x) \in I_1 \cap I_2$. Questo prova che $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, contraddicendo l'ipotesi che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

■

2 . - Funzioni convergenti, divergenti, continue, discontinue

Sulla base del precedente teorema possiamo procedere ad una classificazione delle funzioni secondo la seguente:

Definizione 2.1 -. Siano $f : X \subseteq \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ ed $x_0 \in \hat{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione di X ; si dice allora che per $x \rightarrow x_0$ la funzione f è:

- a) **regolare** se il limite di f per $x \rightarrow x_0$ esiste in $\hat{\mathbf{R}}$,
- b) **non regolare o oscillante** se il limite di f per $x \rightarrow x_0$ non esiste.

Se f è regolare per $x \rightarrow x_0$, si dice che f è:

- a₁) **divergente positivamente** per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$,
- a₂) **divergente negativamente** per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$,
- a₃) **convergente** per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste ed è un numero reale,
- a₄) **infinitesima** per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Inoltre, si dice che f è :

- c) **continua** in x_0 se $x_0 \in X$, il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste, è un numero reale e coincide con $f(x_0)$;
- d) **continua in X** se è continua in tutti i punti di X ;
- e) **discontinua** in x_0 , (o che x_0 è un punto di discontinuità per f), se $x_0 \in X$ ma f non è continua in x_0 , cioè se il limite di f per $x \rightarrow x_0$ non esiste, oppure esiste ma non è un numero reale, o infine se esiste, è un numero reale ma è diverso da $f(x_0)$.

■

E' opportuno inoltre dare la seguente

Definizione 2.2 -. Se $x_0 \in \mathbf{R}$, allora i limiti per $x \rightarrow x_0$ delle restrizioni di f agli insiemi

$$X_{x_0}^+ = \{x \in X | x > x_0\} \quad e \quad X_{x_0}^- = \{x \in X | x < x_0\},$$

(se esistono), diconsi rispettivamente **limite di f per $x \rightarrow x_0$ da destra e da sinistra**, o anche **limite destro e sinistro** di f per $x \rightarrow x_0$, e si indicano rispettivamente con i simboli

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad o \text{ semplicemente } f(x_0^+) \quad ed \quad f(x_0^-).$$

■

Alla luce di questa definizione è possibile classificare i punti di discontinuità di una funzione.

Definizione 2.3 -. Se $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ è discontinua in un punto x_0 di X , si dice che:

- e₁) x_0 è un **punto di discontinuità di I specie o di "salto"** per f , se i limiti sinistro e destro di f per $x \rightarrow x_0$ esistono entrambi, sono numeri reali, ma sono diversi;
- e₂) x_0 è un **punto di discontinuità di II specie per f** , se uno almeno tra i limiti sinistro e destro di f per $x \rightarrow x_0$ non esiste, o non è un numero;
- e₃) x_0 è un **punto di discontinuità eliminabile o di III specie per f** , se il limite l di f per $x \rightarrow x_0$ esiste, è un numero reale, ma è diverso da $f(x_0)$.

■

Osservazione 2.4 - Da quanto visto agli esempi 1, 2, 3 e 4 del n. 7 del capitolo precedente si deduce che le funzioni costanti $f(x) = c$, la funzione identica $f(x) = x$, le funzioni lineari affini $f(x) = mx + q$, e le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono continue in $\mathbf{R}$.

■

Osservazione 2.5 - Se x_0 appartiene ad un sottoinsieme X di $\mathbf{R}$ ma non è un suo punto di accumulazione, (e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[= \{x_0\}$), allora si dice che x_0 è un **punto isolato** di X . Ad esempio $x_0 = 2$ è punto isolato di $X = [0, 1] \cup \{2\}$.

Se x_0 è un punto isolato di X , converremo che qualunque funzione definita in X sia continua in x_0 .

■

Osservazione 2.6 - Chiaramente il nome di "discontinuità eliminabile" è dovuto al fatto che se si modifica il valore di f in x_0 sostituendo $f(x_0)$ con l , cioè se si considera la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

allora $\bar{f}$ è continua in x_0 .

Se invece $x_0 \notin X$ ma il limite l di f per $x \rightarrow x_0$ esiste ed è un numero reale, allora la funzione $\bar{f} : X \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

è un prolungamento di f ad $X \cup \{x_0\}$ ed è continuo in x_0 ; si dice appunto che in questo caso f ha un prolungamento continuo ad $X \cup \{x_0\}$.

■

n. 3 - Prime proprietà dei limiti

La prima proprietà dei limiti che vale la pena segnalare è contenuta nella Proposizione seguente la quale afferma in sostanza che il limite di una funzione per $x \rightarrow x_0$ dipende solo dai valori che essa assume in un intorno di x_0 .

Proposizione 3.1 - (Carattere locale del limite). Se f e g sono due funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbf{R}$, ed esiste un intorno J_0 di x_0 tale che risulti $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X \cap J_0 - \{x_0\}$, allora si ha che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \hat{\mathbf{R}} \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

In particolare, se esiste un intorno J_0 di x_0 tale che risulti $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X \cap J_0$ e g è continua in x_0 , allora anche f è continua in x_0 .

Dim. Infatti per ogni $I \in \mathcal{I}(l)$ esiste $J_1 \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che per ogni $x \in X \cap J_1 - \{x_0\}$ risulti $g(x) \in I$. Posto $J = J_0 \cap J_1$, si ha allora che J è un intorno di x_0 e per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha $f(x) = g(x) \in I$. Questo dimostra che anche f tende ad l , come volevasi.

■

Esempio 1 - Sia

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq 1, \\ b & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Allora posto $g_1(x) = a$ e $g_2(x) = b$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha che f coincide con g_1 in un intorno di $-\infty$ e coincide con g_2 in un intorno di $+\infty$. Di conseguenza risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g_1(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = b.$$

Analogamente per ogni $x_0 \neq 1$ esiste un intorno di x_0 in cui f coincide con g_1 se $x_0 < 1$ e coincide con g_2 se $x_0 > 1$. Ne segue che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = a & \text{se } x_0 < 1, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = b & \text{se } x_0 > 1. \end{cases}$$

Pertanto f é continua in $\mathbf{R} - \{1\}$. Con lo stesso ragionamento si dimostra che la funzione $f(x) = \text{INT}(x)$ é continua in $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$. ■

Esempio 2 - Per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq -2 \\ bx + c & \text{se } x > -2 \end{cases}, \quad g_1(x) = a, \quad g_2(x) = bx + c;$$

risulta allora :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = a & \text{se } x_0 < -2, & \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = bx_0 + c & \text{se } x_0 > -2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} g_1(x) = a, & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) &= \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0, \\ -\infty & \text{se } b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto f é continua in $\mathbf{R} - \{-2\}$.

■

Proposizione 3.2 - (Teorema della restrizione).

Se esiste $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \hat{\mathbf{R}}$, allora la restrizione di f ad una qualunque parte A di X , di cui x_0 sia punto di accumulazione, tende ad l per $x \rightarrow x_0$.

Infatti, per ogni $I \in \mathcal{I}(l)$ esiste $J \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che risulti $f(x) \in I$ per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$, e quindi per ogni $x \in A \cap J - \{x_0\}$. Questo dimostra che anche $f|_A$ tende ad l per $x \rightarrow x_0$.

■

Esempio 3 - Dal precedente teorema si deduce ad esempio che per ogni $X \subset \mathbf{R}$ e per ogni $x_0 \in \hat{\mathbf{R}} \cap \text{Ac}(X)$ la restrizione ad X di una funzione costante $f(x) = c$ tende a c per $x \rightarrow x_0$.

Esempio 4 - Sia

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq 2 \\ b & \text{se } x > 2 \end{cases}, \quad g_1(x) = a, \quad g_2(x) = b, \quad \text{con } a \neq b.$$

Risulta allora:

$$f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g_1(x) = a, \quad f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g_2(x) = b.$$

Pertanto f ha una discontinuitá di prima specie in $x_0 = 2$.

■

Osservazione 3.3 - Dal teorema della restrizione segue evidentemente il seguente:

Test di non regolarità. *Il limite di f per $x \rightarrow x_0$ non esiste, se esistono due restrizioni che tendono a limiti diversi.*

■

Esempio 5 - La successione $((-1)^n)_n$ non é regolare, dal momento che la restrizione all' insieme dei numeri pari assume costantemente valore 1 e quindi tende ad 1, mentre la restrizione all' insieme dei numeri dispari assume costantemente valore -1 e quindi tende a -1 .

■

Esempio 6 - Il limite per $x \rightarrow \pm\infty$ della funzione $f(x) = \text{Dec}(x) = x - \text{INT}(x)$ non esiste, dal momento che ad esempio la sua restrizione a $\mathbf{Z}$ assume costantemente valore 0 e quindi tende a 0, mentre la sua restrizione all'insieme

$$A = \{x \in \mathbf{R} | x - 1/2 \in \mathbf{Z}\} = \{\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots\}$$

assume costantemente valore $1/2$ e quindi tende ad $1/2$.

Piú in generale una funzione periodica non costante non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$, dal momento che esistono certamente delle restrizioni che tendono a limiti diversi.

Si noti che é proprio a causa di questi ultimi esempi che si da il nome di *funzione oscillante in x_0* alle funzioni di cui non esiste il limite per $x \rightarrow x_0$.

■

Osservazione 3.4 - Dal Test di non regolarità si deduce anche che se il limite sinistro e destro di una funzione f per $x \rightarrow x_0$ esistono e sono diversi, allora il limite di f per $x \rightarrow x_0$ non può esistere.

Viceversa si dimostra che:

Proposizione 3.5 - (Criterio di regolarità).

Se x_0 é punto di accumulazione sia per $X_{x_0}^+ = \{x \in X | x > x_0\}$ che per $X_{x_0}^- = \{x \in X | x < x_0\}$, allora il limite di f per $x \rightarrow x_0$ esiste se e solo se i limiti sinistro e destro esistono e coincidono.

In particolare se $x_0 \in X$ ed é punto di accumulazione sia per $X_{x_0}^+$ che per $X_{x_0}^-$, allora f é continua in x_0 se e solo se risulta $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

Dim. Infatti, se il limite esiste, esistono i limiti delle restrizioni ad $X_{x_0}^+$ e ad $X_{x_0}^-$ e coincidono con il limite; pertanto i limiti sinistro e destro esistono e coincidono.

Viceversa, se i limiti sinistro e destro esistono e coincidono, allora, posto $l = f(x_0^-) = f(x_0^+) \in \hat{\mathbf{R}}$, si vede facilmente che :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Infatti, fissato $I \in \mathcal{I}(l)$ si ha che esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che risulti

$$f(x) \in I \text{ per ogni } x \in X \cap]x_0 - \delta_1, x_0[\quad \text{ed} \quad f(x) \in I \text{ per ogni } x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta_2[.$$

Posto $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, si ha che $\delta > 0$ e risulta $f(x) \in I$ per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}$. Questo dimostra la tesi.

■

Esempio 7 - Sia

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 2, \\ c & \text{se } x > 2; \end{cases}$$

risulta allora $f(2^-) = 2a + b$, $f(2^+) = c$, $f(2) = 2a + b$. Di conseguenza f é continua in $x_0 = 2$ se e solo se risulta $2a + b = c$, mentre ha una discontinuitá di prima specie se risulta $2a + b \neq c$.

Esempio 8 - Sia $f(x) = |x|$, $g_1(x) = -x$, $g_2(x) = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Sappiamo già che f é continua in $\mathbf{R} - \{0\}$, poiché coincide con g_1 nell'intervallo $] - \infty, 0[$ e coincide con g_2 nell'intervallo $]0, +\infty[$, e le funzioni g_1 e g_2 sono continue in $\mathbf{R}$. D'altra parte f é continua in 0, poiché risulta

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0, \quad f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad f(0) = 0.$$

■

Proposizione 3.6 - (Teorema di permanenza del segno).

Se il limite l di f per $x \rightarrow x_0$ esiste (in $\hat{\mathbf{R}}$) ed è diverso da 0, allora esiste un intorno di x_0 in cui $f(x)$ è concorde con l ; in altri termini risulta:

$$l > 0 \quad (\text{risp. } l < 0) \implies \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J - \{x_0\} : f(x) > 0, \quad (\text{risp. } f(x) < 0).$$

Dim. Infatti se $l = +\infty$ (rispett. $l = -\infty$), allora per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha $f(x) > M$, (rispettiv. $f(x) < M$). Prendendo $M = 0$ si ha la tesi.

Se invece l è un numero reale positivo, (rispettiv. negativo), allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Prendendo $\varepsilon = l$ se $l > 0$ ed $\varepsilon = -l$ se $l < 0$ si ha la tesi.

■

Proposizione 3.7 - (Variante del teorema di permanenza del segno).

Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \hat{\mathbf{R}}$ e sia c un numero reale diverso da l ; allora risulta:

$$l > c \quad (\text{risp. } l < c) \implies \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J - \{x_0\} : f(x) > c, \quad (\text{risp. } f(x) < c).$$

Dim. La dimostrazione è simile alla precedente: occorre applicare la definizione di limite per $M = c$ se $l = \pm\infty$ e per $\varepsilon = |l - c|$ se $l \in \mathbf{R}$.

■

Proposizione 3.8 - (Teorema di confronto).

Se esistono (in $\hat{\mathbf{R}}$) i limiti di f e di g per $x \rightarrow x_0$, allora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \implies \exists J \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J - \{x_0\} : f(x) < g(x).$$

Dim. Infatti, fissato $c \in \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < c < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, esistono due intorni J_1 e J_2 di x_0 tali che

$$f(x) < c \quad \forall x \in X \cap J_1 - \{x_0\}, \quad \text{e} \quad g(x) > c \quad \forall x \in X \cap J_2 - \{x_0\}.$$

Posto $J = J_1 \cap J_2$, si ha che J è un intorno di x_0 e per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha $f(x) < c < g(x)$, e quindi $f(x) < g(x)$.

■

Proposizione 3.9 - (Teorema di prolungamento delle disuguaglianze).

Siano f e g funzioni di X in $\mathbf{R}$ regolari in x_0 ; allora si ha che:

$$\exists J_0 \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J_0 - \{x_0\} : f(x) \geq g(x) \implies l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m.$$

Dim. Infatti, se per assurdo fosse $l < m$, allora per il precedente teorema di confronto esisterebbe un intorno J di x_0 tale

$$f(x) < g(x) \quad \text{per ogni } x \in X \cap J - \{x_0\}.$$

Ne seguirebbe che per ogni $x \in X \cap J \cap J_0 - \{x_0\}$ si avrebbe contemporaneamente $f(x) < g(x)$ ed $f(x) \geq g(x)$, e questo é assurdo.

■

Osservazione 3.10 -. Si noti che se risulta $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in X \cap J_0 - \{x_0\}$, allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \text{e non} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Ad esempio si ha $f(x) = |x| > 0 = g(x)$ per ogni $x \neq 0$, ma $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

■

n. 4 - Criteri di convergenza e di divergenza

Per dimostrare che una funzione é convergente o divergente é sufficiente riuscire a confrontarla con altre funzioni di cui si conosce il limite. E' quanto affermano i seguenti criteri di divergenza e di convergenza.

Proposizione 4.1 - (Criterio di divergenza).

Siano $X \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in \hat{\mathbf{R}} \cap \text{Ac}(X)$, ed f, g funzioni di X in $\mathbf{R}$ tali che:

$$\exists J_0 \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J_0 - \{x_0\} : f(x) \leq g(x).$$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Dim. Infatti, se $f(x) \rightarrow +\infty$ (rispett. $g(x) \rightarrow -\infty$), fissato arbitrariamente $M \in \mathbf{R}$ esiste un intorno J_1 di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J_1 - \{x_0\}$ si ha $f(x) > M$, (rispettiv. $g(x) < M$).

Posto $J = J_0 \cap J_1$, si ha che J è un intorno di x_0 e per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ risulta $g(x) \geq f(x) > M$, e quindi $g(x) > M$, (rispettiv. $f(x) \leq g(x) < M$ e quindi $f(x) < M$). Questo dimostra la tesi.

■

Proposizione 4.2 - (Criterio di convergenza o Teorema dei carabinieri).

Siano $X \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in \hat{\mathbf{R}} \cap \text{Ac}(X)$, ed f, g_1 e g_2 funzioni di X in $\mathbf{R}$ tali che:

- 1) $\exists J_0 \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } \forall x \in X \cap J_0 - \{x_0\} : g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x),$
- 2) g_1 e g_2 convergono verso lo stesso limite $l \in \mathbf{R}$ per $x \rightarrow x_0$.

Allora anche f converge verso l per $x \rightarrow x_0$.

Dim. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, esistono due intorni J_1 e J_2 di x_0 tali che

$$\begin{aligned} l - \varepsilon < g_1(x) < l + \varepsilon & \quad \text{per ogni } x \in X \cap J_1 - \{x_0\}, \\ l - \varepsilon < g_2(x) < l + \varepsilon & \quad \text{per ogni } x \in X \cap J_2 - \{x_0\}. \end{aligned}$$

Posto $J = J_0 \cap J_1 \cap J_2$, si ha che J è un intorno di x_0 e per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha:

$$l - \varepsilon < g_1(x) \leq f(x) \leq g_2 < l + \varepsilon \quad \text{e quindi} \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Questo prova che f tende ad l , come volevasi.

■

Esempio 1 - Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{INT}(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{INT}(x) = +\infty.$$

Infatti, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $\text{INT}(x) \leq x < \text{INT}(x) + 1$, e quindi $\text{INT}(x) \leq x$ e $\text{INT}(x) > x - 1$; d'altra parte risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$. La tesi discende allora dal criterio di divergenza.

■

Esempio 2 - Dal criterio di divergenza segue pure che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}.$$

Infatti la prima parte della tesi segue dal fatto che risulta $x^n \geq x$ per ogni $x > 1$ e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

La seconda parte della tesi discende invece dal fatto che per ogni $x < -1$ si ha

$$x^n = \begin{cases} |x|^n > |x| = -x & \text{se } n \text{ é pari} \\ -|x|^n < -|x| = x & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases},$$

e che $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

■

Esempio 3 - Dal teorema dei carabinieri si deduce invece il seguente limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Infatti, per ogni $x \in]0, \pi/2[$ risulta

$$0 < \text{sen } x < x < \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \quad \text{e quindi} \quad \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1.$$

D'altra parte, per ogni $x \in]-\pi/2, 0[$ risulta $-x \in]0, \pi/2[$ e quindi

$$\cos(-x) < \frac{\text{sen}(-x)}{-x} < 1, \quad \text{cioé} \quad \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1.$$

In definitiva si ha:

$$\cos x < (\text{sen } x)/x < 1 \quad \text{per ogni } x \in]-\pi/2, \pi/2[- \{0\};$$

di qui, e dall'essere $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, per il teorema dei carabinieri si deduce che anche la funzione $\text{sen } x/x$ tende ad 1 per $x \rightarrow 0$.

■

CALCOLO DEI LIMITI

In questo capitolo impareremo a calcolare i limiti di funzioni complesse utilizzando i limiti noti di funzioni più semplici.

1 . - Alcune considerazioni preliminari

Osservazione 1.1- Cominciamo con l'osservare che dalla definizione di funzione convergente o divergente si deduce immediatamente che

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0. \\
 (2) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = -l \\
 (3) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \implies \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = +\infty, \\
 (4) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \implies \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = -\infty.
 \end{aligned}$$

Osservazione 1.2- D'altra parte, se risulta $f(x) \neq 0$ per ogni x , allora si ha :

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \implies \lim_{x \rightarrow x_0} 1/f(x) = 0, \\
 (6) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} 1/|f(x)| = +\infty. \\
 (7) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} - \{0\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} 1/f(x) = 1/l
 \end{aligned}$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, si ha che in corrispondenza di $M = 1/\varepsilon$, (rispett. $M = -1/\varepsilon$), esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha

$$f(x) > M = 1/\varepsilon > 0, \quad (\text{rispett. } f(x) < M = -1/\varepsilon < 0),$$

e quindi $|1/f(x)| = 1/f(x) < \varepsilon$, (rispett. $|1/f(x)| = -1/f(x) < \varepsilon$), ciò che prova la (5).

Infine, per provare la (6), fissiamo $M \in \mathbf{R}$ e proviamo che esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha $1/|f(x)| > M$.

Ebbene, se $M \leq 0$, allora qualunque intorno di x_0 soddisfa la tesi; se invece $M > 0$, allora, posto $\varepsilon = 1/M > 0$, si ha che esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha $|f(x)| < \varepsilon = 1/M$ e quindi $1/|f(x)| > M$, come volevasi.

La dimostrazione di (7) è più tecnica e viene omessa per semplicità. ■

Osservazione 1.3 - Nelle ipotesi della (6) della Osservazione 1.2, per poter concludere se il limite per $x \rightarrow x_0$ di $1/f$ è $+\infty$, $-\infty$ o non esiste affatto, occorre qualche ulteriore informazione sul segno di f .

Infatti, se esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si abbia $f(x) > 0$, e quindi $1/f(x) = 1/|f(x)|$, allora $1/f$ è, al pari di $1/|f|$, divergente positivamente; se invece esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha $f(x) < 0$, e quindi $1/f(x) = -1/|f(x)|$, allora $1/f$ è, al pari di $-1/|f|$, divergente negativamente.

Analogamente se esiste un intorno destro o sinistro di x_0 in cui è $f(x) > 0$, (rispett. $f(x) < 0$), allora $1/f$ sarà divergente positivamente, (rispett. negativamente), per x che tende ad x_0 da destra o da sinistra..

In definitiva, se $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$, allora per calcolare il limite di $1/f$ occorre risolvere le disequazioni $f(x) > 0$ ed $f(x) < 0$, per vedere se sono soddisfatte in un intorno completo di x_0 , o in un intorno destro, o in un intorno sinistro.

Ad esempio, dalla (2) e dal fatto che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x - 3 = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$ si deduce che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x - 3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Invece, dalla (3), dal fatto che $x^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$ e dal fatto che $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ si deduce che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^2|} = +\infty$$

D'altra parte, essendo $f(x) = 2x - 3 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 3/2$ ed $f(x) > 0$ se e solo se $x > 3/2$, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{1}{|2x - 3|} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (3/2)^+} \frac{1}{2x - 3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (3/2)^-} \frac{1}{2x - 3} = -\infty.$$

■

Osservazione 1.4 - Si vede facilmente che:

- a) se f é infinitesima per $x \rightarrow x_0$ e g é limitata, allora anche fg é infinitesima per $x \rightarrow x_0$;
- b) se f é divergente positivamente, (rispett. negativamente), e g é limitata inferiormente, (rispett. superiormente), allora anche $f + g$ é divergente positivamente, (negativamente);
- c) se f é divergente positivamente, (rispett. negativamente), e g é limitata inferiormente da una costante $c > 0$, allora fg é divergente positivamente, (negativamente);
- d) se f é divergente positivamente, (rispett. negativamente), e g é limitata superiormente da una costante $c < 0$, allora fg é divergente negativamente, (rispett. positivamente).

Ad esempio risulta

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \sin(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x[2 + \sin(x)] = \pm\infty$$

e simili.

Per provare la a), fissiamo un numero reale $K > 0$ tale che $|f(x)| \leq K$ per ogni x ed un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario; dall'essere $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$ si deduce che, in corrispondenza di $\varepsilon/K > 0$, esiste un intorno J di x_0 in cui risulti $|g(x)| < \varepsilon/K$ e quindi $|f(x)g(x) - 0| = |f(x)| \cdot |g(x)| < (\varepsilon/K) \cdot K = \varepsilon$. Questo prova che $f(x)g(x) \rightarrow 0$, come volevasi.

D'altra parte, detto c un numero reale tale che $f(x) \geq c$, (rispett. $f(x) \leq c$), per ogni x e fissato $M \in \mathbf{R}$ arbitrario, dal fatto che $g(x) \rightarrow +\infty$ (rispett. $-\infty$) per $x \rightarrow x_0$ si deduce che, in corrispondenza di $M - c$, esiste un intorno J di x_0 in cui risulti $g(x) > M - c$, (rispett. $g(x) < M - c$), e quindi

$$f(x) + g(x) > c + (M - c) = M, \quad (\text{rispett. } f(x) + g(x) < c + (M - c) = M).$$

Questo prova che $f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$, (rispett. $-\infty$), come vuole la b).

Il ragionamento é simile nei casi c) e d): basta sostituire $+$ con $\cdot$ ed $M - c$ con M/c .

■

Osservazione 1.5 - A causa del carattere locale del limite, le condizioni a), b), c) e d) continuano a valere se si sostituisce "limitata (rispett. limitata inferiormente o superiormente)" con "localmente limitata (rispett. localmente limitata inferiormente o superiormente)", nel senso che é limitata (rispett. limitata inferiormente o superiormente) la restrizione di g ad un opportuno intorno di x_0 .

■

n. 2 - Operazioni tra limiti

Il teorema che segue permette di calcolare il limite di funzioni ottenute sommando, moltiplicando o dividendo funzioni più semplici di cui conosciamo i limiti. La dimostrazione utilizza in maniera intensiva quanto visto nelle precedenti Osservazioni 1.4 ed 1.5, ma ne omettiamo i dettagli per brevità.

Teorema 2.1. *Siano f e g due funzioni reali definite in un insieme $X \subseteq \mathbf{R}$, sia $x_0 \in \hat{\mathbf{R}}$ un punto di accumulazione di X e supponiamo che esistano (in $\hat{\mathbf{R}}$) i limiti l ed m di f e g per $x \rightarrow x_0$.*

Si ha allora che:

a) *il limite della funzione somma $f+g$ è uguale alla somma $l+m$ dei limiti di f e g , con le convenzioni*

$$\pm\infty + c = \pm\infty, \text{ per ogni } c \in \mathbf{R}, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty;$$

b) *il limite della funzione prodotto $f \cdot g$ è uguale al prodotto $l \cdot m$ dei limiti di f e g , con le convenzioni*

$$c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0, \end{cases} \quad c \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty;$$

c) *se x_0 è punto di accumulazione per l'insieme $\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$ e il limite m di g è diverso da 0, allora il limite della funzione rapporto f/g è uguale al rapporto l/m dei limiti di f e g , con le convenzioni*

$$c/\pm\infty = 0, \quad \pm\infty/c = \pm\infty \cdot (1/c).$$

■

Osservazione 2.2 - Si noti che nulla si dice del limite delle funzioni:

$f+g$, se i due addendi f e g divergono uno positivamente e l'altro negativamente,

$f \cdot g$, se uno dei due fattori tende a 0 e l'altro diverge (positivamente o negativamente),

f/g , quando f e g tendono entrambe a 0 oppure sono entrambe divergenti.

In tali casi non esiste una regola fissa per calcolare il limite di $f+g$, $f \cdot g$ o f/g ; bisognerà quindi studiare tali limiti caso per caso. Si dice che i casi

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad 0/0, \quad (\pm\infty)/(\pm\infty)$$

sono **forme indeterminate**.

■

Osservazione 2.3 - Il teorema non dice nulla neppure del limite del rapporto f/g quando f tende ad $l \neq 0$ e g tende a 0. Questa non è però una forma indeterminata, nel senso che il limite di f/g si riconduce al limite del prodotto $f \cdot (1/g)$, e sappiamo, (per quanto visto nelle Osservazioni 1.2 ed 1.3), che $1/|g|$ tende a $+\infty$, mentre, per quanto concerne il limite di $1/g$, (e di conseguenza di f/g), occorre risolvere la disequazione $g(x) > 0$, per vedere se essa, (o la sua opposta $g(x) < 0$), è soddisfatta in un intorno completo o in un intorno destro o in un intorno sinistro di x_0 .

Ad esempio, posto $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x - 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora per $x \rightarrow 1$ si ha che $f(x) \rightarrow -1$ e $g(x) \rightarrow 0$; inoltre è $g(x) > 0$ se e solo se $x > 1$, e quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1} = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1} = (-1) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

■

Corollario 2.4 . *Se f e g sono funzioni continue in un punto $x_0 \in X$, allora $f + g$ ed $f \cdot g$ sono continue in x_0 ; inoltre, se risulta $g(x_0) \neq 0$, allora anche f/g è continua in x_0 .*

Ne segue che la somma, il prodotto e il rapporto di due funzioni continue in tutto il loro insieme di definizione sono funzioni continue nel loro insieme di definizione.

Dim. Infatti, per quanto detto nella Osservazione 2.5 del capitolo precedente, la tesi è ovvia se x_0 è punto isolato per l'insieme di definizione di $f+g$, $f \cdot g$ o f/g . Se invece x_0 è punto di accumulazione per tale insieme, allora dal Teorema 2.4 si deduce che il limite per $x \rightarrow x_0$ di $f+g$, $f \cdot g$ ed f/g è uguale rispettivamente ad $f(x_0) + g(x_0)$, $f(x_0) \cdot g(x_0)$ ed $f(x_0)/g(x_0)$, e questo prova la tesi.

■

Corollario 2.5. *Per ogni $n \in \mathbf{N}$ la funzione $f(x) = x^n$ è continua in $\mathbf{R}$. Si ha inoltre:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Dim. Infatti f è il prodotto di n fattori coincidenti con la funzione identica $g(x) = x$, e sappiamo che g è continua in $\mathbf{R}$ e tende a $\pm\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

■

Osservazione 2.6 - Sia $f(x) = x^2 + 3x + 5$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Evidentemente f è somma della funzione continua $g_1(x) = x^2$ con la funzione continua $g_2(x) = 3x + 5$, e quindi è continua anch'essa.

D'altra parte risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 5 = +\infty, \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + 5 = +\infty.$$

Invece per $x \rightarrow -\infty$ si ha che $x^2 \rightarrow +\infty$ e $3x + 5 \rightarrow -\infty$, e quindi il limite di f si presenta in forma indeterminata $+\infty - \infty$. La forma indeterminata si scioglie però facilmente, osservando che risulta:

$$f(x) = x^2 + 3x + 5 = x^2 \cdot (1 + 3/x + 5/x^2) \quad \text{per ogni } x \neq 0,$$

e che per $x \rightarrow -\infty$ si ha che $x^2 \rightarrow +\infty$, $3/x \rightarrow 0$, $5/x^2 \rightarrow 0$, $1 + 3/x + 5/x^2 \rightarrow 1 + 0 + 0 = 1$, e quindi $f(x) \rightarrow +\infty$.

■

Più in generale si ha il seguente

Corollario 2.7. *Ogni funzione polinomio, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, è continua in $\mathbf{R}$.*

Risulta inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

Dim. Infatti p è la somma di una funzione costante a_0 con un numero finito di prodotti di una funzione costante a_k con una funzione potenza x^k . Dal momento che tutte queste funzioni sono continue in $\mathbf{R}$, anche p è continua in $\mathbf{R}$.

La seconda parte della tesi deriva dall'essere:

$$p(x) = x^n(a_0/x^n + a_1/x^{n-1} + a_2/x^{n-2} + \dots + a_{n-1}/x + a_n) \quad \text{per ogni } x \neq 0,$$

e dal fatto che le funzioni a_0/x^n , a_1/x^{n-1} , $\dots$, a_{n-1}/x tendono a 0 per $x \rightarrow \pm\infty$.

■

Corollario 2.8. Siano $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$ due polinomi; allora la funzione razionale fratta $f(x) = p(x)/q(x)$ é continua nel suo insieme di definizione, cioè nell'insieme $\{x \in \mathbf{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Risulta inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_k} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}.$$

Dim. La prima parte della tesi é ovvia. La seconda segue dall'essere:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n(a_0/x^n + a_1/x^{n-1} + a_2/x^{n-2} + \dots + a_{n-1}/x + a_n)}{x^k(b_0/x^k + b_1/x^{k-1} + b_2/x^{k-2} + \dots + b_{k-1}/x + b_k)},$$

e dal fatto che il secondo fattore del numeratore tende ad a_n mentre il secondo fattore del denominatore tende a b_k .

■

Osservazione 2.9 - Si noti che, con le notazioni del precedente Corollario 2.8, si ha che:

- (1) se p e q hanno lo stesso grado, $n = k$, allora $f = p/q$ converge, (per $x \rightarrow \pm\infty$), verso il rapporto a_n/b_k tra i coefficienti dei termini di grado massimo di p e q ,
- (2) se il numeratore p ha grado n minore del grado k del denominatore q , allora per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha che $f = p/q$ tende verso $(a_n/b_k) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/x^{k-n}$, cioè tende a 0 ,
- (3) se il numeratore p ha grado n maggiore del grado k del denominatore q , allora $f = p/q$ é divergente per $x \rightarrow \pm\infty$, e precisamente tende verso $(a_n/b_k) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-k}$.

■

Osservazione 2.10 - Dal Corollario 2.4 e dalla continuità in $\mathbf{R}$ delle funzioni circolari $\text{sen}x$ e $\text{cos}x$, segue che le funzioni $\text{tg}x = (\text{sen}x)/(\text{cos}x)$ e $\text{cotg}x = (\text{cos}x)/(\text{sen}x)$ sono continue nel loro insieme di definizione.

D'altra parte per $x \rightarrow \pi/2$ si ha che $\text{sen}x \rightarrow 1$ e $\text{cos}x \rightarrow 0$; inoltre risulta $\text{cos}x > 0$ per ogni $x \in]0, \pi/2[$ e $\text{cos}x < 0$ per ogni $x \in]\pi/2, \pi[$. Se ne deduce, per quanto detto nella Osservazione 1.3, che

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \text{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \text{tg} x = -\infty.$$

Piú in generale si ha

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2+k\pi)^-} \text{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2+k\pi)^+} \text{tg} x = -\infty \quad \text{per ogni } k \in \mathbf{Z}.$$

Analogamente si vede che

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} \text{cotg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} \text{cotg} x = +\infty \quad \text{per ogni } k \in \mathbf{Z}.$$

■

Osservazione 2.11 - Talvolta esiste il limite della somma o del prodotto di due funzioni f e g , anche se non esistono i limiti di entrambe le funzioni, e quindi anche se non siamo nelle condizioni di poter applicare il Teorema 2.1. Si veda al riguardo quanto detto nella precedente Osservazione 1.4.

n. 3 - Limite e continuità delle funzioni monotone

In questo paragrafo arricchiremo il repertorio di funzioni di cui conosciamo il limite, poiché impareremo a calcolare i limiti di una importante classe di funzioni: le funzioni crescenti o decrescenti. Sussiste infatti il seguente

Teorema 3.1 - (sui limiti delle funzioni crescenti o decrescenti).

Sia $f : X \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ crescente nell'intervallo X e siano

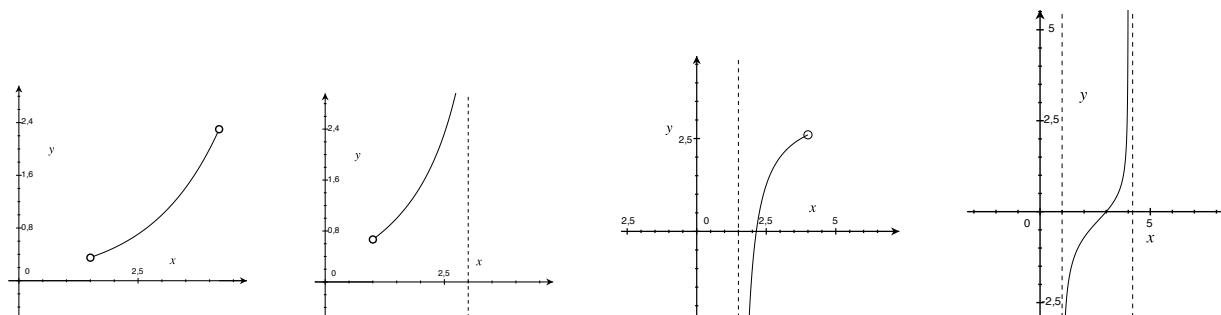
$$a = \inf(X) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \quad e \quad b = \sup(X) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\};$$

allora esistono i limiti di f per $x \rightarrow a^+$ e per $x \rightarrow b^-$ e risulta:

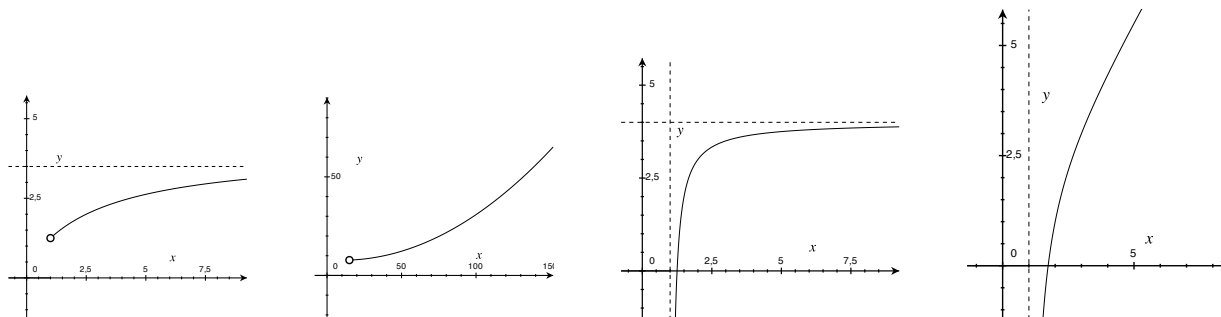
$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha = \inf f(]a, b[) \in \hat{\mathbf{R}}, \quad \exists f(b^-) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \beta = \sup f(]a, b[) \in \hat{\mathbf{R}}.$$

Se f è decrescente, si hanno gli stessi risultati semplicemente scambiando $\inf$ con $\sup$.

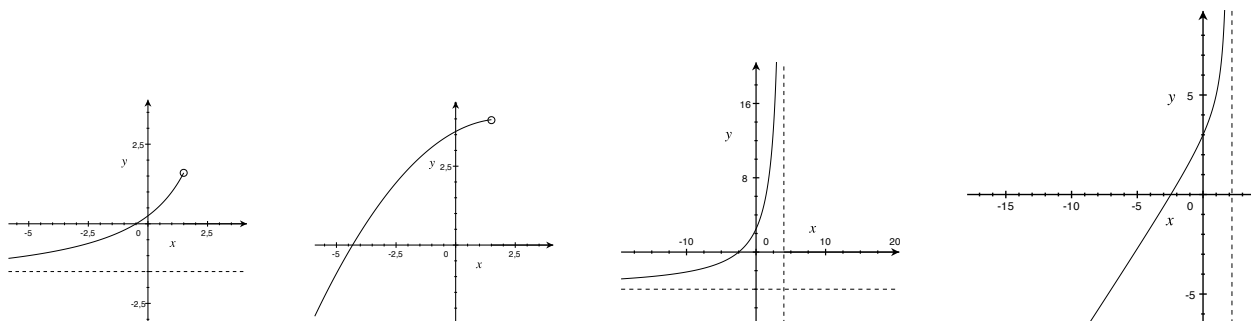
Le figure seguenti illustrano la tesi nel caso in cui a e b siano numeri reali ed α e β sono rispettivamente tali che $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ oppure $\alpha \in \mathbf{R}, \beta = +\infty$ oppure $\alpha = -\infty, \beta \in \mathbf{R}$ oppure $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$.



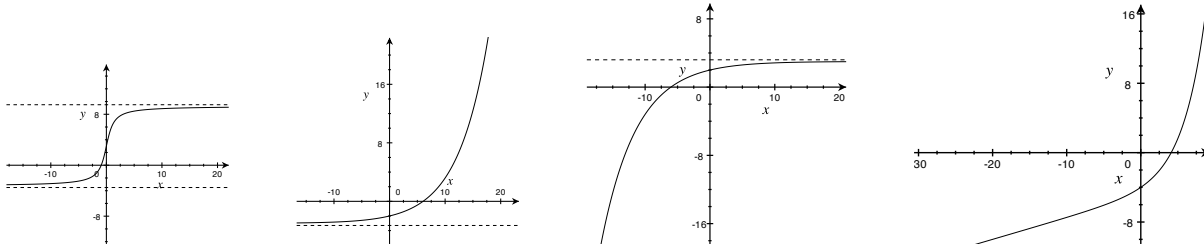
Le figure seguenti illustrano invece la tesi nel caso in cui $a \in \mathbf{R}$ e $b = +\infty$ ancora nei casi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ oppure $\alpha \in \mathbf{R}, \beta = +\infty$ oppure $\alpha = -\infty, \beta \in \mathbf{R}$ oppure $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ rispettivamente.



Le figure seguenti illustrano invece la tesi nel caso in cui $a = -\infty$ e $b \in \mathbf{R}$ nei diversi casi descritti prima.



Infine le figure seguenti illustrano la tesi nel caso in cui $a = -\infty$ e $b = +\infty$ nei diversi casi descritti prima.



I dettagli della dimostrazione sono omessi per semplicità.

■

Esempio 1 - Sappiamo che la funzione radice n -sima aritmetica, cioè la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ tale che $f(x) = \sqrt[n]{x}$ per ogni $x \in]0, +\infty[$, è strettamente crescente ed è tale che $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$.

Dal Teorema 2.1 segue allora che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = \inf f(]0, +\infty[) = \inf(]0, +\infty[) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = \sup f(]0, +\infty[) = \sup(]0, +\infty[) = +\infty.$$

■

Esempio 2 - Sia α un numero reale diverso da 0 e sia f la funzione potenza di esponente α , cioè la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ tale che $f(x) = x^\alpha$ per ogni $x \in]0, +\infty[$; sappiamo che risulta $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$ e che f è strettamente crescente o strettamente decrescente a seconda che risulti $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$.

Dal Teorema 2.1 segue allora che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = \begin{cases} \inf f(]0, +\infty[) = \inf(]0, +\infty[) = 0, & \text{se } \alpha > 0, \\ \sup f(]0, +\infty[) = \sup(]0, +\infty[) = +\infty, & \text{se } \alpha < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} \sup f(]0, +\infty[) = \sup(]0, +\infty[) = +\infty, & \text{se } \alpha > 0, \\ \inf f(]0, +\infty[) = \inf(]0, +\infty[) = 0, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

■

Esempio 3 - Sia a un numero reale maggiore di 0 e diverso da 1 e sia f la funzione esponenziale in base a , cioè la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $f(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; sappiamo che risulta $f(\mathbf{R}) =]0, +\infty[$ e che f è strettamente crescente o strettamente decrescente a seconda che risulti $a > 1$ o $a < 1$.

Dal Teorema 3.1 segue che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} \inf f(\mathbf{R}) = \inf(]0, +\infty[) = 0, & \text{se } a > 1, \\ \sup f(\mathbf{R}) = \sup(]0, +\infty[) = +\infty, & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} \sup f(\mathbf{R}) = \sup(]0, +\infty[) = +\infty, & \text{se } a > 1, \\ \inf f(\mathbf{R}) = \inf(]0, +\infty[) = 0, & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

■

Esempio 4 - Sia a un numero reale maggiore di 0 e diverso da 1 e sia f la funzione logaritmo in base a , cioè la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ tale che $f(x) = \log_a(x)$ per ogni $x \in]0, +\infty[$; sappiamo che risulta $f(]0, +\infty[) = \mathbf{R}$ e che f è strettamente crescente o strettamente decrescente a seconda che risulti $a > 1$ o $a < 1$.

Dal Teorema 3.1 segue quindi che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} \inf f(]0, +\infty[) = \inf(\mathbf{R}) = -\infty, & \text{se } a > 1, \\ \sup f(]0, +\infty[) = \sup(\mathbf{R}) = +\infty, & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} \sup f(\mathbf{R}) = \sup(]0, +\infty[) = +\infty, & \text{se } a > 1, \\ \inf f(\mathbf{R}) = \inf(]0, +\infty[) = -\infty, & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

■

Esempio 5 - Siano f e g rispettivamente la funzione arcotangente ed arcocotangente. Sappiamo che f é strettamente crescente e che g é strettamente decrescente; sappiamo inoltre che risulta

$$f(\mathbf{R}) =]-\pi/2, \pi/2[, \quad g(\mathbf{R}) =]0, \pi[.$$

Dal Teorema 3.1 segue che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(x) &= \inf f(\mathbf{R}) = \inf(]-\pi/2, \pi/2[) = -\pi/2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x) &= \sup f(\mathbf{R}) = \sup(]-\pi/2, \pi/2[) = \pi/2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg}(x) &= \sup g(\mathbf{R}) = \sup(]0, \pi[) = \pi, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg}(x) &= \inf g(\mathbf{R}) = \inf(]0, \pi[) = 0. \end{aligned}$$

■

Il comportamento delle funzioni monotone può essere ulteriormente approfondito: sussiste infatti il seguente

Teorema 3.2 -. Sia $f : X \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ crescente nell'intervallo X e siano

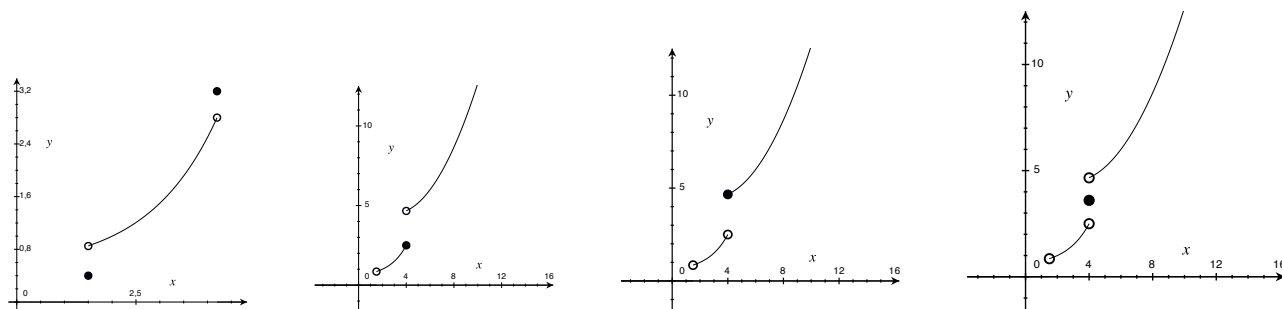
$$a = \inf(X) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \quad e \quad b = \sup(X) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\};$$

allora si ha quanto segue:

- (1) se $a \in X$, allora il limite di f per $x \rightarrow a$ é un numero reale maggiore o uguale ad $f(a)$,
se $b \in X$, allora il limite di f per $x \rightarrow b$ é un numero reale minore o uguale ad $f(b)$,
- (2) se $x_0 \in]a, b[$, allora i limiti sinistro e destro di f per $x \rightarrow x_0$ esistono, sono numeri reali e risulta:

$$f(x_0^-) = \sup f(]a, x_0[) \leq f(x_0) \leq \inf f(]x_0, b[) = f(x_0^+).$$

Se f é decrescente, si ha lo stesso risultato, scambiando $\inf$ con $\sup$ e $\leq$ con $\geq$ e viceversa.



Dim di 1). Se f é crescente ed $a \in X$, allora $f(a)$ é un minorante di $f(]a, b[)$; ne segue che l'estremo inferiore di $f(]a, b[$ é un numero reale ed é maggiore o uguale ad $f(a)$.

Analogamente, se $b \in X$, allora $f(b)$ é un maggiorante di $f(]a, b[)$; ne segue che l'estremo superiore di $f(]a, b[$ é un numero reale ed é minore o uguale ad $f(b)$.

Questo dimostra la tesi, dal momento che, per il Teorema 3.1, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(]a, b[$ sono i limiti di f per $x \rightarrow a$ e per $x \rightarrow b$.

Dim. di 2). Fissato $x_0 \in]a, b[$, le restrizioni di f agli intervalli $]a, x_0]$ ed $[x_0, b[$ sono crescenti al pari di f , e quindi i loro limiti per $x \rightarrow x_0$, (cioé i limiti di f per x che tende ad x_0 da sinistra e da destra), esistono, sono numeri reali e sono rispettivamente minore o uguale e maggiore o uguale ad $f(x_0)$. Questo dimostra la tesi.

Il ragionamento é simile nel caso in cui f é decrescente.

■

Dal precedente teorema segue che se f é una funzione crescente o decrescente in un intervallo X , allora:

- a) negli eventuali estremi di X si ha che f é continua oppure ha una discontinuitá eliminabile,
- b) nei punti interni $x_0 \in]a, b[$ si ha che f é continua oppure ha una discontinuitá di I specie.

In ogni caso, le figure precedenti mostrano che se f é una funzione crescente ed ha un punto di discontinuitá in uno degli estremi o in un punto interno, allora l'insieme immagine di f non é un intervallo. Sussiste infatti il seguente

Teorema 3.3 - (Criterio di continuitá delle funzioni crescenti o decrescenti).

Se $f : X \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é crescente o decrescente nell'intervallo $X \subseteq \mathbf{R}$ ed $f(X)$ é un intervallo, allora f é continua in X .

Dim. Supponiamo che f sia crescente; il ragionamento é simile nel caso in cui f é decrescente.

Ebbene, se per assurdo f fosse discontinua in un punto x_0 , allora risulterebbe

$$x_0 < b \quad \text{ed} \quad f(x_0) < f(x_0^+) \quad \text{oppure} \quad x_0 > a \quad \text{ed} \quad f(x_0) > f(x_0^-).$$

Nel primo caso, per ogni $x \in X$ si avrebbe $f(x) \leq f(x_0)$ se $x \leq x_0$ ed $f(x) \geq f(x_0^+)$ se $x > x_0$ e quindi nessun $y \in]f(x_0), f(x_0^+)$ appartiene ad $f(X)$. Nel secondo caso, per ogni $x \in X$ si avrebbe $f(x) \geq f(x_0)$ se $x \geq x_0$ ed $f(x) \leq f(x_0^-)$ se $x < x_0$ e quindi nessun $y \in]f(x_0^-), f(x_0)$ appartiene ad $f(X)$.

In entrambi i casi si avrebbe che $f(X)$ non é un intervallo, contraddicendo l'ipotesi.

■

Corollario 3.4 - (Continuitá delle funzioni elementari.).

Le funzioni $y = \sqrt[n]{x}$, $y = x^\alpha$, $y = a^x$, $y = \log_a(x)$ e le funzioni circolari inverse $y = \arcsen(x)$, $y = \arccos(x)$, $y = \arctg(x)$, $y = \operatorname{arccotg}(x)$ sono continue nel loro insieme di definizione.

Infatti esse sono strettamente crescenti o decrescenti, sono definite in un intervallo ed il loro insieme immagine é un intervallo.

■

n. 4 - Limiti delle successioni monotone - Numero di Nepero - Funzione esponenziale

Nell'enunciato del Teorema 2.1 l'ipotesi che l'insieme di definizione X di f sia un intervallo non é essenziale; il teorema sussiste ancora se X é una qualunque parte di $\mathbf{R}$, purché $a = \inf X$ e/o $b = \sup X$ siano punti di accumulazione di X . Ad esempio, se f é crescente ed X é illimitato inferiormente o superiormente, allora risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf f(X) \quad \text{e/o} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup f(X).$$

In particolare si ha il seguente

Corollario 4.1 - (Limite delle successioni crescenti o decrescenti).

Una successione crescente (decrescente) tende verso il suo estremo superiore (inferiore).

Pertanto una successione crescente (rispett. decrescente) é convergente se e solo se é limitata superiormente (rispett. inferiormente).

■

Esempio 1 - Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$x_n = (1 + 1/n)^n, \quad \text{ed} \quad y_n = (1 + 1/n)^{n+1}.$$

Si vede allora che la successione $(x_n)_n$ é crescente, (e quindi tende verso il suo estremo superiore), mentre la successione $(y_n)_n$ é decrescente, (e quindi tende verso il suo estremo inferiore).

Risulta inoltre

$$y_n = x_n(1 + 1/n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N};$$

pertanto, dal teorema sul limite della funzione prodotto, dal fatto che la successione $(1 + 1/n)_n$ tende ad 1 e dal teorema di unicità del limite, si deduce che $(x_n)_n$ ed $(y_n)_n$ tendono allo stesso limite.

Il numero reale verso cui convergono le due successioni $(x_n)_n$ ed $(y_n)_n$ é uno dei numeri reali più importanti per la Matematica; esso viene denominato **Numero di Nepero** (in onore del matematico scozzese Napier), e viene indicato con la lettera e iniziale di Eulero.

In altri termini si pone

$$(1.3) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = \sup_{n \in \mathbf{N}} (1 + 1/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{n+1} = \inf_{n \in \mathbf{N}} (1 + 1/n)^{n+1}$$

Si dimostra che il numero di Nepero é un numero irrazionale; x_n ed y_n sono per ogni $n \in \mathbf{N}$ dei valori approssimati per difetto e per eccesso di e . In particolare esso é compreso tra $x_1 = 2$ ed $y_1 = 4$; la sua rappresentazione decimale é data da $e = 2.7182818285.....$

■

Esempio 2 - Per ogni $x \in \mathbf{R}$ consideriamo la successione $(x_n)_n$ definita ponendo per ogni $n \in \mathbf{N}$:

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Si dimostra che, se $x \geq -1$, tale successione é crescente e limitata, (e dunque convergente), mentre nel caso $x < -1$, risulta crescente e limitata (e quindi convergente) la successione $(x_n)_{n > -x}$; in ogni caso esiste il limite della successione $(x_n)_n$.

Poniamo

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Si ha allora chiaramente che

$$\begin{aligned}\exp(0) &= \lim_n (1 + 0/n)^n = 1, \\ \exp(1) &= \lim_n (1 + 1/n)^n = e, \\ \exp(-1) &= \lim_n (1 - 1/n)^n = \lim_n 1/(1 + 1/(n-1))^n = 1/e = e^{-1}, \\ \exp(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2. \\ (\exp(1/2))^2 &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e, \quad \text{e quindi} \quad \exp(1/2) = \sqrt{e} = e^{1/2}.\end{aligned}$$

In generale si dimostra che

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{Q}, \text{ anzi per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

■

Osservazione 4.2 - Se $x > 0$, allora $1 + x$ rappresenta il montante dopo un anno di un capitale iniziale unitario investito al tasso di interesse annuo x ; se la capitalizzazione viene effettuata ogni sei mesi e il tasso annuo è x , (e quindi il tasso semestrale è $x/2$), allora il montante dopo un anno sarà $(1 + x/2)^2$. In generale $(1 + x/n)^n$ sarà il montante dopo un anno se la capitalizzazione viene effettuata n volte nel corso dell'anno.

Ne segue che e^x rappresenta il montante dopo un anno di un capitale iniziale unitario investito al tasso annuo x se la capitalizzazione viene effettuata "infinite volte nel corso dell'anno", cioè istante per istante o, come in genere si dice, "*in maniera continua*".

Conseguentemente e^{2x} rappresenterà il montante dopo due anni di un capitale iniziale unitario investito al tasso annuo x se la capitalizzazione viene effettuata in maniera continua, mentre $e^{x/2}$ rappresenterà il montante dopo sei mesi di un capitale iniziale unitario investito al tasso annuo x se la capitalizzazione viene effettuata in maniera continua.

In generale e^{tx} rappresenterà il montante all'istante t (frazione di anno) di un capitale iniziale unitario investito al tasso annuo x in regime di capitalizzazione continua.

Si noti che dall'essere $e^{-tx} \cdot e^{tx} = e^0 = 1$, si deduce che e^{-tx} rappresenta il capitale da investire ora al tasso annuo x per trovare al tempo t un capitale unitario; in altri termini e^{-tx} rappresenta il *valore attuale*, (cioè in questo momento), *di un capitale unitario, che sarà disponibile al tempo t* , (cioè tra t anni o frazione di anno), *se viene scontato al tasso annuo x in regime di capitalizzazione continua*.

E' evidente allora come la funzione esponenziale rivesta una importanza fondamentale nei problemi di Matematica Finanziaria.

Da quanto detto si deduce che il numero di Nepero e ha un importante significato finanziario: esso rappresenta il montante dopo un anno di un capitale iniziale unitario investito al tasso annuo $x = 1$, cioè del 100%, in regime di capitalizzazione continua.

■

Osservazione 4.3 - Dalla definizione di funzione esponenziale si deduce che per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty. \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

Infatti, per ogni $x > 0$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = \sup_n (1 + x/n)^n \geq (1 + x/n)^n \geq (x/n)^n \quad ;$$

ne segue che risulta

$$(2) \quad \frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x}{(k+1)^{k+1}} \quad \text{per ogni } x > 0, k \in \mathbf{N}.$$

Di qui discende la tesi in virtù del criterio di divergenza.

■

Dai limiti (1) si ricava che

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot \left[1 - \frac{x^k}{e^x}\right] = +\infty(1 - 0) = +\infty.$$

Anzi per qualunque polinomio p si ha

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[1 - p(x)/e^x\right] = +\infty.$$

Abbiamo così ottenuto una proprietà fondamentale della funzione esponenziale: sostanzialmente, la funzione esponenziale cresce in maniera “esplosiva”, più rapidamente di qualunque potenza, anzi più rapidamente di qualunque polinomio.

Infatti, dai limiti (3) e (4) si deduce che il grafico di qualunque potenza, è destinato a passare al di sotto del grafico della funzione esponenziale, anzi per $x \rightarrow +\infty$ la distanza tra i punti di ascissa x dei grafici della funzione esponenziale e della funzione potenza tende a $+\infty$. Lo stesso accade per il grafico di qualunque polinomio ed in particolare per qualunque retta.

■

Osservazione 4.4 - Dalla (2) si deduce che per ogni $k \in \mathbf{N}$ e per ogni $x > 1$ si ha

$$\frac{x}{\log^k(x)} = \frac{e^{\log(x)}}{(\log(x))^k} > \frac{\log(x)}{(k+1)^{k+1}}.$$

Ne segue, per il criterio di divergenza, che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log^k(x)} = +\infty \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^k(x)}{x} = 0.$$

Ne segue che per ogni $m > 0$, per ogni $q \in \mathbf{R}$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} mx + q - \log^k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[m + \frac{q}{x} - \frac{\log^k(x)}{x} \right] = +\infty.$$

Abbiamo così scoperto una proprietà fondamentale della funzione logaritmo naturale: si tratta di una funzione caratterizzata da una crescita molto “lenta”. Qualunque retta con inclinazione positiva è destinata a passare al di sopra del grafico della funzione logaritmo e di tutte le sue potenze, anzi per $x \rightarrow +\infty$ la distanza tra il punto della retta di ascissa x e il punto di ascissa x del grafico della funzione logaritmo (o di una qualunque sua potenza) tende a $+\infty$.

■

Osservazione 4.5 - Dalla definizione della funzione esponenziale si deduce anche il seguente limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Infatti, per ogni $x \geq -1$, risulta

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = \sup_n (1 + x/n)^n \geq (1 + x/1)^1 = 1 + x.$$

Inoltre, per ogni $x < 1$, si ha $-x > -1$ e quindi $1/e^x = e^{-x} \geq 1 - x$, ovvero $0 < e^x < 1/(1 - x)$.

Pertanto si ha

$$1 + x \leq e^x \leq 1/(1 - x) \quad \text{per ogni } x \in]-1, 1[,$$

donde segue che

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x} && \text{per ogni } x \in]0, 1[, \\ 1 &\geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1 - x} && \text{per ogni } x \in]-1, 0[: \end{aligned}$$

ne discende, per il Teorema dei Carabinieri, che la funzione $(e^x - 1)/x$ tende ad 1 per $x \rightarrow 0$ da destra e da sinistra, e quindi tende ad 1 per $x \rightarrow 0$.

■

5. - Limiti e continuità delle funzioni composte:

In questo paragrafo vogliamo studiare come fare a calcolare il limite di una funzione composta del tipo:

$$\sqrt{x^2 - x + 5}, \quad \log\left(\frac{x - 1}{2x + 1}\right), \quad \text{arctg}\left(\frac{x^2}{x + 2}\right).$$

Al riguardo si ha il seguente

Teorema 5.1 - (sul limite della funzione composta).

Siano f e g due funzioni reali e consideriamo la funzione composta $f \circ g$ definita nell'insieme

$$X = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in \text{dom}(g), g(x) \in \text{dom}(f)\}.$$

Se risulta che:

- (a) $x_0 \in \hat{\mathbf{R}} \cap \text{Ac}(X)$ ed esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 \in \hat{\mathbf{R}}$,
- (b) $y_0 \in \text{Ac}(\text{dom}(f))$ ed esiste il $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l \in \hat{\mathbf{R}}$,
- (c₁) $y_0 \in \text{dom}(f)$ ed f è continua in y_0 , oppure
- (c₂) esiste un intorno J_0 di x_0 tale che $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \in X \cap J_0 - \{x_0\}$,

allora il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ esiste e coincide con il $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$.

Dim. Per dimostrare la tesi occorre dimostrare che per ogni intorno I di l esiste un intorno J di x_0 tale che

$$(5.1) \quad f(g(x)) \in I \quad \text{per ogni } x \in X \cap J - \{x_0\}.$$

Infatti, fissato un intorno I di l , essendo $l = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$, si ha che esiste un intorno K di y_0 tale che

$$(5.2) \quad f(y) \in I \quad \text{per ogni } y \in \text{dom}(f) \cap K - \{y_0\}.$$

D'altra parte, essendo $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, in corrispondenza dell'intorno K di y_0 esiste un intorno J di x_0 tale che

$$(5.3) \quad g(x) \in K \quad \text{per ogni } x \in \text{dom}(g) \cap J - \{x_0\}.$$

Ciò posto, supponiamo che valga la (c₁), (e quindi che $l = f(y_0)$), e proviamo che J soddisfa la (5.1).

Infatti, per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$, per la (5.3) e la definizione di X , si ha che $g(x) \in K \cap \text{dom}(f)$. Di qui, dalla (5.2) e dal fatto che $l \in I$ poiché I è un intorno di l , si deduce che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ risulta:

$$\begin{cases} g(x) \neq y_0 \implies g(x) \in \text{dom}(f) \cap K - \{y_0\} \implies f(g(x)) \in I, \\ g(x) = y_0 \implies f(g(x)) = f(y_0) = l \in I. \end{cases}$$

Se invece sussiste la c_2), allora $J \cap J_0$ è un intorno di x_0 e per tale intorno sussiste la (5.1). Infatti per ogni $x \in X \cap (J \cap J_0) - \{x_0\}$ si ha $g(x) \in \text{dom}(f) \cap K - \{y_0\}$, e quindi $f(g(x)) \in I$.

■

Osservazione 5.2 - Le ipotesi (a) e (b) del teorema precedente non sono sufficienti per avere la tesi. Per convincercene, consideriamo le funzioni

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

e quindi

$$f(g(x)) = \begin{cases} f(x) = 1 & \text{se } x > 0, \\ f(0) = 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si ha allora $g(0^-) = g(0^+) = 0$ e quindi $g(x) \rightarrow y_0 = 0$ per $x \rightarrow 0$; inoltre $f(y) \rightarrow 1$ per $y \rightarrow y_0 = 0$ e quindi sono soddisfatte la a) e la b) del teorema precedente. Però non è soddisfatta la tesi del teorema, dal momento che risulta $f \circ g(0^-) = 0$, ed $f \circ g(0^+) = 1$ e quindi il limite per $x \rightarrow 0$ di $f \circ g$ non esiste.

In effetti, in questo caso, non è soddisfatta la (c_1) , perché f è discontinua in $y_0 = 0$, e non è soddisfatta la (c_2) , perché in ogni intorno di $y_0 = 0$ esistono infiniti punti in cui $g(x) = 0 = y_0$.

■

Osservazione 5.3 - Dal Teorema 5.1 si deduce che per calcolare il limite per $x \rightarrow x_0$ di una funzione composta $f \circ g$ si procede come segue:

- (1) si pone $y = g(x)$,
- (2) si calcola il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} y = y_0 \in \hat{\mathbf{R}}$;
- (3) si calcola il limite $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l \in \hat{\mathbf{R}}$;
- (4) si verifica (magari “mentalmente”) che y_0 soddisfa la (c_1) o la (c_2) .

A questo punto si può concludere che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$.

Naturalmente ai passi (2) e (3) è sottinteso che i limiti abbiano senso, cioè che x_0 ed y_0 siano punti di accumulazione per l'insieme di definizione di g e di f .

Esempio 1 - Supponiamo di voler calcolare i limiti $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - x - 2}$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - x - 2}$.

La funzione $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ è funzione composta delle funzioni $g(x) = x^2 - x - 2$ ed $f(y) = \sqrt{y}$.

Evidentemente g è definita e continua in $\mathbf{R}$, mentre f è definita e continua in $[0, +\infty[$; ne segue che la funzione h è definita nell'insieme

$$X = \{x \in \mathbf{R} | g(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - x - 2 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[.$$

Pertanto -2 e $\pm\infty$ sono punti di accumulazione di X e quindi i limiti cercati hanno senso.

Per calcolare tali limiti, procediamo allora come segue:

- (1) si pone $y = x^2 - x - 2$,
- (2) si calcola $\lim_{x \rightarrow -2} y = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - x - 2 = 4 + 2 - 2 = 4$, (rispett. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - x - 2 = +\infty$),
- (3) si calcola il limite $\lim_{y \rightarrow 4} f(y) = \lim_{y \rightarrow 4} \sqrt{y} = \sqrt{4} = 2$, (rispett. $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$),
- (4) si osserva che $y_0 = 4$ soddisfa la (c_1) , (rispett. $y_0 = +\infty$ soddisfa la (c_2)).

Se ne conclude che

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - x - 2} = \lim_{y \rightarrow 4} \sqrt{y} = \sqrt{4} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty.$$

Esempio 2 - Supponiamo di voler calcolare i limiti $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \log_2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$ e $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \log_2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$.

La funzione $h(x) = \log_2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$ é funzione composta delle funzioni $g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$ ed $f(y) = \log_2(y)$.

Evidentemente g é definita e continua in $\mathbf{R} - \{-1\}$, mentre f é definita e continua in $]0, +\infty[$; ne segue che la funzione h é definita nell'insieme

$$X = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in \text{dom}(g) \wedge g(x) > 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq -1 \wedge \frac{x-1}{x+1} > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Pertanto ± 1 e $\pm \infty$ sono punti di accumulazione di X e quindi i limiti cercati hanno senso.

Per calcolare tali limiti, procediamo allora come segue:

- (1) si pone $y = (x-1)/(x+1)$,
- (2) si calcolano i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1;$$

- (3) si calcolano i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} f(y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \log_2(y) = -\infty, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \log_2(y) = +\infty, \\ \lim_{y \rightarrow 1} f(y) &= \lim_{y \rightarrow 1} \log_2(y) = \log_2(1) = 0. \end{aligned}$$

- (4) Si osserva che nel caso $y_0 = 0$ e $y_0 = +\infty$ é soddisfatta la (c_2) , mentre nel caso $y_0 = 1$ é soddisfatta la (c_1) .

Se ne conclude che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \log_2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \log_2(y) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \log_2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \log_2(y) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \log_2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) &= \lim_{y \rightarrow 1} \log_2(y) = \log_2(1) = 0. \end{aligned}$$

■

Osservazione 5.4 - Si noti che per ogni $x \in X$ si ha $g(x) \in \text{dom}(f)$; ne segue che la (c_2) é certamente vera se $y_0 \notin \text{dom}(f)$, ed in particolare se $y_0 = \pm \infty$.

Pertanto, se f é continua in tutto il suo insieme di definizione, allora la tesi del teorema sussiste sotto le sole ipotesi (a) e (b), dal momento che sará automaticamente soddisfatta la (c_1) , se $y_0 \in \text{dom}(f)$, o la (c_2) se $y_0 \notin \text{dom}(f)$.

In definitiva, se f é continua in tutto il suo insieme di definizione, allora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \quad (\text{posto } y = g(x) \text{ ed osservato che } y = g(x) \rightarrow y_0 \text{ per } x \rightarrow x_0) \quad = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y),$$

purché (naturalmente) l'ultimo limite esista.

Ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = \quad (\text{posto } y = \frac{x^2}{x+1} \text{ ed osservato che } y = \frac{x^2}{x+1} \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty) \quad = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = \quad (\text{posto } y = \frac{x^2}{x+1} \text{ ed osservato che } y = \frac{x^2}{x+1} \rightarrow \frac{9}{4} \text{ per } x \rightarrow 3) \quad = \lim_{y \rightarrow 9/4} \sqrt{y} = 3/2.$$

■

Teorema 5.5 - (Continuità della funzione composta).

Se g è continua in $x_0 \in X = \{x \in \mathbf{R} | x \in \text{dom}(g), g(x) \in \text{dom}(f)\}$ ed f è continua in $y_0 = g(x_0)$, allora $f \circ g$ è continua in x_0 .

Dim. Se x_0 è un punto isolato di X , la tesi è ovvia.

Se x_0 è un punto di accumulazione di X ed $y_0 = g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ è punto di accumulazione dell'insieme $\text{dom}(f)$, allora dal Teorema 5.1 segue che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(y_0) = f(g(x_0)) = f \circ g(x_0)$, cioè la tesi.

Infine, se x_0 è un punto di accumulazione di X , ma $y_0 = g(x_0)$ è punto isolato dell'insieme $\text{dom}(f)$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\text{dom}(f) \cap]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[= \{y_0\}$. D'altra parte, essendo $y_0 = g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, in corrispondenza del numero $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ si ha

$$g(x) \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\cap \text{dom}(f) = \{y_0\}.$$

Ne segue che per ogni $x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ si ha che $g(x) = y_0$ e quindi $f(g(x)) = f(y_0)$; pertanto la funzione $f \circ g$ è costantemente uguale ad $f(y_0)$ in un intorno di x_0 e quindi converge verso $f(y_0) = f \circ g(x_0)$ per $x \rightarrow x_0$, come volevasi.

■

Corollario 5.6 -. Se f e g sono continue nel loro insieme di definizione, anche $f \circ g$ è continua nel suo insieme di definizione.

■

Corollario 5.7 -. Una qualunque funzione ottenuta componendo tra loro polinomi, funzioni razionali fratte, funzioni potenze, funzioni radice, funzioni esponenziali, funzioni logaritmo, funzioni circolari, (sen, cos, tg, cotg), o circolari inverse, (arcsen, arccos, arctg, arccotg) è continua nel suo insieme di definizione.

■

6. - Limiti notevoli

Osservazione 6.1 - Dal limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, discendono i seguenti **limiti notevoli**:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1,$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2},$$

D'altra parte, posto $y = \arcsen x$, $x = \text{sen } y$, $z = \text{arctg } x$, $x = \text{tg } z$ ed osservato che $y = \arcsen x$ e $z = \text{arctg } x$ tendono a 0 per $x \rightarrow 0$, si ha

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\text{sen } y} = 1,$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg } x}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\text{tg } z} = 1,$$

Osservazione 6.2 - Dal limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, discendono i seguenti **limiti notevoli**:

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = \log a,$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \left(\text{posto } y = \log(1+x), \ x = e^y - 1 \text{ ed osservato che } y = \log(1+x) \rightarrow 0 \right. \\ \left. \text{per } x \rightarrow 0 \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1,$$

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x \log a} = \frac{1}{\log a},$$

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\alpha \log(1+x)} \cdot \frac{\alpha \log(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Osservazione 6.3 - Infine, dal limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$, discendono i seguenti ulteriori **limiti notevoli** :

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \log a}}{e^{\alpha \log x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x[\log a - \alpha((\log x)/x)]) = +\infty, \ \forall a > 1, \alpha > 0,$$

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(\log(x))^\beta} = (\text{essendo } y = \log x \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty \text{ ed } x = e^y) \\ = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(e^y)^\alpha}{y^\beta} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(e^\alpha)^y}{y^\beta} = +\infty, \quad \text{per ogni } \alpha > 0, \beta > 0,$$

e quindi

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log(x))^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } a > 1, \alpha > 0, \beta > 0.$$

■

7 . - Alcuni artifici utili per il calcolo dei limiti

Osservazione 7.1 - (Sostituzioni notevoli) - Spesso il calcolo del limite di una funzione diventa più agevole con un semplice cambio di variabile.

Infatti:

a) ponendo $y = x - x_0$, $x = x_0 + y$ ed osservando che $y = x - x_0 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + (x - x_0)) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x_0 + y),$$

b) ponendo $y = -x$, $x = -y$ ed osservando che $y = -x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_{-\infty}$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-(-x)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(-y),$$

c) ponendo $y = 1/x$, $x = 1/y$ ed osservando che $y = 1/x \rightarrow 0^\pm$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e viceversa $y = 1/x \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow 0^\pm$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} f(1/y) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(1/y),$$

In questo modo un limite per $x \rightarrow x_0$ viene trasformato in un limite per $y \rightarrow 0$, un limite per $x \rightarrow -\infty$ viene trasformato in un limite per $y \rightarrow +\infty$, un limite per $x \rightarrow \pm\infty$ viene trasformato in un limite per $y \rightarrow 0^\pm$ e viceversa un limite per $x \rightarrow 0^\pm$ viene trasformato in un limite per $y \rightarrow \pm\infty$. Spesso queste trasformazioni rendono piú agevole il calcolo del limite.

■

Esempio 1 - Supponiamo di voler calcolare il limite per $x \rightarrow 1$ della funzione $f(x) = (x^2 - 4x + 3)/(x - 1)$. Ponendo $y = x - 1$, $x = y + 1$ ed osservando che $y = x - 1 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 1$ si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y + 1)^2 - 4(y + 1) + 3}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + 2y + 1 - 4y - 4 + 3}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - 2y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y - 2 = -2.\end{aligned}$$

■

Esempio 2 - Supponiamo di voler calcolare il limite per $x \rightarrow \pi/2$ della funzione $f(x) = (\cos x)/(x - \pi/2)$. Ponendo $y = x - \pi/2$, $x = y + \pi/2$ ed osservando che $y = x - \pi/2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pi/2$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \pi/2)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} y}{y} = -1.$$

■

Esempio 3 - Supponiamo di voler calcolare il limite per $x \rightarrow -\infty$ della funzione $f(x) = xe^x$.

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $-\infty \cdot 0$; però, ponendo $y = -x$, $x = -y$ ed osservando che $y \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} -ye^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{y}{e^y} = 0.$$

■

Esempio 4 - Supponiamo di voler calcolare il limite per $x \rightarrow 0^+$ della funzione $f(x) = x \log(x)$.

Anche questo limite si presenta nella forma indeterminata $-\infty \cdot 0$; però, ponendo $y = 1/x$, $x = 1/y$ ed osservando che $y \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0^+$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (1/y) \log(1/y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\log(y)}{y} = 0.$$

■

Esempio 5 - Supponiamo di voler calcolare il limite per $x \rightarrow +\infty$ della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$; però, ponendo $y = 1/x$, $x = 1/y$ ed osservando che $y \rightarrow 0^+$ per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 + y^2}{y^2}} - \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + y^2} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1 + y^2)^{1/2} - 1}{y^2} \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

■

Osservazione 7.2 - (Forme indeterminate del tipo $0 \cdot (\pm\infty)$ o del tipo $+\infty - \infty$).

Le forme indeterminate del tipo $0/0$ e $+\infty/+\infty$ sono più facili da risolvere rispetto alle forme indeterminate $0 \cdot (\pm\infty)$ e $+\infty - \infty$, poiché per esse disponiamo dei limiti notevoli visti al paragrafo precedente. Perciò per risolvere le forme indeterminate del tipo $0 \cdot (\pm\infty)$ e $+\infty - \infty$, in genere, conviene trasformarle in forme indeterminate del tipo $0/0$ o $+\infty/+\infty$.

Tale trasformazione viene realizzata immediatamente osservando che:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{oppure} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

In tal modo il prodotto di una funzione infinitesima per una divergente viene trasformato nel rapporto di due funzioni entrambe infinitesime o entrambe divergenti

Analogamente, ponendo

$$f(x) - g(x) = f(x) \cdot \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) \quad \text{oppure} \quad f(x) - g(x) = g(x) \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right),$$

il calcolo del limite della differenza di due funzioni divergenti viene ricondotto al calcolo del limite del loro rapporto.

■

Ad esempio, nel caso del precedente Esempio 4, si ha $x \log(x) = \log(x)/(1/x)$ e a questo punto la sostituzione $y = 1/x$ è del tutto naturale.

■

Esempio 6 - Consideriamo il limite per $x \rightarrow +\infty$ della funzione $2^x - (x^2 + 3x + 5)$, che si presenta evidentemente nella forma $+\infty - \infty$. Ebbene, essendo

$$2^x - (x^2 + 3x + 5) = 2^x \left(1 - (x^2 + 3x + 5)/2^x\right) = 2^x \left(1 - (x^2/2^x) - (3x/2^x) - 5/2^x\right)$$

la funzione $2^x - (x^2 + 3x + 5)$ tende a $+\infty(1 - 0 - 0 - 0) = +\infty$.

■

Esempio 7 - Come ulteriore esempio, consideriamo il limite per $x \rightarrow +\infty$ della funzione $x - \sqrt{x^3 + 2}$. Anche questo limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$, ma la forma indeterminata si risolve osservando che:

$$x - \sqrt{x^3 + 2} = x \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x^3 + 2}}{x}\right) = x \cdot \left(1 - \sqrt{x + \frac{2}{x^2}}\right).$$

Infatti, a questo punto, osservato che $\sqrt{x + 2/x^2}$ tende a $+\infty$, possiamo concludere che $x - \sqrt{x^3 + 2}$ tende a $+\infty(1 - (+\infty)) = -\infty$.

■

Osservazione 7.3 - Limiti di funzioni della forma $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$

Una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$ per una funzione del tipo $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ può essere risolta ponendo

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)} \left(1 - \sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}\right) \quad \text{oppure} \quad \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{g(x)} \left(\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} - 1\right)$$

e risolvendo la forma indeterminata del tipo $+\infty/+\infty$ relativa al rapporto f/g o g/f .

Ovviamente tale metodo entra in crisi se f/g o g/f tende ad 1, perché in tal caso la forma indeterminata $+\infty - \infty$ è stata trasformata in una forma indeterminata del tipo $0 \cdot +\infty$, che andrebbe a sua volta trasformata in una forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞ , con evidenti complicazioni di calcolo.

In questo caso una strada piú semplice può essere osservare che:

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \frac{(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}} = \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}.$$

In questo modo abbiamo direttamente trasformato la forma indeterminata $+\infty - \infty$ in una funzione che tende a 0 se $f - g$ é convergente oppure in una forma indeterminata del tipo $\pm\infty / +\infty$ se $f - g$ é divergente.

Esempio 8 - Supponiamo di dover calcolare il limite per $x \rightarrow +\infty$ della funzione $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$; chiaramente il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$ e la funzione $(x^2 + 3x + 2)/(x^2 + 1)$ tende ad 1, sicché non conviene trasformare la funzione in un prodotto.

Conviene invece osservare che

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

A questo punto la funzione é stata trasformata in una forma indeterminata del tipo $+\infty / +\infty$. Dividendo per x numeratore e denominatore, il numeratore diventa $3 + 1/x$ che tende a 3 per $x \rightarrow +\infty$; il denominatore diventa invece

$$\frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \sqrt{1 + 3/x + 2/x^2} + \sqrt{1 + 1/x^2}$$

e quindi tende a $\sqrt{1 + 0 + 0} + \sqrt{1 + 0} = 1 + 1 = 2$ per $x \rightarrow +\infty$.

Possiamo cosí concludere che la funzione data tende a $3/2$.

■

Osservazione 7.4 - (Limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$).

Osservato che risulta

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log(f(x))},$$

per calcolare il limite di una funzione del tipo $f(x)^{g(x)}$ si procede come segue:

- si calcola preliminarmente il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \log(f(x)) = y_0 \in \hat{\mathbf{R}}$,
- se ne deduce che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \log(f(x))} = \lim_{y \rightarrow y_0} e^y = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 = +\infty, \\ 0 & \text{se } y_0 = -\infty, \\ e^{y_0} & \text{se } y_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$

Ad esempio, osservato che

$$|x|^x = e^{x \log |x|} \text{ e che } x \log |x| \text{ tende a } 0 \text{ per } x \rightarrow 0, \text{ a } -\infty \text{ per } x \rightarrow -\infty \text{ e a } +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty,$$

possiamo concludere che $|x|^x$ tende ad $e^0 = 1$ per $x \rightarrow 0$, a 0 per $x \rightarrow -\infty$, a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

■

8 . - Asintoti verticali, orizzontali, obliqui.

Definizione 8.1 -. Se f è una funzione definita in un insieme illimitato superiormente, (rispett. inferiormente), allora la retta di equazione $y = mx + q$ dicesi **asintoto destro**, (rispett. **sinistro**), per f , (o, meglio, per il grafico di f), se e solo se risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + q) = 0 \quad (\text{rispett. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (mx + q) = 0),$$

cioè se la distanza tra il punto della retta di ascissa x e il punto del grafico avente la stessa ascissa tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$ (rispett. $-\infty$).

Per ovvi motivi l'asintoto si dice **orizzontale** se risulta $m = 0$, si dice **obliquo** se $m \neq 0$.

■

Definizione 8.2 -. Invece, se x_0 è punto di accumulazione a destra (rispett. a sinistra) per l'insieme di definizione di f , si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale destro**, (rispett. **sinistro**), se e solo se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad (\text{rispett. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty).$$

■

E' allora evidente che se f è una funzione continua nel suo insieme di definizione e tale insieme di definizione è un intervallo oppure è l'unione di un numero finito di intervalli, allora gli asintoti verticali si trovano eventualmente in corrispondenza degli eventuali estremi di tali intervalli.

■

D'altra parte la retta di equazione $y = q$ è un asintoto orizzontale destro se e solo se $f(x) \rightarrow q$ per $x \rightarrow +\infty$.

■

Infine se la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo destro, allora da un lato si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} mx + q = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = q;$$

dall'altro si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} + m + \frac{q}{x} = m.$$

Viceversa, se il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$ esiste ed è un numero reale m ed anche il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx$ esiste ed è un numero reale q , allora la retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto obliquo destro per f .

Pertanto per trovare l'eventuale asintoto destro orizzontale o obliquo possiamo procedere come segue:

- (1) si calcola il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: se tale limite non esiste, allora f non ha un asintoto orizzontale destro e nemmeno un asintoto obliquo destro; se tale limite esiste ed è un numero reale q , allora la retta di equazione $y = q$ è l'asintoto orizzontale destro; se invece $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, allora l'asintoto orizzontale destro non esiste e si va al passo (2);
- (2) si calcola il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$: se tale limite non esiste oppure è uguale a $\pm\infty$, allora l'asintoto obliquo destro non esiste; se invece tale limite esiste ed è un numero reale m , si va al passo (3);
- (3) si calcola $q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx$: se $q \in \mathbf{R}$, allora la retta di equazione $y = mx + q$ è l'asintoto obliquo destro di f , altrimenti l'asintoto obliquo non esiste.

■

Procedendo allo stesso modo, ma calcolando i limiti per $x \rightarrow -\infty$ invece che per $x \rightarrow +\infty$, si trova l'eventuale asintoto sinistro orizzontale o obliquo.

■

Esempio 1 - Le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ non hanno asintoti orizzontali o obliqui destro o sinistro dal momento che il limite per $x \rightarrow \pm\infty$ di tali funzioni non esistono.

Esempio 2 - Gli asintoti orizzontali sinistro e destro della funzione $\arctg(x)$ sono le rette di equazione $y = -\pi/2$ ed $y = \pi/2$, mentre gli asintoti orizzontali sinistro e destro della funzione $\operatorname{arccotg}(x)$ sono le rette di equazione $y = \pi$ ed $y = 0$, dal momento che risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg(x) = \pm\pi/2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0;$$

Esempio 3 - La funzione $y = e^x$ ha un asintoto orizzontale sinistro, (precisamente la retta di equazione $y = 0$), ma non ha un asintoto orizzontale o obliquo destro, dal momento che risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x/x = +\infty.$$

Esempio 4 - La retta di equazione $x = 0$ é un asintoto verticale destro per la funzione $y = \log(x)$, (dal momento che $\log(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow 0^+$), ma tale funzione non ha alcun asintoto orizzontale o obliquo destro dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) - 0x = +\infty;$$

Esempio 5 - Data la funzione $f(x) = x^2/(2x - 1)$, si ha che la retta di equazione $x = 1/2$ é un asintoto verticale sinistro e destro poiché $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow (1/2)^\pm$, e che la retta di equazione $y = (1/2)x + 1/4$ é l'asintoto obliquo sinistro e destro, dal momento che:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 1/2, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x/2 = 1/4.$$

Esempio 6 - Data la funzione $f(x) = (x \log(x))/(\log(x) - 1)$, si ha che la retta di equazione $x = e$ é un asintoto verticale sinistro e destro (poiché $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow e^\pm$), mentre la retta di equazione $x = 0$ non é asintoto verticale, (poiché $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$); inoltre f non ha asintoto (orizzontale o obliquo) sinistro (poiché f é definita nell'insieme $X =]0, e[\cup]e, +\infty[$ e quindi non hanno senso i limiti di $f(x)$ o di $f(x)/x$ per $x \rightarrow -\infty$), e non ha asintoto orizzontale o obliquo destro poiché risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x) - 1} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log(x) - 1} = +\infty. \end{aligned}$$

9 . - Il Principio di Sostituzione

In questo paragrafo impareremo un procedimento che si rivela molto utile per il calcolo di limiti che si presentano sotto le forme indeterminate $0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

In tutto ciò che segue X è una parte non vuota di $\mathbf{R}$ ed $x_0 \in \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ è un punto di accumulazione di X . Cominciamo con il dare la seguente definizione

Definizione 9.1. *Date due funzioni f e g di X in $\mathbf{R}$, tali che $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$, diciamo che f è **trascurabile** rispetto a g in x_0 o per $x \rightarrow x_0$ se risulta*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

*Diciamo invece che f è **equivalente** a g in x_0 o per $x \rightarrow x_0$ se risulta*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

*Se $x_0 = \pm\infty$ si dice che f è **asintoticamente trascurabile** rispetto a g o **asintoticamente equivalente** a g .*

Per dire che f è trascurabile rispetto a g o che è equivalente a g , adopereremo rispettivamente i simboli

$$\begin{aligned} f << g & \quad \text{o} \quad f(x) << g(x) & \quad \text{in } x_0 \text{ o per } x \rightarrow x_0 \\ f \simeq g & \quad \text{o} \quad f(x) \simeq g(x) & \quad \text{in } x_0 \text{ o per } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

■

Il motivo di tale denominazione è evidente. Se f è trascurabile rispetto a g in x_0 , allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)|,$$

e dunque intuitivamente i valori che f assume “vicino ad x_0 ” sono “infinitamente più piccoli” dei corrispondenti valori di g . Invece se f è equivalente a g in x_0 allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha

$$0 < (1 - \varepsilon)g(x) < f(x) < (1 + \varepsilon)g(x) \quad \text{oppure} \quad (1 + \varepsilon)g(x) < f(x) < (1 - \varepsilon)g(x) < 0,$$

e dunque intuitivamente il valore che f assume vicino ad x_0 è approssimativamente uguale al valore di g .

■

Osservazione 9.2 -. *E' evidente che se $f \simeq g$ in x_0 ed esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \hat{\mathbf{R}}$, allora anche il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste ed è uguale ad l . Pertanto per calcolare il limite per $x \rightarrow x_0$ di una funzione f basta cercare una funzione g equivalente ad f in x_0 di cui sia più facile calcolare il limite.*

■

Diamo subito alcuni esempi di coppie di funzioni equivalenti o trascurabili l'una rispetto all'altra.

Esempio 1. - Se $\alpha < \beta$ allora $x^\alpha << x^\beta$ per $x \rightarrow +\infty$, mentre $|x|^\beta << |x|^\alpha$ per $x \rightarrow 0$.

Infatti $x^\alpha/x^\beta = x^{\alpha-\beta} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ ed $|x|^\beta/|x|^\alpha = |x|^{\beta-\alpha} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$.

■

Esempio 2. - Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ é un polinomio di grado n , allora p é asintoticamente equivalente alla funzione $g(x) = a_nx^n$.

Infatti si ha $\frac{p(x)}{a_nx^n} = \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \rightarrow 1$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

■

Esempio 3. - E' evidente che

- a) se $\alpha < \beta$, allora $|\log x|^\alpha \ll |\log x|^\beta$ per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow 0^+$;
- b) se $0 < a < b$, allora $a^x \ll b^x$ per $x \rightarrow +\infty$.

■

Esempio 4. - Ricordiamo che per ogni $\alpha > 0$, $a > 1$, $n \in \mathbf{N}$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^n x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log^n x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log^n(1/y)}{y^\alpha} = 0;$$

ne segue che per ogni $\alpha > 0$, $a > 1$, $n \in \mathbf{N}$, si ha:

- (a) $x^\alpha \ll a^x$ per $x \rightarrow +\infty$,
- (b) $\log^n(x) \ll x^\alpha$ per $x \rightarrow +\infty$ e $\log^n|x| \ll 1/|x|^\alpha$ per $x \rightarrow 0$.
- (c) $x^\alpha \log^n(x) \ll x^\beta$ per $x \rightarrow +\infty$, per ogni $\beta > \alpha$,
- (d) $|x|^\alpha \log^n|x| \ll |x|^\beta$ per $x \rightarrow 0$ per ogni $\beta < \alpha$.

■

Esempio 5. - Per ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ di grado n si ha chiaramente

$$\log(|a_nx^n + \dots + a_1x + a_0|) = \log(|x|^n) + \log\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right|,$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\log |a_nx^n + \dots + a_1x + a_0|}{\log |x|} = n,$$

Ne segue che $\log |p(x)| \simeq n \log |x|$ per $x \rightarrow \pm\infty$ per ogni polinomio p di grado n .

■

Esempio 6. - Ricordando che il limite per x che tende a 0 delle funzioni

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\arcsin x}{x}, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \quad \frac{e^x - 1}{x}, \quad \frac{\log(1+x)}{x}$$

é uguale ad 1, si ha che per $x \rightarrow 0$

$$\sin x \simeq x, \quad \arcsin x \simeq x, \quad \operatorname{tg} x \simeq x, \quad \operatorname{arctg} x \simeq x, \quad e^x - 1 \simeq x, \quad \log(1+x) \simeq x.$$

D' altra parte ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log(a)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

si ha che

$$1 - \cos x \simeq \frac{1}{2}x^2, \quad \log_a(1+x) \simeq \frac{x}{\log a}, \quad a^x - 1 \simeq x \log a, \quad (1+x)^\alpha - 1 \simeq \alpha x \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Piú in generale, se $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ é una funzione infinitesima per $x \rightarrow x_0$ tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$, allora, utilizzando il teorema sul limite della funzione composta, si ha che per $x \rightarrow x_0$:

- (1) le funzioni $\operatorname{sen}(f(x))$, $\arcsin(f(x))$, $\operatorname{tg}(f(x))$, $\operatorname{arctg}(f(x))$, $e^{f(x)} - 1$, $\log(1 + f(x))$ sono equivalenti ad $f(x)$,
- (2) le funzioni $1 - \cos(f(x))$, $\log_a(1 + f(x))$, $a^{f(x)} - 1$, $(1 + f(x))^\alpha - 1$ sono equivalenti rispettivamente alle funzioni $(1/2)f^2(x)$, $f(x)/\log(a)$, $f(x) \cdot \log(a)$, $\alpha \cdot f(x)$.

■

Esempio 7. - E' evidente che:

- a) se f tende ad $l \in \mathbf{R} - \{0\}$ per $x \rightarrow x_0$, allora f é equivalente in x_0 alla funzione costante $g(x) = l$;
- b) se f tende a 0 e g tende $l \in \hat{\mathbf{R}} - \{0\}$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f \ll g$;
- c) se f é convergente per $x \rightarrow x_0$ e g é divergente per $x \rightarrow x_0$, allora $f \ll g$;
- d) se f é localmente limitata in x_0 e g é divergente per $x \rightarrow x_0$, allora $f \ll g$.

■

Proposizione 9.3. *Le seguenti proprietà sono pressoché evidenti:*

- (1) se $f \simeq g$, allora $f - g \ll f$ ed $f - g \ll g$,
- (2) $f \simeq f$,
- (3) $f \simeq g \iff g \simeq f$,
- (4) se $f \simeq g$, $g \simeq h$, allora $f \simeq h$,
- (5) se $f \simeq g$, allora $f^n \simeq g^n$, $\sqrt[n]{f} \simeq \sqrt[n]{g}$, $|f|^\alpha \simeq |g|^\alpha$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{R}$,
- (6) se $f_1 \simeq g_1$ ed $f_2 \simeq g_2$, allora $f_1 f_2 \simeq g_1 g_2$ ed $f_1/f_2 \simeq g_1/g_2$,
- (7) se $f_1 \ll g$ ed $f_2 \ll g$, allora $f_1 + f_2 \ll g$,
- (8) se $f \ll g$ allora $f + g \simeq g$,
- (9)
$$\begin{cases} f \ll g, & g \simeq h \implies f \ll h, \\ f \simeq g, & g \ll h \implies f \ll h, \\ f \ll g, & g \ll h \implies f \ll h, \end{cases}$$
- (10) se $f_1 \simeq g_1$, $f_2 \simeq g_2$ e $g_1 \ll g_2$, allora $f_1 \ll f_2$.

■

Dalla precedente proposizione discende il seguente

Principio di sostituzione. *Una funzione che é prodotto o rapporto di piú fattori viene trasformata in una funzione equivalente in x_0 se su di essa si effettuano le seguenti operazioni:*

- (a) sostituire ciascun fattore con una funzione equivalente,
- (b) sostituire la potenza o la radice di un fattore con la potenza o la radice di una funzione equivalente,
- (c) sostituire un fattore che sia somma di due o piú funzioni con il suo **termine dominante**, cioè con l'addendo rispetto al quale gli altri addendi sono trascurabili.

■

Tale principio risulta di enorme utilità quando si deve calcolare il limite per $x \rightarrow x_0$ di una funzione f che sia prodotto o rapporto di altre funzioni e che si presenta in una delle forme indeterminate $0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot (\pm\infty)$. Infatti al termine di tale processo di sostituzioni (e di eventuali semplificazioni), avremo trasformato f in una funzione g equivalente ad f , (avente quindi lo stesso limite di f), di cui é in genere molto piú facile calcolare il limite.

D'altra parte, per calcolare il limite per $x \rightarrow x_0$ di una funzione $f = f_1 + f_2$ che si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$, possiamo, (applicando il principio di sostituzione), trasformare f_1 in una funzione equivalente g_1 ed f_2 in una funzione equivalente g_2 e poi confrontare g_1 con g_2 . Se risulta $g_1 \ll g_2$, allora sarà $f_1 \ll f_2$ e quindi $f_1 + f_2 \simeq f_2 \simeq g_2$; se invece è $g_2 \ll g_1$, allora sarà $f_2 \ll f_1$ e quindi $f_1 + f_2 \simeq f_1 \simeq g_1$.

■

Esempio 8. - Volendo calcolare il limite per $x \rightarrow +\infty$ della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 5}{-x^5 + 3x^3 - 2x + 2},$$

si può osservare che

$$x^3 + 2x - 5 \simeq x^3, \quad -x^5 + 3x^3 - 2x + 2 \simeq -x^5, \quad \text{e quindi } f(x) \simeq x^3/(-x^5) = -x^{-2}.$$

Ne segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^{-2} = 0$.

In generale se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$ sono due polinomi di grado rispettivamente n e k , allora $p(x)/q(x) \simeq a_nx^n/b_kx^k$, e quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < k, \\ a_n/b_k & \text{se } n = k, \\ (a_n/b_k)(+\infty) & \text{se } n > k. \end{cases}$$

Analogamente si calcola il limite di $p(x)/q(x)$ per $x \rightarrow -\infty$.

■

Esempio 9. - Volendo calcolare il limite per $x \rightarrow +\infty$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^5 + 3x^3 - 2x + 2},$$

si può osservare che $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \simeq x^3$ e $x^5 + 3x^3 - 2x + 2 \simeq x^5$ e quindi che

$$\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x - 5} \simeq x^{3/2} \quad \text{mentre} \quad -\sqrt{x^5 + 3x^3 - 2x + 2} \simeq -x^{5/2}.$$

Se ne deduce che

$$\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x - 5} \simeq x^{3/2} \ll -x^{5/2} \simeq -\sqrt{x^5 + 3x^3 - 2x + 2},$$

e dunque che

$$f(x) \simeq -\sqrt{x^5 + 3x^3 - 2x + 2} \simeq -x^{5/2}.$$

Ne segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^{5/2} = -\infty$.

Con un procedimento simile si può calcolare il limite per x che tende a $+\infty$ o a $-\infty$ di una funzione del tipo $f(x) = \sqrt[n]{p(x)} - \sqrt[m]{q(x)}$, dove p e q sono due polinomi di grado k ed l rispettivamente, e $k/n \neq l/m$.

■

Esempio 10. - Volendo calcolare il limite per $x \rightarrow +\infty$ delle funzioni

$$f(x) = \frac{2^x + x^3 - 2x + 5}{x^4 + x^2 \log x - 1}, \quad g(x) = \frac{x^2 \log(x^3 - x + 5) - 3x \log^3(x^2 - 1)}{3^x - x^2 + x \log^2(3x^2 - x + 4)},$$

possiamo osservare che:

- (1) x^3 , $-2x$ e 5 sono trascurabili rispetto a 2^x e quindi $2^x + x^3 - 2x + 5 \simeq 2^x$;
- (2) $x^2 \log x$ e -1 sono trascurabili rispetto a x^4 e quindi $x^4 + x^2 \log x - 1 \simeq x^4$;
- (3) $\log(x^3 - x + 5) \simeq 3 \log x$ e quindi $x^2 \log(x^3 - x + 5) \simeq 3x^2 \log x$;
 analogamente $\log(x^2 - 1) \simeq 2 \log x$ e quindi $-3x \log^3(x^2 - 1) \simeq -3x(2 \log x)^3 = -24x \log^3 x$;
 ne segue che $-3x \log^3(x^2 - 1) \simeq -24x \log^3 x \ll 3x^2 \log x \simeq x^2 \log(x^3 - x + 5)$ e dunque

$$x^2 \log(x^3 - x + 5) - 3x \log^3(x^2 - 1) \simeq x^2 \log(x^3 - x + 5) \simeq 3x^2 \log x$$

- (4) $\log(3x^2 - x + 4) \simeq 2 \log x$ e quindi $x \log^2(3x^2 - x + 4) \simeq x(2 \log x)^2 = 4x \log^2 x \ll 3^x$;
 d' altra parte é $-x^2 \ll 3^x$ e quindi $3^x - x^2 + x \log^2(3x^2 - x + 4) \simeq 3^x$.

Ne segue che

$$f(x) \simeq 2^x/x^4, \quad g(x) \simeq \frac{3x^2 \log x}{3^x}$$

e dunque $f(x) \rightarrow +\infty$, mentre $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

■

Esempio 11. - Volendo calcolare il limite per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{(x + 2x^2) \operatorname{sen}^3 x \sqrt[3]{\arcsin^2 x}}{(\operatorname{tg}^2 x + 5x^4)(\log_3(1+x))^2(\sqrt{1+x}-1)^{1/3}},$$

possiamo osservare che:

- (1) $2x^2$ é trascurabile rispetto ad x e quindi $x + 2x^2 \simeq x$;
- (2) $\operatorname{sen} x \simeq x$ e quindi $\operatorname{sen}^3 x \simeq x^3$;
- (3) $\arcsin x \simeq x$ e quindi $\sqrt[3]{\arcsin^2 x} \simeq x^{2/3}$;
- (4) $\operatorname{tg} x \simeq x$ e quindi $\operatorname{tg}^2 x \simeq x^2$; d' altra parte $5x^4 \ll x^2 \simeq \operatorname{tg}^2 x$ e quindi $\operatorname{tg}^2 x + 5x^4 \simeq \operatorname{tg}^2 x \simeq x^2$;
- (5) $\log_3(1+x) \simeq x/\log 3$ e quindi $(\log_3(1+x))^2 \simeq x^2/\log^2 3$;
- (6) $\sqrt{1+x}-1 \simeq x/2$ e quindi $(\sqrt{1+x}-1)^{1/3} \simeq (x/2)^{1/3}$.

Di conseguenza f é equivalente alla funzione

$$g(x) = \frac{x \cdot x^3 \cdot x^{2/3}}{x^2 \cdot (x^2/\log^2 3) \cdot (x/2)^{1/3}} = (\sqrt[3]{2} \log^2 3)x^{1/3},$$

e dunque si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Esempio 12. - Calcolare il limite per $x \rightarrow 0^+$ della funzione

$$f(x) = \frac{(5 \sqrt[3]{\arcsin^2 x} - 1) \log_2(1 + \operatorname{sen}(x + x^3))}{\arctan^3 \sqrt{x^2 - 2x^3}(1 - \cos \sqrt[3]{x^2})}.$$

Osserviamo che:

- (1) essendo $\sqrt[3]{\arcsin^2 x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, si ha

$$(5 \sqrt[3]{\arcsin^2 x} - 1) \simeq \sqrt[3]{\arcsin^2 x} \cdot \log 5 \simeq x^{2/3} \log 5 \quad \text{in } x = 0;$$

(2) essendo $\sin(x + x^3) \rightarrow 0$ ed $x + x^3 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\log_2(1 + \sin(x + x^3)) \simeq \sin(x + x^3)/\log 2 \simeq (x + x^3)/\log 2 \simeq x/\log 2, \quad \text{poiché } x^3 \ll x;$$

(3) essendo $\sqrt{x^2 - 2x^3} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, sarà $\arctan(\sqrt{x^2 - 2x^3}) \simeq \sqrt{x^2 - 2x^3}$;

d' altra parte, essendo $-2x^3 \ll x^2$, si ha che $x^2 - 2x^3 \simeq x^2$ e quindi $\sqrt{x^2 - 2x^3} \simeq \sqrt{x^2} = x$;

ne segue che $\arctan \sqrt{x^2 - 2x^3} \simeq x$ e quindi $\arctan^3 \sqrt{x^2 - 2x^3} \simeq x^3$;

(4) essendo $\sqrt[3]{x^2} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, si ha: $(1 - \cos \sqrt[3]{x^2}) \simeq x^{4/3}/2$.

Di conseguenza f é equivalente per $x \rightarrow 0$ alla funzione

$$g(x) = \frac{x^{2/3} \log 5 \cdot (x/\log 2)}{x^3 \cdot x^{4/3}/2} = \frac{\log 5}{\log 2} x^{-8/3} \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto f diverge positivamente per $x \rightarrow 0$.

ESERCIZI

1 . - Servendosi del principio di sostituzione calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{|x^3 - x + 1|} - \sqrt{x^4 + 2x^2 + 5},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - \sqrt{4^x - x^2 + x \log x},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3^x - x^2 + 1} - 2^x,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^7 - 5^{\cos x}} - \sqrt[5]{x^9 - \cos(5^x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x - x^4 + 2x^2}{3x - \sqrt{x^3 + \cos(x^2 + 1)}},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 4x^2} - \sqrt{x^3 - x^2}}{\sqrt{3x + 1}},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4^x - x^2 + x \log x}}{x^3 - 3x^2 - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5 + 2x^2} - x^2 + \cos 2x}{2^x - x^4 + x^3 \log(x^3 + 2)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \operatorname{sen} x - 1}{\log_3(1 - x \operatorname{tg}(3x))},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x^2 + 2 \operatorname{arctg} x)}{(4^{x-2\sqrt{x}} - 1)^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2 + 2 \operatorname{arcsen} x)}{\log_2(1 + \operatorname{arcsen}(3x^2))},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen}(2x) \cdot \operatorname{tg}^2(5x + x^2)}{(1 - \cos(5x)) \cdot (\log(1 - 3 \operatorname{sen} x))},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(2x) - 1)(2^{\operatorname{sen} x} - 1)}{(\sqrt[3]{1 - \operatorname{arctan}(5x)} - 1) \log_{10}(1 + \tan(x^2))},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \operatorname{sen}^2(3x)} \cdot (2x^2 + \operatorname{arctg}^3 x)}{(1 - \cos 3x) \log^2(1 + 3 \operatorname{arctg} x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos(2x) \cdot \operatorname{sen}(4x)}{1 - \operatorname{sen}(x + (\pi/4))},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \operatorname{tg}^2 x - \cos(\operatorname{arctg} x)}{\log(1 + x \operatorname{arcsen} 5x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{2^x - x \log 2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2 \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - \sqrt{4^x - x^3 + 2x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^2 - 3x + \operatorname{arctg} x} - \sqrt[3]{x - e^{\cos(x^2)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x^3 + 2} - x^2 + \cos(2x - 1)}{3^x - x^3 \log x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x - 3^x + \operatorname{arctan}(10^x)}{1 - \cos(5^x) - x^{10}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4^x - x^2 + x \log x}}{x^3 - 3x^2 - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \log^2(x^3 - x + 4) + \operatorname{sen} x^2}{2^x - x^3 + x \log(x^2 + 3) + \operatorname{arctg}(x^3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - x^4 + \operatorname{arccotg}(x^3)}{x^2 + 3x \log^2(x^3 + 4) + \operatorname{arcsin}(1/(x^2))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1 + x \operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1 + x \operatorname{sen}(2x)} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \operatorname{arctg}(2x)} - 1}{2^x \operatorname{arcsin} x - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x) \log^2(1 + 3 \operatorname{arctg} x)}{(\sqrt{1 - \operatorname{arcsin}^3 x} - 1) \cdot (2x + \operatorname{tg}^3 x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + x \operatorname{arctg}(2x))}{2^x \operatorname{arcsin} x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1 + \operatorname{arcsen}^2(2x))}{1 - \cos(x^2 + 3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x - 2\sqrt{x})) \cdot (\sqrt{1 + x \operatorname{arctg} x} - 1)}{(5^x \operatorname{sen} 2x - 1) \cdot \log(1 + 2x^2 + \operatorname{tg} x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e - e^x) \operatorname{arctg}(1 - x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1 - x^2 \operatorname{arctg}(3x))}{e^{\operatorname{arcsen}(5x)} - \cos(2x)},$$

2 - Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \operatorname{sen}^2 x - 1}{x \operatorname{tg} x}, & \text{se } x < 0, \\ \log(1 + \sqrt{a+x}), & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1}, & \text{se } x < 0, \\ 2^{a+x} - 1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

trovare i valori del parametro a per cui f è continua in 0 e classificare la discontinuità negli altri casi.

3 - Calcolare i limiti per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$ delle funzioni:

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{\operatorname{arctg} x}, \quad \left(1 + \frac{\log^2 x}{x^3}\right)^{3x - \sqrt{x^4+1}}, \quad \left(1 + (x^2-1)e^{-x}\right)^{\sqrt{x^2+x} + \log^4 x}$$

ALCUNI TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Concludiamo l'argomento relativo a limiti e continuità delle funzioni di una variabile descrivendo alcuni fondamentali risultati sulle funzioni continue.

Cominciamo con la seguente

Proposizione 1.1 - (Limite e continuità per successioni).

Se $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ è continua in un punto $\bar{x}$ di X ed $(x_n)_n$ è una successione di punti di X che converge verso $\bar{x}$, allora la successione $(f(x_n))_n$ converge verso $f(\bar{x})$.

Più in generale, se $\bar{x} \in \hat{\mathbf{R}}$ è un punto di accumulazione di $X \subseteq \mathbf{R}$ ed esiste $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \in \hat{\mathbf{R}}$, allora per ogni successione $(x_n)_n$ punti di $X - \{\bar{x}\}$ che tende ad $\bar{x}$ si ha che $(f(x_n))_n$ tende ad l .

Dim. Ricordando che una successione di numeri reali non è altro che una funzione definita nell'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, la tesi discende direttamente dal teorema sul limite della funzione composta.

■

Osservazione 1.2 - La tesi della precedente Proposizione 1.1 può essere invertita, nel senso che si può dimostrare che f è continua in un punto $\bar{x}$ di X se e solo se :

i) per ogni successione $(x_n)_n$ punti di X che tende ad $\bar{x}$ si ha che $(f(x_n))_n$ tende ad $f(\bar{x})$;

In generale, se $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di X , allora si dimostra che $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \in \hat{\mathbf{R}}$ se e solo se

ii) per ogni successione $(x_n)_n$ punti di $X - \{\bar{x}\}$ che tende ad $\bar{x}$ si ha che $(f(x_n))_n$ tende ad l .

In effetti alcuni autori si limitano a dare la definizione di successione convergente o divergente, (e a studiare le proprietà delle successioni convergenti o divergenti), e danno la i) come definizione di funzione continua in un punto, e la ii) come definizione di limite per $x \rightarrow \bar{x}$ di una funzione.

■

Ciò premesso, passiamo ad enunciare e dimostrare il seguente

Teorema 1.3 - (TEOREMA DEGLI ZERI).

Se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ed assume valori di segno opposto negli estremi a e b , (cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$), allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dim. Per fissare le idee supponiamo che risulti $f(a) < 0 < f(b)$; nel caso $f(a) > 0 > f(b)$ si procede in maniera analoga.

Vogliamo dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione $c \in]a, b[$.

A tal fine consideriamo il punto medio $c_0 = (a + b)/2$ dell'intervallo $[a, b]$ e consideriamo $f(c_0)$. Se $f(c_0) = 0$, il teorema è provato; in caso contrario poniamo:

$$\begin{cases} a_1 = a, & b_1 = c_0 & \text{se } f(c_0) > 0, \\ a_1 = c_0, & b_1 = b & \text{se } f(c_0) < 0. \end{cases}$$

Sarà allora $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, $b_1 - a_1 = (b - a)/2$ ed $f(a_1) < 0 < f(b_1)$.

A questo punto ripetiamo la stessa procedura per la restrizione di f all'intervallo $[a_1, b_1]$; in altri termini detto $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ il punto medio di $[a_1, b_1]$, se $f(c_1) = 0$ il teorema è dimostrato, in caso contrario poniamo:

$$\begin{cases} a_2 = a_1, & b_2 = c_1 & \text{se } f(c_1) > 0, \\ a_2 = c_1, & b_2 = b_1 & \text{se } f(c_1) < 0. \end{cases}$$

Risulterà $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$, $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b - a)/4$ ed $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

Iterando il suddetto procedimento finché è necessario, si possono presentare due sole alternative:

- i) il procedimento si interrompe con un numero finito di iterazioni,
- ii) il procedimento richiede infinite iterazioni.

Nel primo caso si trova esplicitamente una soluzione esatta dell'equazione $f(x) = 0$ dopo un numero finito di passi. Nel secondo caso, si costruiscono infiniti intervalli $[a_n, b_n]$, e quindi si costruiscono una successione crescente $(a_n)_n$ ed una successione decrescente $(b_n)_n$ di elementi dell'intervallo $[a, b]$ tali che per ogni $n \in \mathbf{N}$ si abbia:

$$(1.1) \quad a \leq a_n \leq b_n \leq b,$$

$$(1.2) \quad f(a_n) < 0 < f(b_n),$$

$$(1.3) \quad b_n - a_n = (b - a)/2^n.$$

Dimostreremo che le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ convergono verso un punto $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.

Infatti, dal teorema sul limite delle successioni monotone si deduce che esistono i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf\{b_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

Inoltre dalla (1.3) segue che la successione $(b_n - a_n)_n$ tende a 0 e quindi che risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(b_n - a_n) + a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Posto dunque $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, dalla (1.1) e dal teorema di prolungamento delle disuguaglianze si deduce che $a \leq c \leq b$.

Dalla continuità di f in $[a, b]$, (e quindi in c), segue per la Proposizione 1.1 che risulta

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

D'altra parte, dalla (1.2) e dal teorema di prolungamento delle disuguaglianze si deduce che

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c),$$

donde segue $f(c) = 0$, in virtù della proprietà antisimmetrica della relazione $\leq$ di $\mathbf{R}$.

■

Osservazione 1.4 - E' opportuno richiamare l'attenzione sul carattere costruttivo della dimostrazione del teorema degli zeri. In essa è trasparente un algoritmo per la risoluzione numerica di un'equazione del tipo $f(x) = 0$, che possiamo chiamare il **"metodo di bisezione"**.

Esso fornisce una soluzione esatta dell'equazione con un numero finito di iterazioni oppure, per ogni $n \in \mathbf{N}$, fornisce una approssimazione per difetto a_n e una approssimazione per eccesso b_n di una soluzione, con un errore che è minore o uguale a $b_n - a_n = (b - a)/2^n$.

Volendo dunque trovare i valori approssimati degli zeri di una funzione continua con una approssimazione prefissata ε , basta eseguire un numero k di iterazioni tale che $(b - a)/2^k < \varepsilon$.

■

Il significato geometrico del precedente teorema è evidente: se i punti estremi del grafico di una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ giacciono uno al di sotto ed uno al di sopra dell'asse x , allora tale grafico intersecherà l'asse x almeno in un punto c interno all'intervallo $[a, b]$.

■

Una conseguenza molto importante del teorema degli zeri è il seguente

Teorema 1.5 - (di BOLZANO o dei VALORI INTERMEDI).

Se $X \subseteq \mathbf{R}$ è un intervallo di $\mathbf{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ è continua in X , allora anche l'immagine $f(X)$ di X mediante f è un intervallo, cioè

$$y_1, y_2 \in f(X), \quad y_1 < y_2 \quad \implies \quad]y_1, y_2[\subseteq f(X).$$

Dim. Fissati $y_1, y_2 \in f(X)$, con $y_1 < y_2$, ed $y \in]y_1, y_2[$, vogliamo dimostrare che $y \in f(X)$ cioè che esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

A tal fine siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = y_1$ ed $f(x_2) = y_2$ e consideriamo la funzione $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ definita ponendo $g(x) = f(x) - y$ per ogni $x \in X$. Evidentemente g è continua in X , poiché somma della funzione continua f con la funzione costante $-y$. Inoltre risulta

$$g(x_1) = f(x_1) - y = y_1 - y < 0 \quad \text{e} \quad g(x_2) = f(x_2) - y = y_2 - y > 0.$$

Infine l'intervallo chiuso e limitato di estremi x_1 ed x_2 è contenuto in X , poiché X è un intervallo. Applicando il teorema degli zeri alla restrizione di g all'intervallo chiuso di estremi x_1 ed x_2 , si ottiene che esiste x compreso tra x_1 ed x_2 , (e quindi appartenente ad X), tale che $g(x) = 0$, cioè tale che $f(x) = y$. Questo prova la tesi.

■

Osservazione 1.6 - Il significato geometrico del teorema di Bolzano è evidente: se f è una funzione continua e la proiezione del grafico di f sull'asse x , (cioè il dominio di f), è un intervallo, allora anche la sua proiezione sull'asse y , (cioè l'immagine o codominio di f), è un intervallo.

In altri termini, presi due punti (x_1, y_1) ed (x_2, y_2) di tale grafico, allora per ogni $\bar{y}$ compreso tra y_1 ed y_2 si ha che la retta parallela all'asse x di equazione $y = \bar{y}$ interseca il grafico di f .

Sostanzialmente il teorema degli zeri (o quello dei valori intermedi) affermano che se f è una funzione continua in un intervallo e le disequazioni $f(x) < 0$ ed $f(x) > 0$ hanno soluzione, allora anche l'equazione $f(x) = 0$ ha soluzione. Più in generale, se le disequazioni $f(x) < \bar{y}$ ed $f(x) > \bar{y}$ hanno soluzione, allora anche l'equazione $f(x) = \bar{y}$ ha soluzione.

■

Osservazione 1.7 - Si noti che nei precedenti teoremi le ipotesi che l'insieme di definizione sia un intervallo e che la funzione sia continua in tale intervallo sono essenziali. Ad esempio, la funzione f definita ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0, \\ -1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

evidentemente non si annulla in nessun punto e la sua immagine non è un intervallo. (In effetti essa è definita in $\mathbf{R}$, che è un intervallo, ed assume valori di segno opposto nei punti 1 e -1 , ma è discontinua nel punto 0). Lo stesso accade per la restrizione di f all'insieme $X = \mathbf{R} -]-1, 1[$, che è continua in X , ma X non è un intervallo.

■

Osservazione 1.8 - Dal teorema di Bolzano, dalla continuità delle funzioni $\sin$ e $\cos$ e dal fatto che

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \sin(\pi/2) = 1, \quad \sin(-\pi/2) = -1, \quad 1 \leq \cos x \leq 1, \quad \cos 0 = 1, \quad \cos \pi = -1,$$

segue che l'immagine della funzione $\sin$ e della funzione $\cos$ è l'intervallo $[-1, 1]$.

■

Osservazione 1.9 - Dal teorema degli zeri si deduce che ogni polinomio di grado dispari,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

ha almeno una radice reale.

Infatti, supponendo ad esempio che sia $a_n > 0$, dal teorema di permanenza del segno e dall'essere

$$(1.4) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n = \pm\infty,$$

si deduce che esistono due punti x_1 ed x_2 in $\mathbf{R}$ tali che $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Di conseguenza esiste un punto x compreso tra x_1 ed x_2 tale che $f(x) = 0$.

D'altra parte, per il teorema di Bolzano, si ha che l'immagine di f è un intervallo e dalla (1.4) si deduce che tale intervallo è illimitato inferiormente e superiormente. Ne segue che l'insieme immagine di un polinomio di grado dispari coincide con l'insieme $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$ dei numeri reali, e quindi che l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione reale per ogni $y \in \mathbf{R}$.

■

Passiamo ora ad enunciare un risultato, generalmente attribuito a Weierstrass, che è uno dei risultati più importanti dell'Analisi Matematica, ma di cui omettiamo la dimostrazione per semplicità.

Teorema 1.10 - (di WEIERSTRASS).

Ogni funzione f continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è dotata di minimo e massimo valore, cioè esistono $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ tali che

$$f(\underline{x}) = \min(f[a, b]) = \inf(f[a, b]), \quad f(\bar{x}) = \max(f[a, b]) = \sup(f[a, b]),$$

e quindi tali che $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$ per ogni $x \in [a, b]$.

■

Osservazione 1.11 - Il precedente teorema è davvero uno dei teoremi più importanti dell'Analisi Matematica. Ricordiamo che il punto $\underline{x}$, (rispettivamente $\bar{x}$), dicesi **punto di minimo**, o più propriamente **punto di minimo assoluto**, (rispettivamente **punto di massimo assoluto**), per f . Invece $f(\underline{x}) = m$ ed $f(\bar{x}) = M$ diconsi **valore minimo** e **valore massimo** di f in X .

Ricordiamo ancora che il valore minimo (rispettivamente massimo) di f è unico, ma in generale f potrà avere più punti di minimo (rispettivamente massimo).

■

Osservazione 1.12 - Si noti che le ipotesi che f sia definita in un intervallo chiuso e limitato e che sia ivi continua sono essenziali. In effetti se venisse a mancare una di queste ipotesi il teorema sarebbe falso.

Basti pensare alla funzione $f(x) = 1/x$, che è continua nell'intervallo chiuso ma non limitato, $[1, +\infty[$, che è limitata inferiormente, ma non è dotata di minimo, poiché risulta $f([1, +\infty[) =]0, 1]$. La stessa funzione f è continua nell'intervallo limitato ma non chiuso, $]0, 1]$, e non è dotata di massimo, poiché si ha $f(]0, 1]) = [1, +\infty[$.

Infine la funzione $f(x) = DEC(x) = x - INT(x)$, con $x \in [0, 1]$, è definita in un intervallo chiuso e limitato, ma non è ivi continua, poiché è discontinua nel punto 1. Ebbene f è limitata, ma non è dotata di massimo, poiché l'immagine di f è l'intervallo semiaperto $[0, 1[$.

Non é invece essenziale che f sia definita in un intervallo. La tesi sussiste ancora se f é continua nell'unione di due o di un numero finito di intervalli chiusi e limitati: basta infatti confrontare tra loro i valori minimo e massimo che f assume in ciascuno di tali intervalli e scegliere tra essi il valore piú piccolo e il valore piú grande.

■

Enunciamo infine un ulteriore teorema fondamentale sulle funzioni continue dovuto a George Cantor.

A tal fine é necessario premettere il concetto di funzione **uniformemente continua**. A tale concetto si giunge osservando che, se $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ é una funzione continua in un intervallo X di $\mathbf{R}$, allora per ogni $x \in X$ si ha che $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$ e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } y \in X \cap]x - \delta, x + \delta[, \text{ cioé per ogni } y \in X, \text{ con } |y - x| < \delta.$$

In generale, il numero δ dipende sia da ε sia da x ; ebbene diciamo che f é **uniformemente continua in X** se δ dipende solo da ε e non da x .

In altri termini si dá la seguente definizione.

Definizione 1.13. Si dice che $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ é **uniformemente continua** in X , se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ risulta:

$$|y - x| < \delta \quad \implies \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

■

Esempio 1- Ogni funzione costante é uniformemente continua, poich́e risulta

$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ e per ogni } x, y.$$

■

Esempio 2 - Ogni funzione del tipo $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, é uniformemente continua in $\mathbf{R}$.

Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$|f(x) - f(y)| = |a| \cdot |x - y| < \varepsilon \quad \iff \quad |x - y| < \delta = \varepsilon/|a|;$$

dunque basta prendere $\delta = \varepsilon/|a|$ per avere la tesi.

■

Esempio 3- Piú in generale é uniformemente continua ogni funzione f per cui esista $K > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

Infatti, basta prendere $\delta = \varepsilon/K$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Ad esempio sono uniformemente continue le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$, dal momento che risulta

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|, \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

■

Non sono invece uniformemente continue (nel loro insieme di definizione) le funzioni potenza, le funzioni esponenziali, le funzioni logaritmo.

■

Sussiste però il seguente fondamentale teorema, la cui dimostrazione é omessa per brevità.

Teorema 1.14 - TEOREMA DI CANTOR.

Ogni funzione continua f in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato é uniformemente continua.

CALCOLO DIFFERENZIALE

1 . - Derivata di una funzione

Sia f una funzione reale definita in un intervallo $I \subseteq \mathbf{R}$ e sia x_0 un punto dell'intervallo I . Ci chiediamo se il grafico di f può essere approssimato, vicino al punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, con una retta passante per P_0 e, (se questo è possibile), qual'è la retta passante per P_0 che fornisce la migliore approssimazione.

Ora, la generica retta passante per P_0 ha equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, per cui l'errore della approssimazione è fornito da

$$f(x) - f(x_0) - m(x - x_0);$$

pertanto la retta che eventualmente fornisce la migliore approssimazione è quella per cui si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

ovvero quella di coefficiente angolare

$$(1.1) \quad m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pertanto il grafico di f può essere efficacemente approssimato con una retta vicino al punto P_0 se e solo se il limite (1.1) esiste ed è un numero reale.

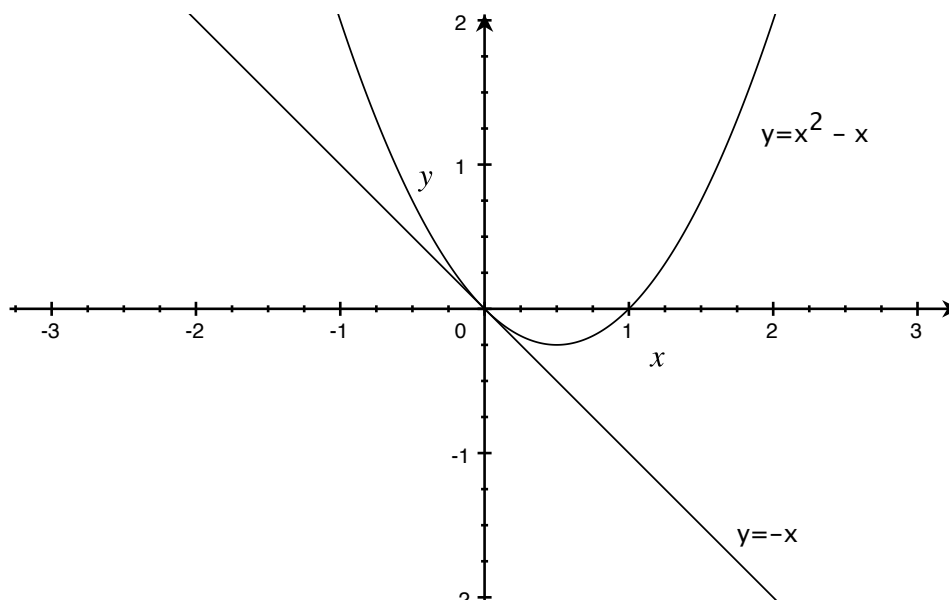
Esempio 1 - Consideriamo le funzioni

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

il limite per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 2x - 0}{x - 0} = x - 2$$

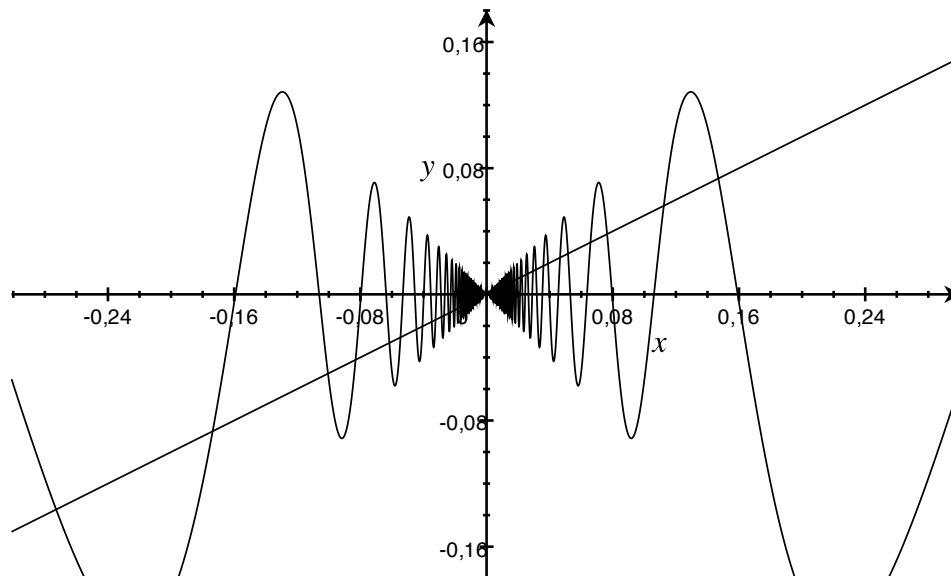
esiste ed è uguale a -2 . Di conseguenza, vicino all'origine $(0,0)$ il grafico di f può essere efficacemente approssimato dalla retta di equazione $y = -2x$,



Invece non esiste il limite per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x - 0} = \operatorname{sen}(1/x).$$

e quindi il grafico di g non può essere approssimato da nessuna retta; (in effetti qualunque retta $y = mx$ con $m \in [-1.1]$ interseca infinite volte il grafico di g).



Le considerazioni precedenti ci portano a dare le seguenti definizioni.

Definizione 1.1 -. Per ogni $x \in I, x \neq x_0$ il numero reale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

dicesi **rapporto incrementale di f tra x_0 ed x** .

La funzione

$$r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{per ogni } x \in I - \{x_0\}$$

dicesi **funzione rapporto incrementale di f in x_0** .

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

(se esiste in $\hat{\mathbf{R}}$), prende il nome di **derivata di f in x_0** e viene indicato con uno dei simboli

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Se la derivata di f in x_0 esiste ed è un numero reale, si dice che f è **derivabile** in x_0 .

Se f è derivabile in ogni punto x dell'intervallo I , si dice che f è derivabile in I .

Osservazione 1.2 - Se f é derivabile in x_0 , per quanto visto sopra, si ha che la retta che meglio approssima il grafico di f vicino al punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ é la retta di equazione

$$(1.2) \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

cioé la retta di equazione

$$y = f(x_0) + \left(\lim_{t \rightarrow x_0} r(t) \right) \cdot (x - x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} \left(f(x_0) + r(t) \cdot (x - x_0) \right),$$

e dunque la retta limite per $t \rightarrow x_0$ della retta di equazione

$$(1.3) \quad y = f(x_0) + r(t)(x - x_0).$$

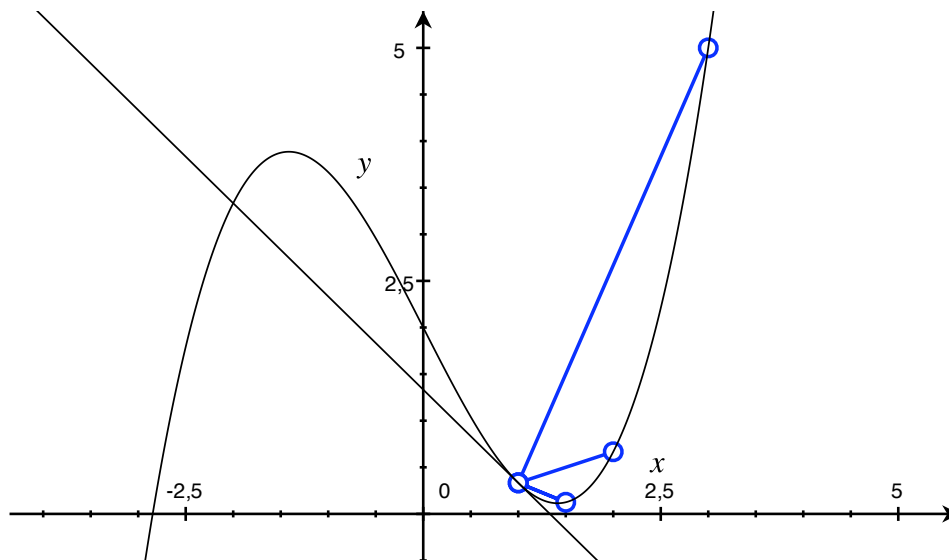
nel senso che il generico punto di ascissa x della retta (1.3) tende verso il corrispondente punto di ascissa x della retta (1.2).

Ora, per ogni $t \in I, t \neq x_0$ il coefficiente angolare $r(t)$ della retta di equazione (1.3), cioè il rapporto incrementale

$$r(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$

rappresenta il coefficiente angolare della retta congiungente i punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (t, f(t))$.

E' evidente che per ogni x compreso tra x_0 ed t ci può essere anche una notevole distanza tra il punto di ascissa x del grafico di f e il punto di ascissa x della retta secante che congiunge P_0 e P . Intuitivamente, però, queste distanze saranno tanto più piccole, (e quindi la retta secante é tanto più vicina al grafico di f), quanto più é piccola la lunghezza dell'intervallo di estremi x_0 ed t , cioè quanto più t é vicino ad x_0 .



Pertanto, la retta di equazione (1.2), cioè la retta limite per $t \rightarrow x_0$ della retta di equazione (1.3) rappresenta effettivamente la retta passante per P_0 che più si avvicina al grafico di f vicino a P_0 , quella che meglio "aderisce" al grafico di f in P_0 ; per questo motivo tale retta prende il nome di **retta tangente al grafico di f in P_0** .

In altri termini, la derivata $f'(x_0)$ di f in x_0 rappresenta il coefficiente angolare o pendenza della retta tangente al grafico di f in P_0 .

Osservazione 1.3 - Se la derivata di f in x_0 è uguale a $\pm\infty$, allora l'equazione (1.3) della retta congiungente P_0 con $P = (t, f(t))$ può scriversi $x = x_0 + (y - y_0)/r(t)$ e quindi tale retta tende verso la retta di equazione $x = x_0$. Per questo motivo si dice che la retta tangente al grafico di f in P_0 è la retta di equazione $x = x_0$.

Esempio 1 - Consideriamo la funzione $f(x) = c$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; si ha allora che f è derivabile in $\mathbf{R}$ e risulta $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Infatti per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

In effetti il grafico di f è la retta r parallela all'asse x di equazione $y = c$, e quindi la retta tangente al grafico di f in un punto qualunque è la retta r stessa, cioè la retta di coefficiente angolare 0.

Esempio 2 - Consideriamo la funzione $f(x) = mx + q$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; si ha allora che f è derivabile in $\mathbf{R}$ e risulta $f'(x) = m$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Infatti per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = m.$$

In effetti il grafico di f è la retta r di equazione $y = mx + q$, e quindi la retta tangente al grafico di f in un punto qualunque è la retta r stessa, cioè la retta di coefficiente angolare m .

Esempio 3 - Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; si ha allora che f è derivabile in $\mathbf{R}$ e risulta $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Infatti per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x.$$

Pertanto $2x$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$.

Ad esempio la retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ nel punto $P_0 = (1, 1)$ ha equazione $y = 1 + 2(x - 1)$ cioè $y = 2x - 1$.

Esempio 4 - La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è derivabile nell'intervallo $]0, +\infty[$ e per ogni $x \in]0, +\infty[$ risulta:

$$\begin{aligned} D\sqrt{x} = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Invece si ha

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente al grafico di f ad esempio in $P_0 = (2, \sqrt{2})$ è

$$y = \sqrt{2} + (1/(2\sqrt{2}))(x - 2) \quad \text{cioè} \quad y = (\sqrt{2}/4)(x + 2).$$

Invece la retta tangente in $(0, 0)$ al grafico di f è la retta di equazione $x = 0$.

2 . - Punti angolosi e punti cuspidali

Se x_0 è un punto interno all'intervallo I , (cioè diverso dagli eventuali estremi di I), diconsi **derivata destra** e **derivata sinistra** di f in x_0 i limiti

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &= D^+ f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} r(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \\ f'(x_0^-) &= D^- f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \end{aligned}$$

purché tali limiti esistano in $\hat{\mathbf{R}}$.

Se la derivata sinistra $f'(x_0^-)$ e/o la derivata destra $f'(x_0^+)$ di f in x_0 esistono e sono numeri reali, allora $f'(x_0^-)$ ed $f'(x_0^+)$ rappresentano il coefficiente angolare delle rette tangenti al grafico delle restrizioni di f agli insiemi $I \cap]-\infty, x_0]$ ed $I \cap [x_0, +\infty[$.

Le semirette di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0^-)(x - x_0) \quad \text{con } x \leq x_0, \quad \text{e} \quad y = f(x_0) + f'(x_0^+)(x - x_0) \quad \text{con } x \geq x_0$$

diconsi le semirette tangenti a sinistra e a destra al grafico di f in $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Se la derivata sinistra o destra di f in x_0 è uguale a $\pm\infty$, allora la retta di equazione $x = x_0$ è la retta tangente in $P_0 = (x_0, f(x_0))$ al grafico della restrizione di f agli insiemi $I \cap]-\infty, x_0]$ o $I \cap [x_0, +\infty[$: si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è la semiretta tangente a sinistra o a destra al grafico di f in $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Osservazione 2.1 - Ovviamente, se x_0 è interno ad I , allora esiste la derivata di f in x_0 se e solo se la derivata sinistra e la derivata destra di f in x_0 esistono e coincidono.

In particolare, f è derivabile in x_0 se e solo se la derivata sinistra e destra di f in x_0 esistono, sono numeri reali e coincidono: $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$.

Pertanto f è derivabile in x_0 se e solo se la semiretta tangente a sinistra e la semiretta tangente a destra al grafico di f in P_0 sono una il prolungamento dell'altra e formano un'unica retta tangente.

Se invece la derivata sinistra $f'(x_0^-)$ e la derivata destra $f'(x_0^+)$ di f in x_0 esistono, sono numeri reali, ma sono diversi, allora la semiretta tangente a sinistra e la semiretta tangente a destra al grafico di f in P_0 formano un angolo.

Questo fatto giustifica la seguente

Definizione 2.2 -. Se f è continua in un punto x_0 interno ad I e la derivata sinistra $f'(x_0^-)$ e la derivata destra $f'(x_0^+)$ di f in x_0 esistono, sono numeri reali, ma sono diversi, allora si dice che x_0 è un **punto angoloso** di f .

Se invece la derivata sinistra $f'(x_0^-)$ e la derivata destra $f'(x_0^+)$ di f in x_0 esistono, sono diverse, ed una almeno di esse è uguale a $\pm\infty$, allora si dice che x_0 è un **punto cuspidale** di f .

Esempio 1 - Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; si ha allora:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ne segue che 0 è punto angoloso di f , dal momento che

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{ed} \quad f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

Esempio 2 - Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; si ha allora:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|0|}}{x - 0} = \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ -1/\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ne segue che

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad \text{ed} \quad f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty,$$

e quindi 0 é punto cuspidale di f .

3 . - Funzioni strettamente crescenti o strettamente decrescenti in un punto.

Ricordiamo che, nel caso di una retta di equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$, il segno del coefficiente angolare m ci dice se la funzione $y = mx + q$ é strettamente crescente (se $m > 0$) o strettamente decrescente (se $m < 0$), mentre il suo valore assoluto ci dice quanto rapidamente tale funzione cresce o decresce .

Pertanto, se f é una funzione derivabile in un punto $x_0 \in I$ e risulta $f'(x_0) \neq 0$, allora il segno di $f'(x_0)$ ci dice se la funzione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, (il cui grafico é la retta tangente al grafico di f in $P_0 = (x_0, f(x_0))$), é una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente e il suo valore assoluto ci dice quanto rapidamente tale funzione cresce o decresce .

Dal momento che la retta tangente é quella che meglio aderisce al grafico di f vicino a P_0 , ci aspettiamo che dal segno e dal valore assoluto di $f'(x_0)$ potremo ricavare analoghe informazioni sul comportamento di f .

Ovviamente, dalla sola conoscenza di $f'(x_0)$ non potremo aspettarci di poter ottenere informazioni sul comportamento di f su tutto il suo insieme di definizione I . Ad esempio non potremo aspettarci che f sia strettamente crescente (o strettamente decrescente) in tutto I solo perché il suo grafico é tangente in un punto ad una retta con pendenza > 0 (o < 0).

Dalla conoscenza di $f'(x_0)$ potremo però avere delle informazioni sul comportamento di f vicino ad x_0 , cioè in un opportuno intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0 . Questo ci porta a dare la seguente

Definizione 3.1. Diciamo che f é strettamente crescente (rispett. decrescente) nel punto x_0 di I , se esiste $\delta > 0$ tale che:

- per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[$ risulta $f(x) < f(x_0)$, (rispett. $f(x) > f(x_0)$),
- per ogni $x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[$ risulta $f(x) > f(x_0)$, (rispett. $f(x) < f(x_0)$),

o equivalentemente tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad (\text{rispett. } < 0), \quad \text{per ogni } x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\} .$$

Si noti che se f é strettamente crescente (rispett. decrescente) in I , allora il rapporto incrementale tra due punti qualunque di I é > 0 (rispett. < 0), e quindi f é strettamente crescente (rispett. decrescente) in x_0 .

Ovviamente, se f é strettamente crescente (o decrescente) in x_0 non é detto che f sia strettamente crescente (o decrescente) in I , anzi non é nemmeno detto che f sia strettamente crescente (o decrescente) in un opportuno intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0 , perché non siamo in grado di stabilire il segno del rapporto incrementale tra due punti qualunque di tale intervallo, ma solo il segno del rapporto incrementale tra x_0 ed un punto vicino x .

Ciò posto, si ha immediatamente che il segno di $f'(x_0)$ ci dice effettivamente se f é strettamente crescente o strettamente decrescente in x_0 .

Proposizione 3.2. Se f é derivabile in $x_0 \in I$ e risulta $f'(x_0) > 0$, (rispett. $f'(x_0) < 0$), allora f é strettamente crescente (rispett. strettamente decrescente) in x_0 .

Dim. Infatti dall'essere

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad (\text{rispett. } < 0),$$

si deduce (per il teorema di permanenza del segno) che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (\text{rispett. } < 0) \quad \text{per ogni } x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\};$$

questo prova la tesi.

■

D'altra parte, sappiamo che in un opportuno intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0 , il grafico di f può essere efficacemente approssimato dalla retta tangente, e quindi

$$f(x) \quad \text{é approssimativamente uguale ad} \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

ovvero che

$$f(x) - f(x_0) \quad \text{é approssimativamente uguale ad} \quad f'(x_0)(x - x_0).$$

In altri termini, l'incremento di valore di f conseguente ad un incremento $x - x_0$ della variabile x é approssimativamente proporzionale all'incremento $x - x_0$ secondo il fattore di proporzionalità $f'(x_0)$.

Pertanto il valore assoluto di $f'(x_0)$ rappresenta la rapidità con cui approssimativamente la funzione f cresce o decresce nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Naturalmente l'errore dell'approssimazione, cioè $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, sarà un errore grossolano se la distanza $|x - x_0|$ é "grande", ed é invece tanto più piccolo quanto più é piccolo il raggio δ dell'intorno di x_0 .

■

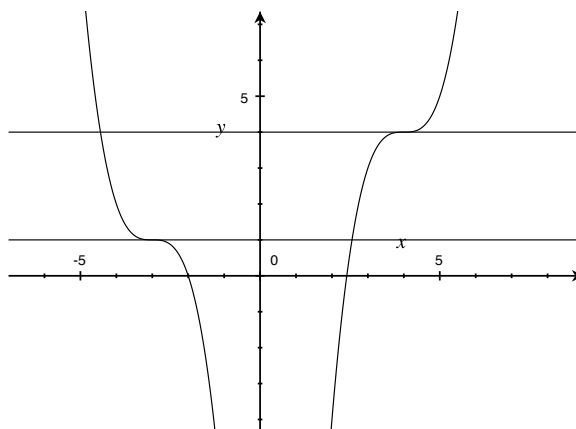
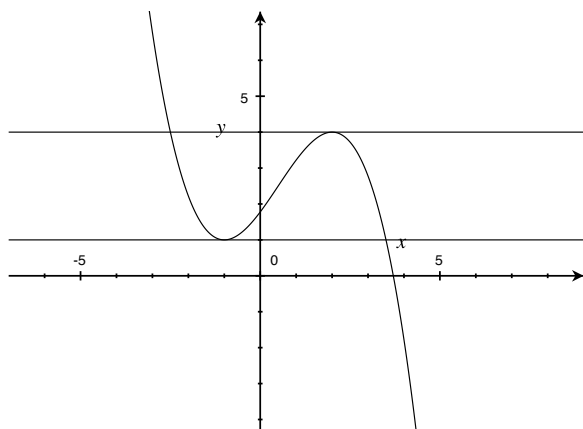
Osservazione 3.3 - Se f é derivabile in x_0 , ma

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

allora vicino ad x_0 si ha che $f(x)$ varia in maniera impercettibile; la retta tangente al grafico di f in $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ha equazione $y = f(x_0)$, cioè é una retta parallela all'asse x .

Peró non sappiamo se (in un opportuno intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0) tale tangente :

- giace sotto il grafico di f , (il che significa che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$),
- giace sopra al grafico, (il che significa che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$),
- "taglia" il grafico, nel senso che ad esempio si ha $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[$ ed $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[$ o viceversa.



Per questo motivo, se f é derivabile in $x_0 \in I$ e risulta $f'(x_0) = 0$, si dice che x_0 é un **punto critico** o **stazionario** di f .

Osservazione 3.4 - (Significato cinematico della derivata)

Supponiamo di voler descrivere il moto di un punto materiale su una retta, ad esempio di una automobile su un'autostrada (rettilinea). Supponiamo che sia stato scelto un riferimento cartesiano sulla retta del moto, (ed infatti lungo l'autostrada si incontrano i cartelli con le indicazioni chilometriche).

Il moto dell'oggetto é pienamente descritto dalla *legge oraria del moto*, cioé dalla funzione $x = x(t)$ che associa ad ogni istante t l'ascissa $x(t)$ del punto occupato nell'istante t dall'oggetto in moto.

Se la posizione occupata all'istante t_0 é $x(t_0)$, allora per ogni $t \neq t_0$ abbiamo che:

- $|x(t) - x(t_0)|$ rappresenta lo spazio percorso dall'oggetto nell'intervallo di tempo tra l'istante t_0 e l'istante t ,
- $|(x(t) - x(t_0))/(t - t_0)|$ rappresenta la velocità media nello stesso intervallo di tempo.

Naturalmente, in un intervallo di tempo lungo ci possono essere notevoli fluttuazioni nella velocità rispetto alla velocità media; queste fluttuazioni però saranno meno accentuate se si prende in considerazione un intervallo di tempo "piccolo", ed anzi saranno tanto più piccole quanto più $|t - t_0|$ é piccolo.

Il limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0)$$

rappresenta la **velocità istantanea** del punto nell'istante t_0 .

Se la velocità istantanea $x'(t_0)$ é maggiore di 0, vuol dire che la funzione $x = x(t)$ é strettamente crescente in t_0 , e quindi immediatamente prima dell'istante t_0 si ha $x(t) < x(t_0)$ e subito dopo l'istante t_0 sarà $x(t) > x(t_0)$; pertanto il moto sta avvenendo nel verso positivo delle ascisse. Se invece é $x'(t_0) < 0$, allora la funzione $x = x(t)$ é strettamente decrescente in t_0 e quindi il moto sta avvenendo nel verso negativo delle ascisse.

Pertanto il segno di $x'(t_0)$ ci fornisce una informazione sul verso del moto: ad esempio se $x = x(t)$ descrive il moto di un'auto in viaggio sull'autostrada Bologna Bari, allora il segno di $x'(t_0)$ ci dice se nell'istante t_0 l'auto si sta muovendo da Bologna verso Bari o viceversa.

Il valore assoluto di $x'(t_0)$ ci dice invece con quale rapidità cambia la posizione dell'oggetto nel tempo. Ad esempio se il tempo é misurato in ore e lo spazio percorso in chilometri, allora la velocità istantanea $x'(t_0)$ sarà misurata in km/h .

Se nell'istante t_0 l'auto si trova al chilometro $x(t_0) = 275$ e la velocità istantanea é $x'(t_0) = +90km/h$, allora potremo fare la previsione che tra mezz'ora l'auto si troverá al chilometro $275 + 90/2 = 320$; se invece la velocità istantanea fosse stata di $+120km/h$ allora si potrà prevedere che tra mezz'ora l'auto si troverá approssimativamente al chilometro $275 + 120/2 = 335$.

Naturalmente, si tratta di una previsione azzardata, perché in mezz'ora ci possono essere grosse variazioni nelle condizioni di traffico; prevedere che dopo 10 minuti l'auto si trovi approssimativamente al chilometro $275 + 90/6 = 290$ o al chilometro $275 + 120/6 = 295$ é sicuramente più attendibile, perché é ragionevole aspettarsi che in 10 minuti le variazioni nelle condizioni di traffico siano meno significative. La previsione che tra 1 minuto l'auto si troverá al chilometro $275 + 90/60 = 276.5$ o al chilometro $275 + 120/60 = 277$ é ancora più attendibile, e cosí via.

Naturalmente se fosse $x'(t_0) = -90km/h$, allora si potrà prevedere che tra 1 minuto, 10 minuti, mezz'ora l'auto si troverá approssimativamente al chilometro $275 - 90/60 = 273,5$ o al Km. $275 - 90/6 = 260$ o al Km. $275 - 90/2 = 230$ rispettivamente.

■

Osservazione 3.5 - Le considerazioni precedenti possono essere applicate in contesti totalmente differenti. Consideriamo ad esempio un'azienda manifatturiera che produce e vende un bene; istante per istante parte della merce già prodotta e detenuta nel magazzino ne esce perché viene venduta e d'altra parte nuova merce viene prodotta ed entra in magazzino; per ogni istante t sia $x = x(t)$ il livello dell'inventario all'istante t , cioè la quantità di merce presente in magazzino all'istante t .

Fissato l'istante t_0 , per ogni $t \neq t_0$ si ha che:

- $x(t) - x(t_0)$ rappresenta il flusso di magazzino nell'intervallo di tempo di estremi t_0 e t ,
- $(x(t) - x(t_0))/(t - t_0)$ rappresenta l'intensità media di flusso di magazzino nello stesso intervallo di tempo.

Se la durata dell'intervallo di tempo di estremi t_0 e t è grande, (ad esempio una settimana o un giorno) ci possono essere fluttuazioni notevoli sia nella produzione che nella vendita; tali fluttuazioni saranno meno significative se prendiamo in considerazione intervalli temporali più brevi.

Il limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0)$$

fornisce una indicazione precisa della dinamica del magazzino nell'istante t_0 e dicesi **intensità istantanea** del flusso di magazzino nell'istante t_0 .

Se $x'(t_0) > 0$, vuol dire che il livello dell'inventario è strettamente crescente in t_0 ; nel prossimo futuro il magazzino tenderà ad ingolfarsi, perché la merce prodotta non sarà assorbita dalle vendite. Viceversa, se $x'(t_0) < 0$, vuol dire il livello dell'inventario è strettamente decrescente in t_0 ; nel prossimo futuro il magazzino tenderà ad svuotarsi, perché la merce prodotta è insufficiente a soddisfare la domanda di quel bene. Il segno di $x'(t_0)$ segnala quindi che si è in un momento di “domanda fiacca” o in un momento di “domanda vivace”.

Il valore assoluto di $x'(t_0)$ ci dice invece con quale rapidità la merce si sta accumulando in magazzino o con quale rapidità il magazzino si sta svuotando; questa informazione è utile al fine di stabilire se, quando e in che misura si deve ridurre o incrementare il tasso di produzione del bene.

Ad esempio la conoscenza di $x'(t_0)$ ci può permettere di fare una previsione sul tempo t occorrente perché il magazzino diventi saturo (al punto da non saper più dove conservare la merce prodotta) o perché il magazzino diventi completamente vuoto (al punto da non poter più soddisfare la domanda), e naturalmente il grado di attendibilità di queste previsioni dipende dalla distanza di t da t_0 .

4. - Derivata delle funzioni elementari:

In questo paragrafo dimostreremo che le funzioni elementari sono funzioni derivabili e impareremo a calcolarne le derivate.

■

Proposizione 4.1 -. Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha:

$$(1) \quad Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{per ogni } x > 0$$

$$(2) \quad Dx^n = nx^{n-1} \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R};$$

$$(3) \quad D\left(\frac{1}{x^n}\right) = Dx^{-n} = -nx^{-n-1} = -n/x^{n+1} \quad \text{per ogni } x \neq 0;$$

$$(4) \quad D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \begin{array}{l} \text{per ogni } x > 0 \text{ se } n \text{ è pari,} \\ \text{per ogni } x \neq 0 \text{ se } n \text{ è dispari} \end{array}$$

$$(5) \quad D\sqrt[n]{x} = +\infty \quad \text{se } x = 0$$

$$(6) \quad De^x = e^x, \quad Da^x = a^x \log a, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R};$$

$$(7) \quad D \log x = 1/x, \quad D \log_a(x) = 1/(x \log a), \quad \text{per ogni } x \in]0, +\infty[;$$

$$(8) \quad D \operatorname{sen} x = \cos x, \quad D \cos x = -\operatorname{sen} x \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

I. nfatti per ogni $x > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} Dx^\alpha &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x^\alpha \cdot \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h} = \\ &\quad (\text{posto } u = h/x, \ h = xu \text{ ed osservato che } u \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0) \\ &= x^\alpha \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^\alpha - 1}{xu} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Se $\alpha \in \mathbf{Z}$, il precedente ragionamento vale anche per $x < 0$, e questo dimostra la (2) e la (3) per ogni $x \neq 0$. D'altra parte, la (2) per $x = 0$ e la (5) discendono dal fatto che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - 0^n}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = +\infty.$$

Inoltre, per ogni $x > 0$ se n é pari e per ogni $x \neq 0$ se n é dispari, si ha :

$$\begin{aligned} D \sqrt[n]{x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} \cdot \frac{\sqrt[n]{1+h/x} - 1}{h} = \\ &\quad (\text{posto } u = h/x, \ h = xu, \text{ ed osservato che } u \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0) \\ &= \sqrt[n]{x} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{1/n} - 1}{xu} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Infine risulta

$$De^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$$Da^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log(a)$$

$$D \log(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log((x+h)/x)}{h} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+(h/x))}{h/x} = \frac{1}{x}.$$

$$D \log_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a((x+h)/x)}{h} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+(h/x))}{h/x} = \frac{1}{x} \cdot \log(a).$$

$$\begin{aligned} D \operatorname{sen}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(h) + \operatorname{sen}(h) \cos(x) - \operatorname{sen}x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\operatorname{sen}h}{h} = 0 \cdot \operatorname{sen}(x) + 1 \cdot \cos(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \cos(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \operatorname{sen}(h) \operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \operatorname{sen}(x) \frac{\operatorname{sen}h}{h} = 0 \cdot \cos(x) - 1 \cdot \operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

■

5. - Regole di derivazione

In questo paragrafo impareremo a calcolare la derivata delle funzioni somma, prodotto, rapporto e composta di funzioni derivabili; a tal fine conviene premettere la seguente

Proposizione 5.1 -. *Una funzione $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ derivabile in un punto x_0 di I è ivi continua.*

Infatti, per ogni $x \neq x_0$ si ha:

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0),$$

e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \cdot f'(x_0) + f(x_0) = f(x_0)$; questo prova la tesi.

■

N.B.: della proposizione precedente non vale il viceversa: ad esempio la funzione $y = |x|$ é continua in 0, ma non é ivi derivabile.

■

Proposizione 5.2 -. *Se f e g sono funzioni derivabili in x_0 , allora $f + g$, fg ed f/g sono ivi derivabili e si ha:*

$$D(c \cdot f)(x_0) = c \cdot Df(x_0),$$

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0),$$

$$D(f \cdot g)(x_0) = (Df)(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot (Dg)(x_0)$$

$$D(f/g)(x_0) = \frac{(Df)(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot (Dg)(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \text{purchè } g(x_0) \neq 0.$$

Infatti si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(cf)(x) - (cf)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

D'altra parte, tenuto conto del fatto che g é continua in x_0 per la precedente Prop. 5.1, si ha che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right) \cdot \frac{1}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\
&= \frac{1}{(g(x_0))^2} (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))
\end{aligned}$$

■

Esempio 1 - La funzione $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ é derivabile in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= D(x^3 - 5x^2 + 3x - 4) = Dx^3 + D(-5x^2) + D(3x - 4) = \\
&= 3x^2 - 5D(x^2) + 3 = 3x^2 - 10x + 3.
\end{aligned}$$

In generale, una funzione polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é derivabile in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= D(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = \\
&= D(a_n x^n) + D(a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + D(a_2 x^2) + D(a_1 x + a_0) = \\
&= a_n D x^n + a_{n-1} D x^{n-1} + \dots + a_2 D x^2 + a_1 = \\
&= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.
\end{aligned}$$

Pertanto la derivata di una funzione polinomio di grado n é un polinomio di grado $n - 1$.

■

Esempio 2 - Le funzioni $f(x) = 3^x \cos x$ e $g(x) = \log(x)/(x^2 - 3x + 4)$ sono derivabili in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta:

$$f'(x) = D3^x \cdot \cos(x) + 3^x D \cos(x) = 3^x \log(3) \cdot \cos(x) - 3^x \sin(x) = 3^x (\cos(x) \log(3) - \sin(x)),$$

$$g'(x) = \frac{D \log(x) \cdot (x^2 - 3x + 4) - \log(x) \cdot D(x^2 - 3x + 4)}{(x^2 - 3x + 4)^2} = \frac{(x - 3 + 4/x) - (2x - 3) \log(x)}{(x^2 - 3x + 4)^2}$$

■

Esempio 3 - Le funzioni tangente e cotangente sono derivabili nel loro insieme di definizione e, per ogni x in tale insieme di definizione, risulta:

$$\begin{aligned}
D \operatorname{tg}(x) &= D \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{D \sin(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) D \cos(x)}{\cos^2(x)} = \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D \operatorname{cotg}(x) &= D \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) = \frac{D \cos(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) D \sin(x)}{\sin^2(x)} = \\
&= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\cos^2(x)} = -1 - \operatorname{cotg}^2(x)
\end{aligned}$$

■

Proposizione 5.3 - (Derivata della funzione composta).

Siano date due funzioni reali $f : \text{dom}(f) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $g : \text{dom}(g) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e sia $g \circ f$ la funzione composta di f con g . Se f é derivabile in $x_0 \in \text{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in \text{dom}(f) \wedge f(x) \in \text{dom}(g)\}$ e g é derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ é derivabile in x_0 e risulta:

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \cdot Df(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dim. Infatti, posto

$$\omega(y) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \quad \text{per ogni } y \in \text{dom}(g) - \{y_0\} \quad \text{ed} \quad \omega(y_0) = g'(y_0),$$

si ha che ω é continua in y_0 e per ogni $y \in \text{dom}(g)$ risulta:

$$g(y) = g(y_0) + \omega(y)(y - y_0) = g(f(x_0)) + \omega(y)(y - f(x_0)).$$

Ne segue che per ogni $x \in \text{dom}(g \circ f)$, $x \neq x_0$ si ha:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \omega(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$, la funzione rapporto incrementale $[f(x) - f(x_0)] / (x - x_0)$ tende verso $f'(x_0)$ e la funzione $\omega \circ f$ tende verso $(\omega \circ f)(x_0) = \omega(f(x_0)) = \omega(y_0) = g'(y_0)$, dal momento che f é continua in x_0 (poiché ivi derivabile) e ω é continua in $y_0 = f(x_0)$.

Pertanto la funzione rapporto incrementale di $g \circ f$ in x_0 tende verso $g'(y_0) \cdot f'(x_0)$, come volevasi.

■

Ad esempio risulta:

$$\begin{aligned} D \cos(x^3 - 3x^2 + 4) &= D \cos(y) \cdot Dy && (\text{dove } y = x^3 - 3x^2 + 4) \\ &= -\sin(y) \cdot Dy = -(3x^2 - 6x) \sin(x^3 - 3x^2 + 4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\log(x^2 - 3x + 4)) &= D \log(y) \cdot Dy && (\text{dove } y = x^2 - 3x + 4) \\ &= (1/y) Dy = (2x - 3)/(x^2 - 3x + 4). \end{aligned}$$

■

6. - Derivata della funzione inversa

La successiva proposizione ci insegna ad esempio a calcolare la derivata delle funzioni circolari inverse: arcoseno, arcocoseno, ecc...

Proposizione 6.1 - (Derivata della funzione inversa). - Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente e derivabile nell'intervallo I e sia $J = \text{Im}(f)$ l'insieme immagine di f ; allora per ogni $y \in J$ risulta

$$Df^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} & \text{se } f'(f^{-1}(y)) \neq 0, \\ +\infty & \text{se } f'(f^{-1}(y)) = 0 \text{ ed } f \text{ é strettamente crescente,} \\ -\infty & \text{se } f'(f^{-1}(y)) = 0 \text{ ed } f \text{ é strettamente decrescente.} \end{cases}$$

Dim. Innanzitutto osserviamo che f é continua in I , dal momento che essa é ivi derivabile; ne segue che J é un intervallo, per il teorema di Bolzano. L'inversa f^{-1} di f é continua in J , poiché é strettamente crescente o strettamente decrescente, il suo dominio é l'intervallo J e la sua immagine é l'intervallo I .

Ciò posto, sia $y_0 \in J$ e sia $x_0 = f^{-1}(y_0)$ e quindi $y_0 = f(x_0)$; si ha allora per ogni $y \in J, y \neq y_0$:

$$(*) \quad \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{y - f(x_0)} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{1}{r(f^{-1}(y))},$$

dove $r(x)$ é la funzione rapporto incrementale di f in x_0 .

Passando al limite per $y \rightarrow y_0$, si ha che $f^{-1}(y)$ tende ad $f^{-1}(y_0) = x_0$, poiché f^{-1} é continua; d'altra parte, per $x \rightarrow x_0$, la funzione rapporto incrementale $r(x)$ tende verso $f'(x_0)$. Dal teorema sul limite della funzione composta si deduce che $r(f^{-1}(y))$ tende verso $f'(x_0)$, e quindi la funzione rapporto incrementale di f^{-1} in y_0 tende a $1/f'(x_0)$ se $f'(x_0) \neq 0$. Se invece é $f'(x_0) = 0$, allora la funzione rapporto incrementale di f^{-1} in y_0 tende a $+\infty$ o a $-\infty$ a seconda che f ed f^{-1} siano strettamente crescenti o decrescenti, dal momento che il loro rapporto incrementale é rispettivamente maggiore o minore di 0.

■

Esempio 1 - Ricordando che la restrizione della funzione tangente all'intervallo $] -\pi/2, \pi/2[$ é strettamente crescente e derivabile e che la sua inversa é la funzione arcotangente, si ha che

$$D \operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{D \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(y))} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(y))} = \frac{1}{1 + y^2} \quad \text{per ogni } y \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, ricordando che la restrizione della funzione cotangente all'intervallo $]0, \pi[$ é strettamente decrescente e derivabile e che la sua inversa é la funzione arcocotangente, si ha che

$$D \operatorname{arccotg}(y) = \frac{1}{D \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}(y))} = -\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2(\operatorname{arccotg}(y))} = -\frac{1}{1 + y^2} \quad \text{per ogni } y \in \mathbf{R}.$$

■

Esempio 2 - Ricordando che la restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ é strettamente crescente e derivabile e che la sua inversa é la funzione arcseno, per ogni $y \in [-1, 1]$ si ha che

$$D \operatorname{arcsen}(y) = \frac{1}{D \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(y))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(y))}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} & \text{se } y \in] -1, 1[, \\ +\infty & \text{se } y = \pm 1. \end{cases}$$

Analogamente, ricordando che la restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ é strettamente decrescente e derivabile e che la sua inversa é la funzione arccoseno, per ogni $y \in [-1, 1]$ si ha che

$$D \operatorname{arccos}(y) = \frac{1}{D \operatorname{cos}(\operatorname{arccos}(y))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(y))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2(\operatorname{arccos}(y))}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} & \text{se } y \in] -1, 1[, \\ -\infty & \text{se } y = \pm 1. \end{cases}$$

■

7. - Funzione derivata prima. Derivate successive.

Se $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ é una funzione derivabile in I , la funzione che associa ad ogni $x \in I$ la derivata di f in x dicesi **funzione derivata di f** e viene indicata con uno dei simboli f' o Df o df/dx .

Se ora x_0 é un punto di I , la derivata in x_0 della funzione f' , cioè il limite

$$D(f')(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

dicesi **derivata seconda** di f in x_0 e viene indicata con uno dei simboli

$$f''(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Se la derivata seconda di f in x_0 esiste ed é un numero reale si dice che f é derivabile due volte in x_0 .

Se f é derivabile due volte in ogni punto x di I si dice che f é derivabile due volte in I e la funzione $f'' = D^2 f$ che associa ad ogni $x \in I$ la derivata seconda di f in x dicesi **funzione derivata seconda di f** .

Il procedimento può essere iterato: la derivata di f'' in x_0 dicesi **derivata terza di f in x_0** e si indica con uno dei simboli

$$f'''(x_0), \quad f^{(3)}(x_0), \quad D^3 f(x_0), \quad \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0).$$

Si dice che f é derivabile tre volte in x_0 se la derivata terza di f in x_0 esiste ed é un numero reale.

Si dice che f é derivabile tre volte in I se f é derivabile tre volte in ogni punto di I .

Allo stesso modo si può definire la eventuale derivata quarta, quinta, e così via: la derivata n -sima di f in x_0 si denota con i simboli

$$f^{(n)}(x_0) \quad \text{o} \quad D^n f(x_0) \quad \text{o} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0).$$

Se per ogni $n \in \mathbf{N}$ la derivata n -sima di f in x_0 esiste ed é un numero reale si dice che f é infinitamente derivabile in x_0 .

■

Esempio 1 - La funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 5$ é infinitamente derivabile in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} Df(x) &= 3x^2 - 8x - 3 \\ D^2 f(x) &= D(Df)(x) = D(3x^2 - 8x - 3) = 6x - 8 \\ D^3 f(x) &= D(D^2 f)(x) = D(6x - 8) = 6 \\ D^4 f(x) &= D(D^3 f)(x) = D6 = 0 \\ D^n f(x) &= 0 \quad \text{per ogni } n > 4 \end{aligned}$$

In generale qualunque polinomio é una funzione infinitamente derivabile in $\mathbf{R}$.

■

Esempio 2 - La funzione $f(x) = e^x$ é infinitamente derivabile in $\mathbf{R}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$D^n f(x) = e^x.$$

Infatti si ha

$$Df(x) = e^x, \quad D^2 f(x) = D(f')(x) = De^x = e^x, \quad D^3 f(x) = D(D^2 f)(x) = De^x = e^x, \quad \dots\dots\dots$$

In generale, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione $f(x) = a^x$ é infinitamente derivabile in $\mathbf{R}$ e risulta

$$D^n f(x) = a^x (\log(a))^n \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

■

Esempio 3 - Le funzioni seno e coseno sono infinitamente derivabili in $\mathbf{R}$ e risulta:

$$\begin{array}{ll} D \sin(x) = \cos(x) & D \cos(x) = -\sin(x) \\ D^2 \sin(x) = D \cos(x) = -\sin(x) & D^2 \cos(x) = D(-\sin)(x) = -\cos(x) \\ D^3 \sin(x) = D(-\sin)(x) = -\cos(x) & D^3 \cos(x) = D(-\cos)(x) = \sin(x) \\ D^4 \sin(x) = D(-\cos)(x) = \sin(x) & D^4 \cos(x) = D(\sin)(x) = \cos(x) \\ D^5 \sin(x) = D(\sin)(x) = \cos(x) & D^5 \cos(x) = D(\cos)(x) = -\sin(x) \end{array}$$

e così via.

ALCUNE APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Sia I un intervallo di $\mathbf{R}$ e siano $a = \inf(I) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ e $b = \sup(I) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$; i punti di I diversi dagli estremi a e b , (e quindi appartenenti all'intervallo aperto $]a, b[$), saranno detti **punti interni** ad I ; l'intervallo aperto $]a, b[$ sarà detto l' **interno** di I .

In tutto il capitolo considereremo funzioni reali definite in I e supporremo che tali funzioni sono dotate di derivate negli estremi a e/o b , (se $a \in I$ e/o $b \in I$), e sono dotate di derivate destre e sinistre in ogni punto x_0 interno ad I . Graficamente questo vuol dire che il grafico di f è dotato di retta tangente (eventualmente verticale) negli estremi a e/o b che appartengono ad I , ed è dotato di retta tangente, o perlomeno di semirette tangenti a destra e sinistra, in ogni punto diverso dagli estremi.

Vedremo come attraverso il Calcolo Differenziale, cioè l'analisi delle derivate di f , potremo ottenere informazioni importanti sul comportamento sia locale che globale di f .

1. - Massimi e minimi relativi: condizioni necessarie

Iniziamo introducendo la seguente

Definizione 1.1. *Un punto x_0 di I dicesi punto di minimo (rispett. massimo) relativo o locale per f se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ risulta $f(x_0) \leq f(x)$, (rispett. $f(x_0) \geq f(x)$).*

Si dice invece che x_0 è punto di minimo (rispett. massimo) assoluto o globale per f se risulta $f(x_0) \leq f(x)$, (rispett. $f(x_0) \geq f(x)$), per ogni $x \in I$.

■

Osservazione 1.2 - Ovviamente x_0 è punto di minimo relativo per f se e solo se x_0 è punto di massimo relativo per $-f$.

E' altresì evidente che se x_0 è un punto di minimo (massimo) assoluto per f , allora x_0 è punto di minimo (rispett. massimo) relativo per f .

■

Si ha allora il seguente fondamentale

Teorema 1.3 - (Teorema di FERMAT) -. *Se x_0 è un punto di minimo o massimo relativo per la funzione $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, se x_0 è interno all'intervallo I ed f è derivabile in x_0 , allora si ha $f'(x_0) = 0$.*

Dim. Consideriamo il caso in cui x_0 è un punto di minimo relativo per f ; se x_0 è un punto di massimo relativo per f , la dimostrazione è analoga.

Ne segue che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ risulti

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{e quindi} \quad f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

Di conseguenza si ha che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{per ogni } x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[, \\ \geq 0 & \text{per ogni } x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[; \end{cases}$$

ne segue, per il teorema di prolungamento delle disuguaglianze, che:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{ed} \quad f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

D'altra parte, essendo f derivabile in x_0 , si ha che $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$, e dunque risulta $f'(x_0) \leq 0$ ed $f'(x_0) \geq 0$; di qui, per la proprietà antisimmetrica della relazione d'ordine $\leq$ di $\mathbf{R}$, segue che $f'(x_0) = 0$, come volevasi.

■

Osservazione 1.4 - Se x_0 è un punto interno ad I ed è un punto angoloso o cuspidale per f , allora il ragionamento fatto per dimostrare il teorema di Fermat ci consente di affermare che se $x_0 \in I$ è un punto di minimo (rispett. massimo) relativo per f , allora risulta

$$f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0), \quad (\text{rispett. } f'_-(x_0) \geq 0 \geq f'_+(x_0)).$$

Si noti che, nella dimostrazione del precedente teorema, l'ipotesi che x_0 è un punto interno ad I era indispensabile per poter calcolare il limite della funzione rapporto incrementale sia per $x \rightarrow x_0^-$ che per $x \rightarrow x_0^+$, cioè la derivata destra e sinistra di f in x_0 .

Se x_0 non è un punto interno ad I , ma coincide con l'estremo a (rispett. b), allora esiste solo la derivata destra (rispett. sinistra) di f in x_0 , e tale derivata destra (rispett. sinistra) coincide con la derivata di f in x_0 . Di conseguenza, il ragionamento fatto sopra ci permette di affermare che se $x_0 \in I$ è un punto di minimo (rispett. massimo) relativo per f e coincide con uno degli estremi di I , allora risulta:

$$f'(x_0) = \begin{cases} f'(a) \geq 0 & \text{se } x_0 = a = \inf I, \\ f'(b) \leq 0 & \text{se } x_0 = b = \sup I, \end{cases} \quad \left(\text{rispett. } f'(x_0) = \begin{cases} f'(a) \leq 0 & \text{se } x_0 = a = \inf I \\ f'(b) \geq 0 & \text{se } x_0 = b = \sup I \end{cases} \right).$$

■

Osservazione 1.5 - Una dimostrazione alternativa del teorema di Fermat può essere la seguente.

Se per assurdo fosse $f'(x_0) > 0$, allora, per la Prop. 3.2 del capitolo precedente, f sarebbe strettamente crescente in x_0 . Di qui e dal fatto che x_0 è interno ad I seguirebbe che esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in]x_0 - \delta, x_0[, \quad \text{ed} \quad f(x) > f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in]x_0, x_0 + \delta[,$$

e quindi che x_0 non può essere né punto di minimo né punto di massimo relativo per f .

Analogamente non può essere $f'(x_0) < 0$, e dunque deve essere $f'(x_0) = 0$.

■

2. I teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange

Teorema 2.1 - (Teorema di Rolle).

Sia f una funzione reale definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$; se f è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e se $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto c interno ad $[a, b]$ tale che $f'(c) = 0$.

Dim. Per il teorema di Weierstrass, f è dotata di minimo e massimo valore; perciò esistono un punto di minimo assoluto $\underline{x}$, ed un punto di massimo assoluto $\bar{x}$, cioè esistono $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ tali che

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Ora se $\underline{x}$ é interno ad $[a, b]$, allora per il teorema di Fermat sar  $f'(\underline{x}) = 0$, e quindi il punto di minimo $\underline{x}$ soddisfa la tesi.

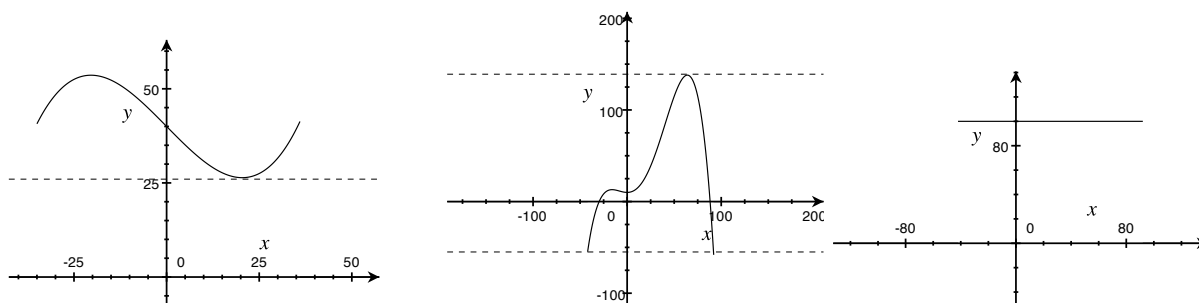
Se $\underline{x}$ coincide con a o b , ma $\bar{x}$ é interno ad $[a, b]$, allora per il teorema di Fermat sar  $f'(\bar{x}) = 0$, e quindi il punto di massimo $\bar{x}$ soddisfa la tesi.

Infine, nel caso in cui nessuno dei due punti, $\underline{x}$ ed $\bar{x}$, é interno ad $[a, b]$, e quindi entrambi coincidono con gli estremi a e b , allora, essendo $f(a) = f(b)$, sar  $f(\underline{x}) = f(\bar{x})$; di conseguenza per ogni $x \in [a, b]$ sar  $f(x) \leq f(x) \leq f(\bar{x}) = f(\underline{x})$, e quindi $f(x) = f(\underline{x}) = f(\bar{x})$, in virt  della propriet  antisimmetrica di $\leq$. Pertanto f é costante e quindi risulta $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, cio  che prova che ogni punto di $]a, b[$ soddisfa la tesi.

■

Osservazione 2.2 - Il significato geometrico del teorema di Rolle é evidente. Se f é una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e se gli estremi del grafico di f hanno la stessa ordinata, allora almeno in un punto interno ad $[a, b]$ la tangente al grafico di f é parallela all'asse x .

Le figure che seguono illustrano la dimostrazione svolta sopra: la prima si riferisce al caso in cui il punto di minimo é interno all'intervallo $[a, b]$, la seconda al caso in cui i punti di minimo sono gli estremi dell'intervallo $[a, b]$, ma il punto di massimo é interno allo stesso intervallo, l'ultima al caso in cui la funzione é costante.



Si noti che per  non é richiesto che f sia derivabile anche negli estremi a, b ; geometricamente questo vuol dire che il teorema di Rolle continua a sussistere anche se le tangenti al grafico di f negli estremi $(a, f(a))$ o $(b, f(b))$ sono parallele all'asse y .

■

Teorema 2.3 - (Teorema di Cauchy).

Siano f e g due funzioni reali definite e continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabili nell'intervallo aperto $]a, b[$. Allora esiste un punto c interno ad $[a, b]$ tale che

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Dim. Infatti la funzione F definita ponendo

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

  continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ ed   tale che $F(a) = F(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$.

Di conseguenza, per il teorema di Rolle, esiste c interno ad $[a, b]$ tale che $F'(c) = 0$, cio  tale che

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0,$$

il che prova la tesi.

■

Osservazione 2.4 - Nelle ipotesi del teorema di Cauchy, se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$ allora per il teorema di Rolle sarà $g(a) \neq g(b)$; di conseguenza la tesi del teorema assume la forma piú espressiva (e piú facile da ricordare):

$$\text{esiste } c \in]a, b[\text{ tale che } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

cioé “Il rapporto degli incrementi coincide con il rapporto delle derivate in un opportuno punto intermedio”.

■

Teorema 2.5 - (Teorema di Lagrange).

Sia f una funzione reale definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$. Allora esiste un punto c interno ad $[a, b]$ tale che

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

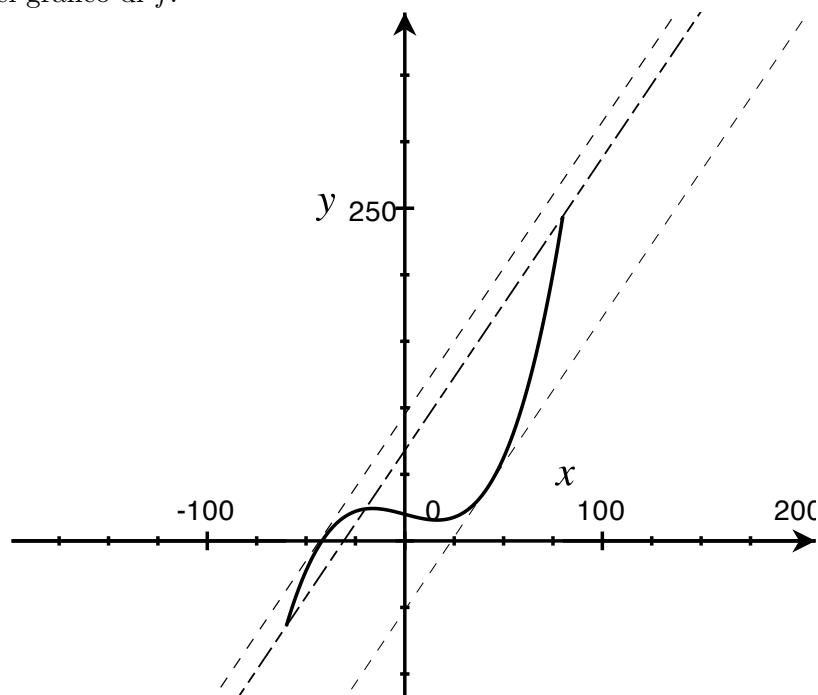
Dim. Basta porre $g(x) = x$ per ogni $x \in [a, b]$ e applicare il teorema di Cauchy alle funzioni f e g .

■

Osservazione 2.6 - Anche il teorema di Lagrange ha un evidente significato geometrico.

In effetti $(f(b) - f(a))/(b - a)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta congiungente i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, mentre $f'(c)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$.

Pertanto se f é una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ sia parallela alla retta congiungente gli estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ del grafico di f .



I teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange hanno innumerevoli importantissime conseguenze: di esse discuteremo a lungo nei prossimi paragrafi.

■

3. - Funzioni monotone in un intervallo: condizioni sufficienti.

Dal teorema di Lagrange discende facilmente la seguente proposizione che fornisce delle condizioni sufficienti perché f sia crescente, decrescente, strettamente crescente ecc. in I .

Proposizione 3.1. *Se f è continua nell'intervallo I ed è derivabile in ogni punto interno ad I , allora si ha quanto segue:*

- a) se $f'(x) = 0$ per ogni x interno ad I , allora f è costante in I ;
- b) se $f'(x) \geq 0$ per ogni x interno ad I , allora f è crescente in I ;
- c) se $f'(x) \leq 0$ per ogni x interno ad I , allora f è decrescente in I ;
- d) se $f'(x) > 0$ per ogni x interno ad I , allora f è strettamente crescente in I ;
- e) se $f'(x) < 0$ per ogni x interno ad I , allora f è strettamente decrescente in I .

Dim. Fissati $x, y \in I$, $x < y$, applicando il teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x, y]$, si ha che esiste $z \in]x, y[$, (e quindi interno ad I), tale che $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$.

Ne segue che $f(y) - f(x)$ è:

$$= 0 \text{ nel caso a), } \geq 0 \text{ nel caso b), } \leq 0 \text{ nel caso c), } > 0 \text{ nel caso d), } < 0 \text{ nel caso e).}$$

Questo prova chiaramente la tesi.

■

Osservazione 3.2 - Si vede immediatamente che in a), b) e c) valgono le implicazioni inverse, cioè che risulta:

- a') f costante in $I \implies f'(x) = 0$ per ogni x interno ad I ,
- b') f crescente in $I \implies f'(x) \geq 0$ per ogni x interno ad I ,
- c') f decrescente in $I \implies f'(x) \leq 0$ per ogni x interno ad I .

Infatti, la a') è ovvia; la b') è altrettanto ovvia, poiché se esistesse x_0 interno ad I tale che $f'(x_0) < 0$, allora f sarebbe strettamente decrescente in x_0 , contro l'ipotesi che f è crescente in I . In maniera analoga si prova la c').

■

Invece, l'implicazione inversa non sussiste in d) ed e); ad esempio $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbf{R}$, ma risulta $f'(0) = 0$. Si dimostra infatti che

Proposizione 3.3 -. *Se f è continua nell'intervallo I e derivabile nel suo interno, allora f è strettamente crescente (rispett. strettamente decrescente) in I , se e solo risulta:*

- (1) $f'(x) \geq 0$, (rispett. $f'(x) \leq 0$), per ogni x interno ad I ,
- (2) non esistono $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ tali che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]x_1, x_2[$.

Dim. Supponiamo dapprima che f sia strettamente crescente (decrescente) in I . Allora f è crescente (decrescente) in I , e quindi risulta $f'(x) \geq 0$ (rispett. $f'(x) \leq 0$) per ogni x interno ad I . D'altra parte se esistessero $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ tali che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]x_1, x_2[$, allora f sarebbe costante nell'intervallo $[x_1, x_2]$, contro l'ipotesi che f è strettamente crescente (rispett. strettamente decrescente) in tutto I .

Viceversa supponiamo per assurdo che valgono la 1) e la 2) e che f non è strettamente crescente (rispett. strettamente decrescente) in I .

Allora esistono $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) \geq f(x_2)$, (rispett. $f(x_1) \leq f(x_2)$). D'altra parte, per la 1) e la b), (rispett. c)), della Prop. 3.1, si ha che f è crescente, (rispett. decrescente), in I , e quindi per ogni $x \in [x_1, x_2]$ si ha:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \leq f(x_1), \quad (\text{rispett. } f(x_1) \geq f(x) \geq f(x_2) \geq f(x_1)).$$

Ne segue, per la proprietà antisimmetrica di $\leq$, che per ogni $x \in [x_1, x_2]$ risulta $f(x) = f(x_1) = f(x_2)$, cioè che f è costante nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Questo comporta che risulti $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$, contraddicendo la 2).

■

Esercizio - Dal segno della derivata delle funzioni elementari

$$y = a^x, \quad y = \log_a(x), \quad y = x^\alpha, \quad y = \arcsen x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arccotg} x,$$

dedurre quali di tali funzioni sono strettamente crescenti o strettamente decrescenti nel loro insieme di definizione.

Analogamente, dal segno della derivata delle funzioni $y = \sen x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x$, dedurre in quali intervalli esse sono strettamente crescenti o strettamente decrescenti.

■

Osservazione 3.4 - Si noti che l'ipotesi che f sia definita in un intervallo è essenziale per le considerazioni svolte in questo paragrafo.

Ad esempio, posto $f(x) = 1/x$ per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, si ha $f'(x) = -1/x^2 < 0$ per ogni $x \neq 0$, e quindi sono strettamente decrescenti le restrizioni di f agli intervalli $] -\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$, ma non è vero che f è strettamente decrescente in tutto il suo insieme di definizione, poiché $x_1 < 0 < x_2 \implies f(x_1) = 1/x_1 < 0 < 1/x_2 = f(x_2)$.

Analogamente, detti X ed Y gli insiemi di definizione delle funzioni $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ e $g(x) = \operatorname{cotg}(x)$, si ha:

$$D \operatorname{tg}(x) = 1/\cos^2(x) > 0, \quad \forall x \in X, \quad D \operatorname{cotg}(x) = -1/\sin^2(x) < 0, \quad \forall x \in Y;$$

ne segue che f è strettamente crescente in ogni intervallo contenuto in X e g è strettamente decrescente in ogni intervallo contenuto in Y ; però f non è strettamente crescente in tutto X e g non è strettamente decrescente in tutto Y , poiché f e g sono funzioni periodiche di periodo π .

■

4. - Massimi e minimi relativi: condizioni sufficienti

Dalla Prop. 3.1, (e quindi, in ultima analisi, dal teorema di Lagrange), si deducono facilmente anche le condizioni sufficienti che un punto x_0 deve soddisfare perché sia un punto di minimo o massimo relativo per una funzione f . Si ha infatti la seguente

Proposizione 4.1. *Se f è una funzione reale definita nell'intervallo I ed $x_0 \in I$, allora x_0 è punto di minimo relativo per f se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

- (1) $x_0 = a = \min(I)$ ed $f'(a) > 0$,
- (2) $x_0 = b = \max(I)$ ed $f'(b) < 0$
- (3) $x_0 = a = \min(I)$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, a + \delta[$,
- (4) $x_0 = b = \max(I)$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in]b - \delta, b[$,
- (5) x_0 è interno ad I ed esiste $\delta > 0$ tale che

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in]x_0 - \delta, x_0[, \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in]x_0, x_0 + \delta[,$$

Invece x_0 è punto di massimo relativo per f se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:

- (1') $x_0 = a = \min(I)$ ed $f'(a) < 0$,
- (2') $x_0 = b = \max(I)$ ed $f'(b) > 0$
- (3') $x_0 = a = \min(I)$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in]a, a + \delta[$,
- (4') $x_0 = b = \max(I)$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]b - \delta, b[$,
- (5') x_0 è interno ad I ed esiste $\delta > 0$ tale che

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in]x_0 - \delta, x_0[, \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in]x_0, x_0 + \delta[,$$

Dim. Si vuole dimostrare che sotto una delle ipotesi (1-5) si ha che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Infatti, nelle ipotesi (1), si ha che f è strettamente crescente in a e quindi esiste $\delta > 0$ tale che risulti $f(x) > f(a) = f(x_0)$ per ogni $x \in]a, a + \delta[= I \cap]a - \delta, a + \delta[- \{a\}$.

Invece, nell'ipotesi (2), si ha che f è strettamente decrescente in b e quindi esiste $\delta > 0$ tale che risulti $f(x) > f(b) = f(x_0)$ per ogni $x \in]b - \delta, b[= I \cap]b - \delta, b + \delta[- \{b\}$.

Nell'ipotesi (3), si ha che f è crescente nell'intervallo $[a, a + \delta[$; ne segue che $f(x_0) = f(a) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, a + \delta[= I \cap]a - \delta, a + \delta[$.

Nell'ipotesi (4), si ha che f è decrescente nell'intervallo $]b - \delta, b]$; ne segue che $f(x_0) = f(b) \leq f(x)$ per ogni $x \in]b - \delta, b] = I \cap]b - \delta, b + \delta[$.

Infine, nell'ipotesi (5), si ha che f è decrescente nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0]$ ed è crescente nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta[$. Ne segue che risulta $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0]$ e per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta[$.

Il ragionamento è analogo per dimostrare che x_0 è punto di massimo relativo per f se vale una delle condizioni (1'-5').

■

■

Per trovare i punti di minimo o massimo relativo di f è quindi sufficiente risolvere le disequazioni $f'(x) \leq 0$ ed $f'(x) \geq 0$.

Osserviamo però che è possibile riconoscere se un punto stazionario è punto di minimo o massimo relativo per f senza risolvere le disequazioni $f'(x) \leq 0$ ed $f'(x) \geq 0$, a condizione che si disponga di una informazione sul segno della derivata seconda di f in x_0 , e quindi che si disponga di ipotesi di maggiore regolarità per f . Sussiste infatti la seguente

Prop. 4.2 - (Condizione sufficiente del secondo ordine). - Se f è derivabile due volte in x_0 , allora:

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0, & \implies x_0 \text{ è punto di minimo relativo per } f. \\ f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0, & \implies x_0 \text{ è punto di massimo relativo per } f. \end{aligned}$$

Dim. Infatti, se $f''(x_0) = Df'(x_0) > 0$, allora la funzione f' è strettamente crescente in x_0 , e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$f'(x) < f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\quad \text{ed} \quad f'(x) > f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[.$$

Se x_0 è interno ad I , ne segue che è soddisfatta la condizione (5) della precedente Prop. 4.1; se invece $x_0 = a = \min(I)$, (rispett. $x_0 = b = \max(I)$), allora è soddisfatta la condizione (3) (rispett. (4)) della stessa Prop. 4.1. In ogni caso x_0 è punto di minimo relativo per f .

Il ragionamento è analogo se risulta $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) < 0$.

■

Osservazione 4.3 - Se risulta $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, allora non si può concludere nulla, circa il fatto che x_0 sia o non sia un punto di minimo o massimo relativo per f .

Ad esempio, posto $f(x) = x^n$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R},$$

e quindi $f'(0) = f''(0) = 0$, ma sappiamo che 0 è punto di minimo (assoluto e quindi relativo) per f se n è pari, mentre f è strettamente crescente in $\mathbf{R}$ se n è dispari.

In generale, se risulta $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, allora per poter decidere se f è strettamente crescente o strettamente decrescente in x_0 o se ha in x_0 un punto di minimo o massimo relativo, occorrono ulteriori informazioni sulle derivate in x_0 di ordine superiore al secondo. ■

5. - Funzioni convesse o concave in un intervallo. Punti di flesso.

Definizione 5.1. Si dice che $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ é convessa nell'intervallo I se per ogni $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ e per ogni $x \in]x_1, x_2[$ risulta:

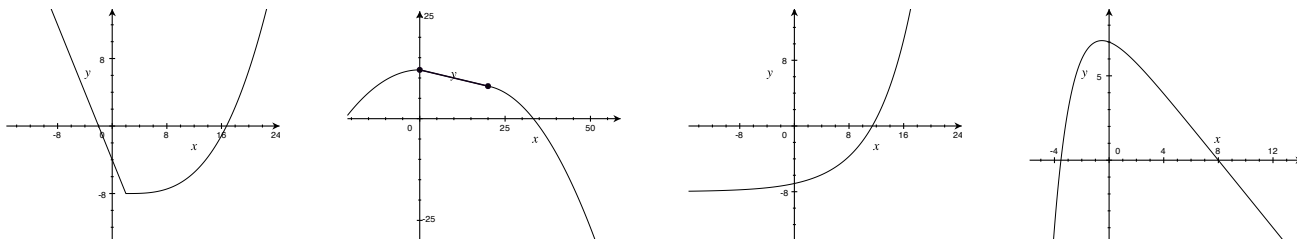
$$(1) \quad f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Si dice che f é strettamente convessa in I , se nella (1) sussiste la disuguaglianza stretta $<$ invece di $\leq$.

Si dice invece che f é concava, (rispett. strettamente concava), se nella (1) sussiste la disuguaglianza $\geq$, (rispett. $>$), invece di $\leq$.

■

Osservazione 5.2. - Il significato geometrico della precedente definizione é evidente: f é (strettamente) convessa in I , se e solo se la corda congiungente due punti qualunque $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$ del grafico di f giace (strettamente) al di sopra del grafico di f . Viceversa f é concava (strettamente) in I , se e solo se la corda congiungente due punti qualunque del grafico di f giace (strettamente) al di sotto del grafico di f . Le figure seguenti mostrano appunto rispettivamente un esempio di grafico di funzione convessa, concava, strettamente convessa e strettamente concava.



Per usare una immagine un po' "pittoresca" potremmo dire che una funzione é convessa quando il suo grafico "trattiene l'acqua", mentre é concava quando la "lascia scorrere". Per questo motivo talvolta si dice anche che f volge la concavità verso l'alto o verso il basso anziché dire che f é convessa o concava.

E' facile constatare che f é convessa se e solo se l'epigrafo di f , cioè l'insieme

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \in I, y \geq f(x)\},$$

é un insieme convesso di $\mathbf{R}^2$, nel senso che il segmento congiungente due punti qualunque di $\text{epi}(f)$ é contenuto in $\text{epi}(f)$. Questo spiega il nome dato alle funzioni convesse.

■

Osservazione 5.3. - E' evidente che se f é convessa, concava, strettamente convessa o strettamente concava in I , allora f é convessa, concava, strettamente convessa o strettamente concava in ogni intervallo $J \subset I$.

Notiamo infine che evidentemente f é convessa (strettamente) se e solo se $-f$ é concava (strettamente) e viceversa f é concava (strettamente) se e solo se $-f$ é convessa (strettamente). Di conseguenza basta studiare le funzioni convesse.

■

La Proposizione seguente fornisce appunto delle condizioni necessarie e sufficienti che f deve soddisfare perché sia convessa in I .

Proposizione 5.4 - (Caratterizzazione delle funzioni convesse o concave).

Se f è una funzione continua nell'intervallo I e derivabile al suo interno, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- a) f è convessa in I ;
- b) f' è crescente nell'interno di I ;
- c) per ogni x_0 interno ad I e per ogni $x \in I - \{x_0\}$ si ha: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

La tesi sussiste ancora sostituendo:

- (1) convessa con concava, crescente con decrescente, $\geq$ con $\leq$,
- (2) convessa con strettamente convessa, crescente con strettamente crescente, $\geq$ con $>$,
- (3) convessa con strettamente concava, crescente con strettamente decrescente, $\geq$ con $<$.

Dim. Dimosteremo solo l'equivalenza di a), b) e c); le altre varianti descritte nell'enunciato si dimostrano con leggere modifiche.

a) $\implies$ b). Siano x_1, x_2, x interni ad I , con $x_1 < x < x_2$. Allora si ha

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2),$$

donde segue, (essendo $x - x_1 > 0$ ed $x - x_2 < 0$), che

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_1^+$ e per $x \rightarrow x_2^-$, per il teorema di prolungamento delle disequaglianze, se ne deduce che:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

come volevasi.

Dim. b) $\implies$ c). Fissiamo x_0 interno ad I e poniamo $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x \in I$; per provare la tesi, basterà dimostrare che risulta $g(x) \geq 0 = g(x_0)$, per ogni $x \in I$.

Ebbene, evidentemente g è continua in I e derivabile nell'interno di I e risulta $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ per ogni x interno ad I . Per b) si ha quindi che

$$g'(x) \geq 0, \quad \forall x \in]x_0, b[\quad \text{e} \quad g'(x) \leq 0, \quad \forall x \in I,]a, x_0[.$$

Pertanto g è decrescente in $I \cap [a, x_0]$ ed è crescente in $I \cap [x_0, b]$, donde segue che risulta $g(x) \geq g(x_0)$ per ogni $x \in I$, come volevasi.

Dim. c) $\implies$ a). Siano $x_1, x_2, x \in I$, $x_1 < x < x_2$ e proviamo che risulta

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Infatti, per c), si ha

$$f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x_1 - x), \quad f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x);$$

moltiplicando la prima disequaglianza per $(x_2 - x)/(x_2 - x_1) > 0$, la seconda per $(x - x_1)/(x_2 - x_1) > 0$, e sommando si ha

$$\begin{aligned} f(x_1) \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &\geq \\ &\geq f(x) \cdot \left[\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right] + f'(x) \cdot \left[(x_1 - x) \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + (x_2 - x) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right] = \\ &= f(x) \cdot 1 + f'(x) \cdot 0 = f(x) \end{aligned}$$

come volevasi.

■

Corollario 5.5 -. Se f è continua nell'intervallo I e derivabile due volte al suo interno, allora :

- (1) $f''(x) \geq 0$, per ogni x interno ad $I \implies f$ è convessa in I ,
- (2) $f''(x) \leq 0$, per ogni x interno ad $I \implies f$ è concava in I ,
- (3) $f''(x) > 0$, per ogni x interno ad $I \implies f$ è strettamente convessa in I ,
- (4) $f''(x) < 0$, per ogni x interno ad $I \implies f$ è strettamente concava in I .

Dim. La tesi discende immediatamente dalla precedente Prop. 5.4, poiché l'ipotesi di (1), (2), (3) e (4) implica che f' è rispettivamente crescente, decrescente, strettamente crescente e strettamente decrescente.

■

Esercizio - Dal segno della derivata seconda delle funzioni elementari

$$y = x^n, \quad y = \sqrt[n]{x}, \quad y = x^\alpha, \quad y = a^x, \quad y = \log_a(x), \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \\ y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x, \quad y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arccotg} x,$$

dedurre quali di esse sono strettamente convesse o strettamente concave nel loro insieme di definizione, o dedurre in quali intervalli esse sono strettamente convesse o strettamente concave.

■

Osservazione 5.6 - La c) della Prop. 5.4 descrive una evidente ed interessantissima proprietà geometrica delle funzioni (strettamente) convesse o (strettamente) concave. Infatti, essa afferma che se f è (strettamente) convessa, allora, per ogni punto x_0 interno ad I , si ha che la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ giace (strettamente) sotto il grafico di f , e viceversa se f è (strettamente) concava, allora, per ogni punto x_0 interno ad I , si ha che la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ giace (strettamente) sopra al grafico di f .

■

Osservazione 5.7 - Se f è derivabile in tutto l'intervallo I , (cioè se f è derivabile anche negli eventuali estremi a e/o b), allora si vede facilmente che nella precedente Prop. 5.4 si può sostituire l'interno di I con I . In particolare, se f è derivabile in $[a, b[$ (rispett. in $]a, b]$), ed è ivi strettamente convessa, allora risulta anche $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$, (rispett. $f(x) > f(b) + f'(b)(x - b)$), per ogni $x \in]a, b[$, e naturalmente la disuguaglianza $>$ deve essere sostituita rispettivamente da $\geq$, $\leq$, $<$, se f è convessa, concava o strettamente concava.

Pertanto se f è derivabile in $[a, b[$ (rispett. in $]a, b]$), ed è ivi (strettamente) convessa, allora anche la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$, (rispett. $(b, f(b))$), giace (strettamente) sotto il grafico di f , mentre tale retta tangente giace (strettamente) sopra al grafico di f , se f è (strettamente) concava.

Se ora x_0 è un punto interno ad I , e si ha che f è strettamente convessa nell'intervallo $]a, x_0]$ e strettamente concava nell'intervallo $[x_0, b[$, allora la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ giace strettamente sotto il grafico della restrizione di f all'intervallo $]a, x_0]$ e strettamente sopra il grafico della restrizione di f all'intervallo $[x_0, b[$. Ne segue che nel punto $(x_0, f(x_0))$ il grafico di f si "flette", in modo da passare da sotto a sopra la retta tangente.

Naturalmente lo stesso accade se f è strettamente concava nell'intervallo $]a, x_0]$ e strettamente convessa nell'intervallo $[x_0, b[$.

■

Queste considerazioni giustificano la seguente Definizione, in cui f non è necessariamente derivabile in x_0 .

Definizione 5.8 -. Se x_0 è un punto interno ad I , si dice che x_0 è un punto di flesso per f se e solo se esiste $\delta > 0$ tale che f sia strettamente convessa nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0]$ e strettamente concava nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta[$, o viceversa sia strettamente concava nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0]$ e strettamente convessa nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta[$.

■

Osservazione 5.9 - Dal Corollario 5.5 si deduce allora immediatamente che x_0 è punto di flesso per f , se f è continua in I , è derivabile due volte in $I - \{x_0\}$, ed esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{per ogni } x \in]x_0 - \delta, x_0[\\ f''(x) > 0 & \text{per ogni } x \in]x_0, x_0 + \delta[, \end{cases} \quad \text{o viceversa} \quad \begin{cases} f''(x) > 0 & \text{per ogni } x \in]x_0 - \delta, x_0[\\ f''(x) < 0 & \text{per ogni } x \in]x_0, x_0 + \delta[, \end{cases}$$

■

Sussiste inoltre la seguente proposizione che fornisce una condizione necessaria ed una ulteriore condizione sufficiente che deve essere soddisfatta da f perché x_0 sia punto di flesso.

Proposizione 5.10 -. Se f è derivabile almeno due volte in x_0 , allora:

- 1) x_0 punto di flesso per $f \implies f''(x_0) = 0$,
- 2) $f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) \neq 0 \implies x_0$ è punto di flesso per f .

Dim. di 1). Infatti, se x_0 è un punto di flesso per f , allora esiste $\delta > 0$ tale che f sia strettamente convessa nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0]$ e strettamente concava nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta[$, o viceversa sia strettamente concava nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0]$ e strettamente convessa nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta[$; ne segue che f' è strettamente crescente nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0]$ e strettamente decrescente nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta[$, o viceversa è strettamente decrescente nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0]$ e strettamente crescente nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta[$. Di conseguenza, x_0 è punto di massimo o minimo relativo per f' e quindi, per il teorema di Fermat, si ha $(f')'(x_0) = 0$, ovvero $f''(x_0) = 0$, come volevasi.

Dim di 2). Sia $f'''(x_0) > 0$, cioè $D(f'')(x_0) > 0$; ne segue che la funzione f'' è strettamente crescente in x_0 , e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$f''(x) < f''(x_0) \quad \forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\quad \text{ed} \quad f''(x) > f''(x_0) \quad \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[.$$

Essendo $f''(x_0) = 0$, se ne deduce che f è strettamente concava nell'intervallo $I \cap]x_0 - \delta, x_0]$ ed è strettamente convessa nell'intervallo $I \cap [x_0, x_0 + \delta[$, e quindi che x_0 è punto di flesso per f , come volevasi.

Il ragionamento è analogo se risulta $f'''(x_0) = 0$ ed $f'''(x_0) < 0$.

■

6. - Teorema di De L'Hôpital.

Dal Teorema di Cauchy si deduce il seguente teorema, (di cui si omette la dimostrazione per brevità), che consente di calcolare il limite di forme indeterminate del tipo $0/0$ e $\pm\infty/\pm\infty$.

Teorema 6.1 - (Teorema di De L'Hôpital).

Siano $x_0 \in \hat{\mathbf{R}}$ un punto di accumulazione dell'intervallo I , e siano $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ tali che:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,
- b) f e g sono derivabili in $I - \{x_0\}$,
- c) risulta $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I - \{x_0\}$,
- d) esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \hat{\mathbf{R}}$.

Allora esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La tesi sussiste ancora se si sostituisce la condizione a) con la condizione:

- a') $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$.

■

Esempi - Risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(x - \operatorname{sen} x)}{D(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(x - \operatorname{tg} x)}{D(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{3x^2} = -\frac{1}{3}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(e^x - 1 - x)}{D(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D \log x}{Dx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 - 3x + 5)}{\log(2x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D \log(x^2 - 3x + 5)}{D \log(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 5} \cdot \frac{2x - 1}{2} = \dots = 2.\end{aligned}$$

■

Corollario 6.2 Se $x_0 \in I$ ed f è continua nell'intervallo I e derivabile in $I - \{x_0\}$, allora risulta:

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - 0}{1 - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \\ f'(x_0^\pm) &= \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f'(x) - 0}{1 - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x)\end{aligned}$$

(purchè tali limiti esistano).

■

Ad esempio, posto $f(x) = \arcsen x$ per ogni $x \in [-1, 1]$, si ha che

$$f'(\pm 1) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty.$$

■

Osservazione 6.3 - Il teorema di De L'Hôpital può essere utilizzato anche per calcolare limiti di forme indeterminate del tipo

$$0 \cdot \pm\infty, \quad \text{e} \quad +\infty - \infty.$$

Basta osservare che risulta

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}, \quad f(x) - g(x) = f(x) \cdot \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = g(x) \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right).$$

Ad esempio si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \log x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \log x}{D(1/x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\pi/2) - \operatorname{arctg} x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1.\end{aligned}$$

■

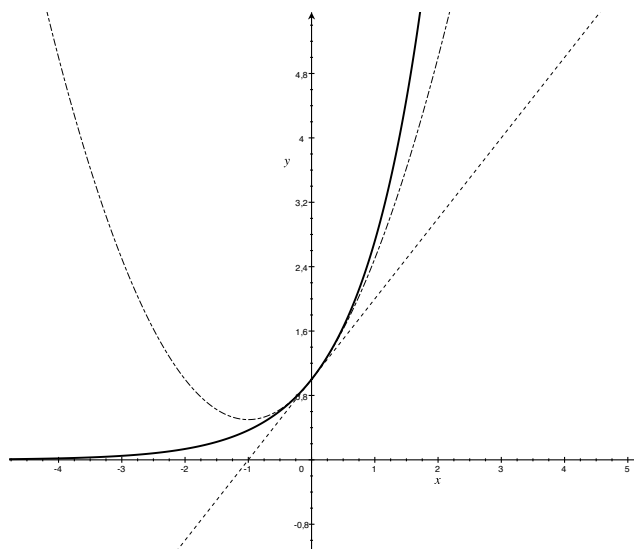
7 . - Polinomi di Taylor

Abbiamo visto che se f é una funzione derivabile in un punto x_0 , allora il grafico di f vicino al punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ può essere approssimato dalla retta di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, che abbiamo chiamato retta tangente al grafico di f in P_0 . Questo vuol dire che, vicino ad x_0 , il valore che f assume in x può essere approssimato dal valore assunto in x dal polinomio di primo grado

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Naturalmente, man mano che ci si allontana da x_0 , (e quindi che ci si allontana da P_0 sul grafico di f), l'errore dell'approssimazione $f(x) - p_1(x)$, (cioé la distanza del punto del grafico di ascissa x dal punto della retta tangente di ascissa x), aumenta sempre più.

E' allora naturale pensare che, (come mostra la figura che segue), una parabola potrebbe aderire al grafico di f meglio della retta tangente, cioè che si otterrebbe una migliore approssimazione di $f(x)$ con un polinomio di secondo grado piuttosto che con un polinomio di primo grado.



Ci chiediamo dunque qual'é il polinomio di secondo grado $p_2(x)$ che meglio approssima f vicino ad x_0 . E' facile allora rendersi conto del fatto che il miglior polinomio approssimante é quello per cui si avrebbe

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - p(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Per individuare tale polinomio cominciamo con l'osservare che per un qualunque polinomio di secondo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$ risulta

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a[(x - x_0) + x_0]^2 + b[(x - x_0) + x_0] + c = a(x - x_0)^2 + (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c,$$

e quindi può essere scritto nella forma $p(x) = a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0$.

Cerchiamo dunque i coefficienti a_0, a_1, a_2 tali che il polinomio $p(x) = a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0$ soddisfi le condizioni (1).

Ebbene, dall'essere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - a_2(x - x_0)^2 = f(x_0) - a_0,$$

si deduce che la prima delle (1) é soddisfatta se e solo se $a_0 = f(x_0)$.

D'altra parte, se $a_0 = f(x_0)$, dall'essere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - a_2(x - x_0)^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a_1 - a_2(x - x_0) = f'(x_0) - a_1,$$

si deduce che la seconda di (2) é soddisfatta se e solo se $a_1 = f'(x_0)$.

Infine, se $a_0 = f(x_0)$ ed $a_1 = f'(x_0)$, utilizzando il teorema di De L'Hôpital, si ha che che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - a_2(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - a_2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} - a_2 = \frac{f''(x_0)}{2} - a_2, \end{aligned}$$

ovviamente nell'ipotesi che f sia derivabile due volte in x_0 .

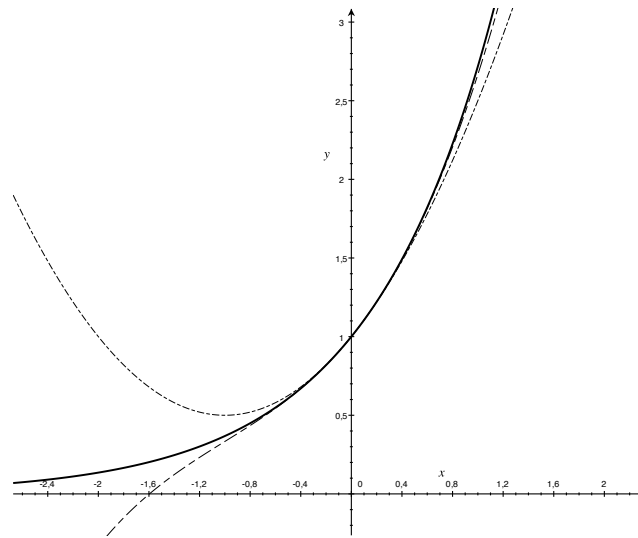
Pertanto le condizioni (1) sono soddisfatte se e solo se risulta $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$ ed $a_2 = f''(x_0)/2$.

Abbiamo così scoperto che, se f é derivabile due volte in x_0 , allora il polinomio di secondo grado che meglio approssima f in un intorno di x_0 , (nel senso che é l'unico polinomio di secondo grado soddisfacente le condizioni (1)), é il polinomio

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

■

A questo punto il ragionamento può essere ripetuto, nel senso che (come mostra la figura seguente) possiamo pensare che un polinomio di terzo grado ci fornirebbe una approssimazione di $f(x)$ migliore di quella ottenuta con un polinomio di secondo grado.



Ovviamente, dovremo cercare il polinomio di terzo grado che meglio approssima f ; poiché tale polinomio avrebbe la forma $p(x) = a_3(x - x_0)^3 + a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0$, dovremo cercare i coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 in modo che siano soddisfatte le condizioni (1) e

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^3} = 0.$$

Ragionando esattamente come prima si vede che le condizioni (1) sono soddisfatte se e solo se risulta $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, $a_2 = f''(x_0)/2$. Se queste condizioni sono soddisfatte ed f é derivabile tre volte in x_0 , allora, utilizzando il teorema di De L'Hôpital, si ricava che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - a_2(x - x_0)^2 - a_3(x - x_0)^3}{(x - x_0)^3} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - (f''(x_0)/2)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^3} - a_3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{3(x - x_0)^2} - a_3 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{6(x - x_0)} - a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6} - a_3. \end{aligned}$$

Pertanto, se f é derivabile tre volte in x_0 , allora le condizioni (1) e (2) sono soddisfatte se e solo se risulta

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = f''(x_0)/2, \quad a_3 = f'''(x_0)/6 = f'''(x_0)/3!.$$

Di conseguenza, il polinomio di terzo grado che meglio approssima f in un intorno di x_0 é il polinomio:

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

■

In generale, iterando il ragionamento, si può dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$, se f é derivabile n volte in x_0 , allora il polinomio

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é il polinomio di grado n che meglio approssima f vicino ad x_0 , nel senso che soddisfa le condizioni

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^k} = 0 \quad \text{per ogni } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Tale polinomio prende il nome di **polinomio di Taylor di f di ordine n e di centro x_0** .

Nel caso $x_0 = 0$ il polinomio

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

prende il nome di **polinomio di Mac Laurin di ordine n di f** .

■

Osservazione 7.1 - Evidentemente, se f é derivabile n volte in x_0 , allora risulta

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

In particolare risulta $p_n(x) = p_{n-1}(x)$ se $f^{(n)}(x_0) = 0$.

■

Esempio 1 - Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = e^x$; sappiamo che f é derivabile infinite volte in $\mathbf{R}$ e che risulta $f^{(n)}(x) = e^x$ e quindi $f^{(n)}(0) = 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Ne segue che i polinomi di Mac Laurin di f sono rispettivamente

$$\begin{array}{ll} p_1(x) = 1 + x, & p_2(x) = 1 + x + x^2/2, \\ p_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6, & p_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24, \\ \dots & \dots \\ p_n(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots + x^n/n! & \dots \end{array}$$

■

Esempio 2 - Consideriamo la funzione $f(x) = \log(1 + x)$; sappiamo che f é derivabile infinite volte nell'intervallo $] -1, +\infty[$ e che risulta:

$$f'(x) = 1/(1 + x) = (1 + x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1 + x)^{-2}, \quad f'''(x) = 2(1 + x)^{-3}, \quad f^{IV}(x) = -3!(1 + x)^{-4},$$

in generale $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ per ogni n . Si ha dunque

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{IV}(0) = -3!,$$

in generale: $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ Ne segue che i polinomi di Mac Laurin di f sono rispettivamente

$$\begin{array}{ll} p_1(x) = x, & p_2(x) = x - x^2/2, \\ p_3(x) = x - x^2/2 + x^3/3, & p_4(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4, \\ \dots & \dots \\ p_n(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots + (-1)^{n-1}x^n/n & \dots \end{array}$$

■

Esempio 3 - Consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$; sappiamo che f é infinitamente derivabile e che risulta:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \operatorname{sen} x, \quad f^{IV}(x) = \cos x.$$

Da questo punto in poi le derivate successive si ripetono in maniera periodica: per ogni n si ha

$$f^{(4n)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+1)}(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4n+3)}(x) = \operatorname{sen} x.$$

In particolare, si ha

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{IV}(0) = 1, \quad f^{(V)}(x) = 0, \dots\dots$$

in generale tutte le derivate di f in 0 di ordine dispari sono nulle, mentre quelle di ordine pari sono alternativamente uguali a $+1$ e -1 .

Ne segue che i polinomi di Mac Laurin della funzione $\cos$ sono rispettivamente

$$\begin{array}{ll} p_1(x) = 1 + 0x = 1, & p_2(x) = 1 - x^2/2 = p_3(x) \\ p_4(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! = p_5(x) & p_6(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! = p_7(x) \\ p_8(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! = p_9(x) & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{array}$$

■

Esempio 4 - Consideriamo la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$; sappiamo che f é infinitamente derivabile e che risulta:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x.$$

Da questo punto in poi le derivate successive si ripetono in maniera periodica: per ogni n si ha

$$f^{(4n)}(x) = \operatorname{sen} x, \quad f^{(4n+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f^{(4n+3)}(x) = -\cos x.$$

In particolare, si ha

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(x) = 1, \dots\dots\dots$$

in generale tutte le derivate di f in 0 di ordine pari sono nulle, mentre quelle di ordine dispari sono alternativamente uguali a $+1$ e -1 .

Ne segue che i polinomi di Mac Laurin della funzione $\sin$ sono rispettivamente

$$\begin{array}{ll} p_1(x) = x = p_2(x), & p_3(x) = x - x^3/3! = p_4(x), \\ p_5(x) = x - x^3/3! + x^5/5! = p_6(x), & p_7(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! = p_8(x), \\ p_9(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! = p_{10}(x), & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{array}$$

■

Esempio 5 - Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. sappiamo che f é infinitamente derivabile e che risulta:

$$\begin{array}{ll} f'(x) = (1/2) \cdot (1+x)^{-1/2}, & f''(x) = (-1/4) \cdot (1+x)^{-3/2}, \\ f'''(x) = (3/8) \cdot (1+x)^{-5/2}, & f^{IV}(x) = (-15/16) \cdot (1+x)^{-7/2}, \\ \dots\dots\dots & \end{array}$$

Ne segue che i polinomi di Mac Laurin della funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$ sono rispettivamente

$$\begin{array}{ll} p_1(x) = 1 + x/2, & p_2(x) = 1 + x/2 - x^2/8, \\ p_3(x) = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16, & p_4(x) = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 - 5x^4/128, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

In maniera analoga possono essere calcolati i polinomi di Mac Laurin della funzione $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, ed in generale di $f(x) = (1+x)^\alpha$.

■

I precedenti esempi forniscono la base per poter tabulare le funzioni elementari

$$e^x, \quad \log(x), \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad x^\alpha.$$

L'esempio che segue fornisce invece il polinomio di Taylor necessario per calcolare i valori approssimati di una funzione, per così dire, più complessa.

Esempio 6 - Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{(x^2+3)/x} = (x+3/x)^{1/2}$. Si ha allora

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1/2) \cdot (x+3/x)^{-1/2} \cdot (1-3/x^2), \\ f''(x) &= (-1/4) \cdot (x+3/x)^{-3/2} \cdot (1-3/x^2)^2 + (x+3/x)^{-1/2} \cdot 3/x^3, \end{aligned}$$

e quindi $f(1) = 2$, $f'(1) = -1/2$, $f''(1) = -1/8 + 3/2 = 11/8$. Pertanto i polinomi di Taylor di centro $x_0 = 1$ del primo e secondo ordine di f sono dunque:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 2 - (1/2) \cdot (x-1) = (5-x)/2, \\ p_2(x) &= 2 - (1/2) \cdot (x-1) + (11/16) \cdot (x-1)^2 = (11x^2 - 30x + 51)/16. \end{aligned}$$

■

Osservazione 7.2 - Ovviamente, il polinomio di Taylor p_n soddisfa le condizioni (3) e quindi la condizione

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

L'errore dell'approssimazione $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ dicesi il **resto n -esimo** o **termine complementare n -simo** di f (rispetto al polinomio di Taylor). Si ha dunque

$$(5) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

Quest'ultima uguaglianza prende il nome di **Formula di Taylor**.

■

Ci sono diversi modi di rappresentare il resto R_n della formula di Taylor: il più semplice è generalmente attribuito a Peano e deriva direttamente dalla (4).

Si ha infatti la seguente **Formula di Taylor con il resto in forma di Peano**:

$$(6) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \alpha(x) \cdot (x-x_0)^n.$$

con α funzione continua ed infinitesima per $x \rightarrow x_0$.

Basta, infatti, porre $\alpha(x) = R_n(x)/(x-x_0)^n$ per ogni $x \neq x_0$ ed $\alpha(x) = 0$ per $x = x_0$, per ottenere la tesi.

La (6) fornisce solo informazioni di tipo qualitativo: segnaliamo soltanto, (senza peraltro volerli dilungare in molti dettagli), che essa riesce utile per calcolare i limiti di forme indeterminate, quando si voglia evitare di usare i teoremi di De L'Hôpital e che da essa si ricavano facilmente delle condizioni sufficienti per i punti di minimo o massimo (o per i punti di flesso) di una funzione, che estendono le condizioni studiate nei paragrafi precedenti al caso in cui $f'''(x_0) = 0$, (rispett. $f'''(x_0) = 0$).

■

Anche se la (6) non é in grado di fornire informazioni quantitative sull'errore $R_n(x)$ dell'approssimazione, tuttavia essa chiarisce che $R_n(x)$ é tanto piú piccolo quanto piú x é vicino ad x_0 , ma anche quanto piú grande é n .

Una informazione un po' piú accurata si ottiene se f é derivabile $n + 1$ volte in x_0 e risulta $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$; in tal caso si ha

$$f(x) = p_{n+1}(x) + \alpha(x) \cdot (x - x_0)^{n+1} = p_n(x) + \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \alpha(x) \right) \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

e dunque

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \alpha(x) \right) (x - x_0)^{n+1}$$

con α funzione continua ed infinitesima per $x \rightarrow x_0$.

Questo mostra che se x é sufficientemente vicino ad x_0 allora l'errore dell'approssimazione $R_n(x)$ é approssimativamente uguale ad

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

ed ovviamente tale stima dell'errore é attendibile se x é vicino ad x_0 , lo é sempre meno man mano che x si allontana da x_0 .

■

Si ottiene una stima ancora piú accurata se f é derivabile $n + 1$ volte in un intervallo I tale che $x_0 \in I$. In tal caso si dimostra che per ogni $x \in I$ esiste ξ compreso tra x_0 ed x tale che

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

e quindi tale che

$$(7) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

che viene detta **formula di Taylor con resto in forma di Lagrange**.

L'utilità di questa rappresentazione del resto n -simo consiste nel fatto che se esiste $M > 0$ tale che

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \text{per ogni } x \in I,$$

allora potremo avere una stima accurata dell'errore dell'approssimazione, poiché risulta :

$$(8) \quad |R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

■

In particolare, se f é infinitamente derivabile in I ed esiste $M > 0$ tale che $|f^n(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora l'errore dell'approssimazione

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

diminuisce progressivamente, (per un fissato n), man mano che x si avvicina ad x_0 , ma anche (per un x fissato) man mano che n cresce.

Ad esempio, considerato che $|D^n \sin x| \leq 1$ e $|D^n \cos x| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha che

$$\begin{array}{ll} \sin x = x + R_2(x) & \text{con } |R_2(x)| \leq |x^3|/3!, \\ \sin x = x - x^3/3! + R_4(x) & \text{con } |R_4(x)| \leq |x^5|/5!, \\ \sin x = x - x^3/3! + x^5/5! + R_6(x) & \text{con } |R_6(x)| \leq |x^7|/7!, \\ & \dots\dots \end{array}$$

e analogamente

$$\begin{array}{ll} \cos x = 1 - x^2/2 + R_3(x) & \text{con } |R_3(x)| \leq |x^4|/4!, \\ \cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + R_5(x) & \text{con } |R_5(x)| \leq |x^6|/6!, \\ \cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + R_7(x) & \text{con } |R_7(x)| \leq |x^8|/8!, \\ & \dots\dots \end{array}$$

Di conseguenza, se vogliamo calcolare un valore approssimato di $\sin x$ con una tolleranza dell'ordine di 10^{-6} , allora il polinomio di Mac Laurin del primo ordine $p_1(x) = x$ fornirà una approssimazione accettabile se $|x|^3/3! < 10^{-6}$, cioè se $|x| < \delta_1 = \sqrt[3]{6 \cdot 10^{-6}}$.

Se invece $|x| \geq \delta_1$, allora p_1 non è più adeguato ed occorre approssimare $\sin x$ con $p_3(x) = x - x^3/3!$, e tale polinomio fornisce una approssimazione accettabile se $|x| < \delta_2 = \sqrt[5]{5! \cdot 10^{-6}}$.

Se $|x| \geq \delta_2$, allora occorre utilizzare il polinomio $p_5(x) = x - x^3/3! - x^5/5!$ e l'approssimazione è accettabile se $|x| < \delta_3 = \sqrt[7]{7! \cdot 10^{-6}}$ e così via.

■

9. Studi di funzione

Abbiamo ora tutti gli strumenti per effettuare quello che si chiama lo **studio di una funzione**, cioè per trovare tutte le proprietà significative di una funzione reale fino a disegnarne approssimativamente il grafico.

In concreto, data una funzione $y = f(x)$, si eseguono le seguenti operazioni:

- (1) si trova l'insieme di definizione $\text{dom}(f)$ di f , precisando gli intervalli in cui f è manifestamente continua, o derivabile una o più volte,
- (2) si risolvono le disequazioni $f(x) > 0$ ed $f(x) < 0$ e l'equazione $f(x) = 0$, allo scopo di trovare gli intervalli in cui il grafico di f giace sopra o sotto l'asse x , e i punti di intersezione del grafico di f con l'asse x ; se $0 \in \text{dom}(f)$, si calcola $f(0)$ che rappresenta l'ordinata del punto di intersezione del grafico di f con l'asse y ;
- (3) si calcolano i limiti significativi di f , cioè il limite, (se necessario, per x che tende ad x_0 da destra e sinistra), per ogni punto x_0 che è un estremo di uno degli intervalli, al cui interno f è continua, in modo da trovare gli eventuali punti di discontinuità e gli eventuali asintoti verticali di f ;
- (4) se $D(f)$ è illimitato superiormente o inferiormente, si calcolano i limiti per x che tende a $\pm\infty$ di $f(x)$ e (se necessario) di $f(x)/x$, in modo da trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui;
- (5) si calcola la derivata prima di f e si risolvono le disequazioni $f'(x) > 0$ ed $f'(x) < 0$ e l'equazione $f'(x) = 0$, allo scopo di trovare gli intervalli in cui f è strettamente crescente o strettamente decrescente e gli eventuali punti di minimo o massimo relativo per f ;
- (6) si calcola la derivata seconda di f e si risolvono le disequazioni $f''(x) > 0$ ed $f''(x) < 0$ e l'equazione $f''(x) = 0$, allo scopo di trovare gli intervalli in cui f è strettamente convessa o strettamente concava e gli eventuali punti di flesso di f ;
- (7) si disegna il grafico di f sulla base di tutte le informazioni raccolte, e dal grafico si ricava tra l'altro se f è iniettiva, se è suriettiva, quale è l'immagine di f , se f è limitata o illimitata inferiormente o superiormente, quale ne è l'estremo inferiore o superiore, il minimo o massimo valore (se esiste), e gli eventuali punti di minimo o massimo assoluto.

■

Esempio 1 . - Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \log^2(x)}{x}$$

e disegnarne approssimativamente il grafico.

■

La funzione f é definita per $x > 0$, cioè nell'intervallo $]0, +\infty[$.

Si ha inoltre $f(x) > 0 \iff -1 < \log(x) < 1 \iff e^{-1} < x < e$.

Invece si ha $f(x) < 0 \iff 0 < x < e^{-1} \vee x > e$ ed $f(x) = 0 \iff x = e^{-1} \vee x = e$.

I limiti significativi sono i seguenti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Pertanto la retta $x = 0$ é un asintoto verticale destro e la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale destro.

Per ogni $x > 0$ si ha:

$$f'(x) = \frac{\log^2(x) - 2\log(x) - 1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3\log(x) - \log^2(x))}{x^3}.$$

Si ha dunque $f'(x) > 0 \iff 0 < x < \exp(1 - \sqrt{2}) \vee x > \exp(1 + \sqrt{2})$.

Si ha invece $f'(x) < 0 \iff \exp(1 - \sqrt{2}) < x < \exp(1 + \sqrt{2})$ ed $f'(x) = 0 \iff x = \exp(1 \pm \sqrt{2})$.

Pertanto f é strettamente crescente negli intervalli $]0, \exp(1 - \sqrt{2})]$ ed $[\exp(1 + \sqrt{2}), +\infty[$ ed é strettamente decrescente nell'intervallo $[\exp(1 - \sqrt{2}), \exp(1 + \sqrt{2})]$; ne segue che $\exp(1 - \sqrt{2})$ é punto di massimo relativo per f ed $\exp(1 + \sqrt{2})$ é punto di minimo relativo per f .

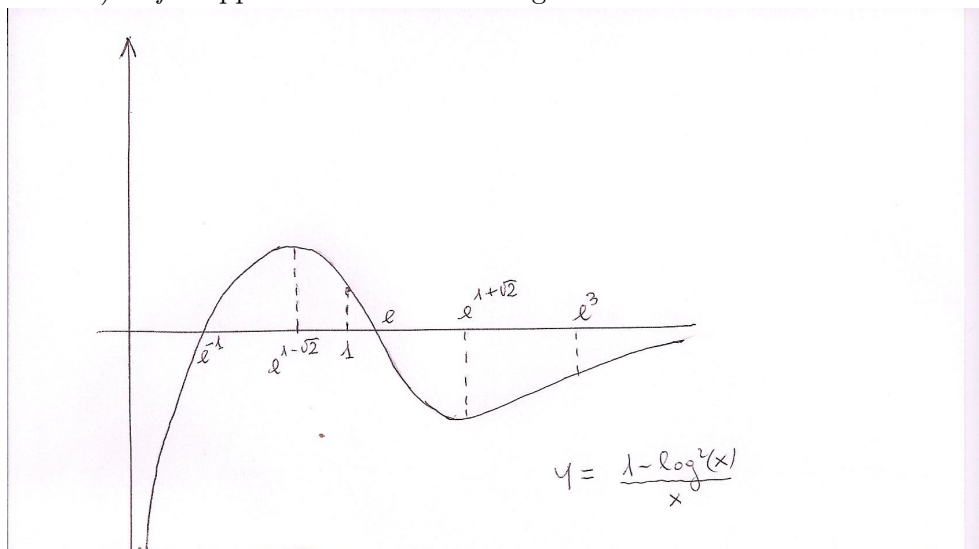
Si ha infine $f''(x) > 0$ se e solo se é $x > 0$ e $\log^2(x) - 3\log(x) < 0$, cioè se e solo se $1 < x < e^3$.

Viceversa si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $0 < x < 1$ oppure $x > e^3$ ed $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ oppure $x = e^3$.

Pertanto f é strettamente concava negli intervalli $]0, 1]$ e $[e^3, +\infty[$ ed é strettamente convessa nell'intervallo $[1, e^3]$. I punti 1 ed e^3 sono gli unici punti di flesso di f .

Si nota infine che f non é iniettiva, dal momento che l'asse x interseca in due punti il grafico di f , che $\exp(1 - \sqrt{2})$ é punto di massimo assoluto di f , che l'insieme dei valori di f é l'intervallo $[f(\exp(1 - \sqrt{2}), +\infty[$, e quindi che f é illimitata inferiormente e non suriettiva.

Il grafico (non in scala) di f é approssimativamente il seguente.



L' INTEGRALE DI RIEMANN

In questo capitolo vogliamo introdurre una nozione, (quella di integrale di una funzione), che consenta di definire e calcolare l' area di una regione piana non poligonale e diverse altre nozioni alla cui formulazione si può pervenire con un procedimento simile.

Il problema di calcolare l' area di una regione piana X è molto antico. Se X è un poligono, allora X può essere decomposto in un numero finito di triangoli a due a due senza punti interni comuni, e l' area di X è data dalla somma delle aree di tali triangoli.

Nel caso invece in cui X non è un poligono, ma ha una frontiera “curvilinea”, i matematici greci avevano messo a punto il cosiddetto **metodo di esaustione**, che si fa risalire ad Eudosso di Cnido (IV sec. a.C.) ma che forse era già adoperato da altri matematici del secolo precedente quali Anassagora e Democrito. In sostanza per dimostrare che l' area di X è uguale al numero a , si dimostra per assurdo che essa non può essere nè maggiore nè minore di a cercando di costruire una successione di poligoni, (ad esempio di plurirettangoli), inscritti in X , che tendono ad “esaurire ” l' insieme X . Il metodo venne applicato con grande successo soprattutto da Archimede (III sec. a.C.), il quale dimostrò per esempio che l' area del segmento parabolico compreso tra una parabola e una retta perpendicolare all' asse della parabola è uguale a $2/3$ dell' area del rettangolo ad esso circoscritto. (Con linguaggio moderno tale risultato afferma che se consideriamo la parabola di equazione $y = x^2$, allora l' area della regione limitata dall' asse x , dalla parabola e dalle rette di equazione $x = -a$ ed $x = a$ è uguale ad $1/3$ dell' area del rettangolo di base $2a$ ed altezza a^2 , cioè a $2a^3/3$ e quindi che l' area della regione limitata dal semiasse positivo delle x , dalla parabola e dalle rette di equazione $x = a$ è uguale ad $a^3/3$).

Il metodo di esaustione tornò in auge nel Cinquecento ad opera di L. Valerio, P. Guldino ed altri. Ben presto però il metodo entrò in crisi perchè diventava sempre più difficile adoperarlo per calcolare le aree (o i volumi) di figure sempre più complesse, ma soprattutto perchè esso non consente di scoprire risultati nuovi, è solo un metodo per dimostrare rigorosamente un risultato che si sa già (o perlomeno si sospetta) essere vero.

Dalla fine del '500 in poi cominciano ad affermarsi, ad opera di J. Keplero, B. Cavalieri, E. Torricelli ed altri, dei metodi nuovi basati su considerazioni infinitesimali. In sostanza volendo calcolare ad esempio l' area della regione compresa tra l' asse x , una curva giacente sopra lo stesso asse x e le rette $x = a$ ed $x = b$, si immagina di suddividere l' intervallo $[a, b]$ in infiniti intervalli “indivisibili” di lunghezza infinitamente piccola: in ciascuno di tali intervalli la curva sarà pressochè parallela all' asse x , cosicchè l' area di tale regione sarà la somma di infinite strisce rettangolari. Oppure per calcolare l' area di un cerchio possiamo pensare di suddividere la circonferenza in infiniti archi “indivisibili” di lunghezza infinitamente piccola, e suddividere quindi il cerchio in infiniti settori circolari, ciascuno dei quali potrà essere approssimato da un triangolo avente per base l' arco e per altezza il raggio. L' area del cerchio sarà allora la somma delle aree di tali triangoli e dunque sarà uguale all' area del triangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio, cioè $S = (2\pi r)r/2 = \pi r^2$.

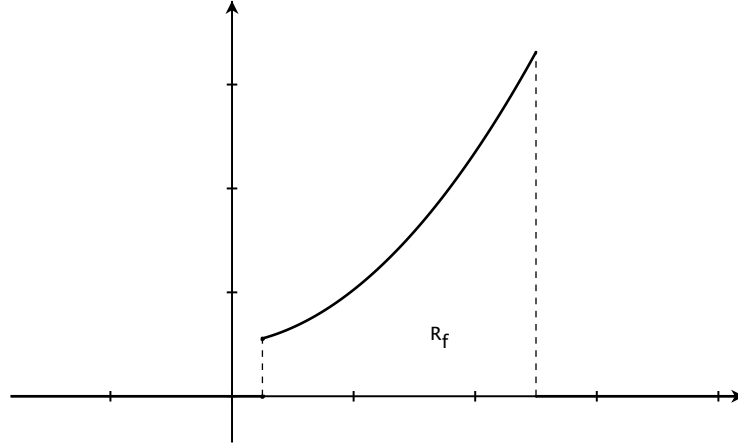
Naturalmente il metodo degli “indivisibili” venne fortemente contestato dai matematici per così dire conservatori, che trovavano oscuri e contraddittori i ragionamenti basati sugli indivisibili tanto più che venivano a soppiantare procedimenti ineccepibili e rigorosi. Tuttavia i risultati che si riusciva ad ottenere con tali metodi, (e con i metodi del Calcolo Differenziale che stava nascendo nello stesso tempo), erano talmente tanti e tanto fecondi che essi si affermarono ben presto e pervasero le scienze sperimentali che nel frattempo stavano avendo uno sviluppo poderoso.

Ovviamente rimaneva in piedi il problema dei fondamenti teorici del metodo che per il momento erano piuttosto fragili se non oscuri. Tale problema venne risolto solo molto tempo dopo quando A. Cauchy riuscì a dare una definizione esauriente ed ineccepibile di limite e, attraverso questa, di derivata e di integrale. Per la verità la nozione di integrale data da Cauchy ha richiesto degli ulteriori approfondimenti sulla nozione di continuità di una funzione e sulle proprietà caratteristiche dei numeri reali, ciò che ha portato alla definizione di estremo superiore ed inferiore di un insieme di numeri reali ed infine alla sintesi di Riemann, che viene presentata nei prossimi paragrafi.

■

Per introdurre l'argomento consideriamo una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua e positiva e consideriamo la regione piana compresa tra l'asse x , il grafico di f e le rette di equazione $x = a$ ed $x = b$, cioè l'insieme

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

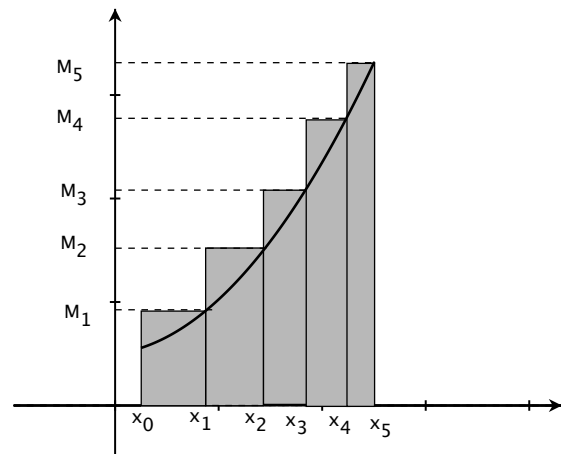
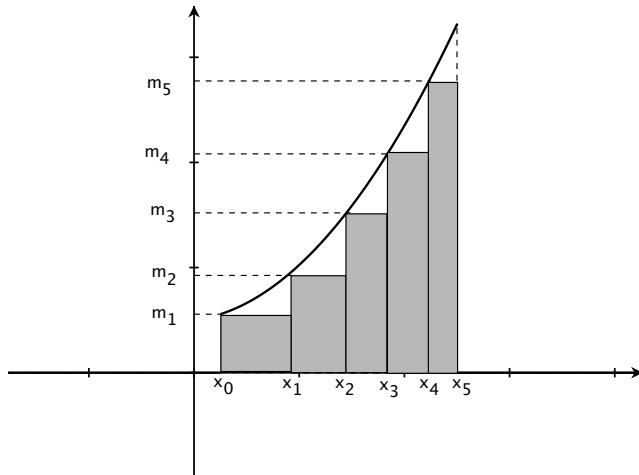


E' evidente che se f è costante, allora il grafico di f è una retta parallela all'asse x e quindi R_f non è altro che un rettangolo (la cui area è data dal prodotto della lunghezza della base, cioè $b - a$, per la lunghezza dell'altezza data dal valore costante che f assume nell'intervallo $[a, b]$). Perciò nel caso generale è naturale definire **rettangoloide di base $[a, b]$ definito da f** l'insieme R_f . Di tale rettangoloide vogliamo definire l'area.

A tal fine supponiamo di suddividere l'intervallo $[a, b]$ in un numero finito di intervalli adiacenti

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n] \quad \text{con } x_0 = a \text{ ed } x_n = b,$$

indichiamo con m_k ed M_k rispettivamente il minimo e il massimo valore che f assume nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, e consideriamo il **plurirettangolo** costituito dai rettangoli di base $[x_0, x_1]$ ed altezza m_1 , di base $[x_1, x_2]$ ed altezza m_2 , $\dots$ di base $[x_{n-1}, x_n]$ ed altezza m_n ed il plurirettangolo costituito dai rettangoli di base $[x_0, x_1]$ ed altezza M_1 , di base $[x_1, x_2]$ ed altezza M_2 , $\dots$ di base $[x_{n-1}, x_n]$ ed altezza M_n .



Evidentemente essi sono rispettivamente contenuto in R_f e contenente R_f e la loro area è data rispettivamente da

$$(0.1) \quad m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}),$$

$$(0.2) \quad M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Ora è naturale che l'area di R_f sia compresa tra l'area dei plurirettangoli contenuti in R_f e l'area dei plurirettangoli contenenti R_f e dunque che l'area di R_f sia definita come l'elemento separatore (se esiste ed è unico) tra l'insieme dei numeri del tipo (0.1) e l'insieme dei numeri del tipo (0.2).

Le precedenti considerazioni suggeriscono la strada da percorrere per dare la definizione di funzione integrabile e di integrale di una funzione.

■

1. - Funzioni integrabili secondo RIEMANN

Definizione 1.1. Dicesi **decomposizione o suddivisione** dell'intervallo $[a, b]$ ogni insieme finito $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di punti di $[a, b]$ tali che $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$.

Inoltre dicesi **diametro o ampiezza** della decomposizione D il numero reale

$$|D| = \max(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}).$$

■

Definizione 1.2. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione limitata e $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è una decomposizione di $[a, b]$, diconsi rispettivamente **somma inferiore** e **somma superiore** di f relativa a D i numeri reali

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), \quad S(f, D) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}),$$

dove, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, abbiamo indicato con i simboli m_k ed M_k rispettivamente il minimo e massimo valore di f nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, (se tali minimo e massimo valore esistono), o, più in generale

$$m_k = \inf f([x_{k-1}, x_k]), \quad M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k]).$$

■

E' evidente che risulta $m_k \leq M_k$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, e dunque

$$(1.1) \quad s(f, D) \leq S(f, D) \quad \text{per ogni decomposizione } D \text{ dell'intervallo } [a, b].$$

Più in generale si ha la seguente

Proposizione 1.3. L'insieme $\mathcal{S}^-(f)$ delle somme inferiori di f e l'insieme $\mathcal{S}^+(f)$ delle somme superiori di f sono insiemi **separati**.

In altri termini, se D' e D'' sono decomposizioni di $[a, b]$, allora si ha $s(f, D') \leq S(f, D'')$.

■

La precedente Proposizione, (di cui si omette per semplicità la dimostrazione), consente di dare la seguente

Definizione 1.4. Una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ si dice **integrabile secondo RIEMANN**, (o semplicemente **integrabile**), se l'insieme delle somme inferiori di f e l'insieme delle somme superiori di f sono contigui, cioè se hanno uno ed un solo elemento separatore.

Tale unico elemento separatore dicesi l' **integrale di f secondo RIEMANN** e viene denotato con i simboli

$$I(f) \quad \text{oppure} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

■

Diamo subito un esempio di funzione integrabile ed un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

Esempio 1.1 - Ogni funzione costante è integrabile secondo Riemann. Inoltre se è $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$, allora si ha $I(f) = c(b - a)$.

Infatti per ogni decomposizione $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$ e per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ si ha evidentemente $m_k = M_k = c$ e quindi

$$\begin{aligned} s(f, D) &= \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = c(b - a), \\ S(f, D) &= \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = c(b - a). \end{aligned}$$

Pertanto l'insieme delle somme inferiori di f e l'insieme delle somme superiori di f si riducono a $\{c(b - a)\}$ e hanno quindi come unico elemento separatore il numero $c(b - a)$.

Questo prova la tesi.

■

Esempio 1.2 - Consideriamo la funzione (detta *funzione di Dirichlet*) definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è un numero razionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ è un numero irrazionale.} \end{cases}$$

Poichè ogni intervallo contiene almeno un numero razionale ed almeno un numero irrazionale, per ogni decomposizione $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dell'intervallo $[0, 1]$ e per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ si ha evidentemente $m_k = 0$, $M_k = 1$ e quindi

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = 0, \quad S(f, D) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 1 - 0 = 1.$$

Pertanto l'insieme delle somme inferiori di f e l'insieme delle somme superiori di f si riducono rispettivamente agli insiemi $\{0\}$ e $\{1\}$. Ogni numero reale compreso tra 0 e 1 è quindi un separatore tra tali insiemi e di conseguenza f non è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[0, 1]$.

Analogamente si vede che f non è integrabile in nessun intervallo $[a, b]$. Lo stesso accade se si sostituiscono i valori 0 ed 1 di f con due valori arbitrari c_1 e c_2 con $c_1 \neq c_2$.

■

Osservazione 1.6 - Ricordiamo che se A e B sono due insiemi separati di numeri reali, (cioè se risulta $a \leq b$ per ogni $a \in A, b \in B$), allora A è limitato superiormente e B è limitato inferiormente.

Più esattamente si ha che ogni $b \in B$ è un maggiorante di A ed ogni $a \in A$ è un minorante di B , e quindi $\sup A \leq b$ per ogni $b \in B$ e $\inf B \geq a$ per ogni $a \in A$. Ne segue che $\sup A \leq \inf B$ e che $\sup A$ e $\inf B$ sono rispettivamente il più piccolo e il più grande elemento separatore tra A e B e pertanto che A e B sono contigui se e solo se risulta $\sup A = \inf B$.

Ne consegue che se f è una funzione limitata di $[a, b]$ in $\mathbf{R}$, allora detto $\mathcal{D}$ l'insieme delle decomposizioni di $[a, b]$ e posto

$$\begin{aligned} I^-(f) &= \sup \mathcal{S}^-(f) = \sup \{s(f, D) : D \in \mathcal{D}\} = \text{integrale inferiore di } f, \\ I^+(f) &= \inf \mathcal{S}^+(f) = \inf \{S(f, D) : D \in \mathcal{D}\} = \text{integrale superiore di } f, \end{aligned}$$

si ha che f è integrabile secondo Riemann se e solo se risulta $I^-(f) = I^+(f) = I(f)$.

Si noti che nel caso dell'Esempio 1.1 si ha $I^-(f) = I^+(f) = c(b-a)$, mentre nel caso dell'Esempio 1.2 risulta $I^-(f) = 0$ e $I^+(f) = 1$.

■

Osservazione 1.7 - Si noti che affinché una funzione f possa essere integrabile secondo Riemann è assolutamente necessario che essa sia limitata.

Infatti, se f è illimitata inferiormente (rispett. superiormente), allora per ogni decomposizione D di $[a, b]$ si ha che f è illimitata inferiormente (rispett. superiormente) in almeno uno dei sottointervalli $[x_{k-1}, x_k]$, e quindi si ha $s(f, D) = -\infty$, (rispett. $S(f, D) = +\infty$).

■

2. - Alcune classi di funzioni integrabili

In questo paragrafo troveremo alcune fondamentali classi di funzioni integrabili secondo Riemann. A tal fine è utile premettere la seguente

Proposizione 2.1. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è limitata, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- a) f è integrabile secondo Riemann
- b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione D di $[a, b]$ tale che $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.
- c) esiste una successione $(D_n)_n$ di decomposizioni di $[a, b]$ tale che

$$(2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) - s(f, D_n) = 0.$$

Inoltre per ogni successione $(D_n)_n$ di decomposizioni di $[a, b]$ soddisfacente la (2.1) si ha:

$$(2.2) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, D_n),$$

il che consente di calcolare l'integrale ricorrendo alla nozione di limite anziché a quella di estremo superiore o inferiore.

Dim. a) $\implies$ b) La dimostrazione viene omessa per brevità.

b) $\implies$ c) Per ogni $n \in \mathbf{N}$, (posto $\varepsilon = 1/n$), esiste una decomposizione D_n di $[a, b]$ tale che

$$0 \leq S(f, D_n) - s(f, D_n) < 1/n.$$

La successione $(D_n)_n$ di decomposizioni di $[a, b]$ così costruita soddisfa la tesi in virtù del teorema dei carabinieri.

c) $\implies$ a) Se per assurdo f non fosse integrabile, l'insieme delle somme inferiori e l'insieme delle somme superiori di f avrebbero due elementi separatori l' ed l'' con $l' < l''$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si avrebbe allora

$$s(f, D_n) \leq l' < l'' \leq S(f, D_n) \quad \text{e quindi} \quad l'' - l' \leq S(f, D_n) - s(f, D_n).$$

Per il teorema di prolungamento delle disuguaglianze, ne seguirebbe che

$$l'' - l' \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) - s(f, D_n) \quad \text{cioè} \quad l'' - l' \leq 0,$$

che è assurdo.

Dimostriamo infine che sussiste la (2.2).

Infatti, risulta $s(f, D_n) \leq I(f) \leq S(f, D_n)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi

$$0 \leq I(f) - s(f, D_n) \leq S(f, D_n) - s(f, D_n), \quad 0 \leq S(f, D_n) - I(f) \leq S(f, D_n) - s(f, D_n).$$

Di qui, per il teorema dei carabinieri, segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f) - s(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) - I(f) = 0$$

il che prova la tesi.

Teorema 2.2. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione crescente o decrescente, allora f è integrabile.*

Dim. Supponiamo per esempio che f sia crescente e per ogni n sia D_n la decomposizione di $[a, b]$ che scompone $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza, cioè

$$D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{con} \quad x_j = a + j \frac{b-a}{n}, \quad \text{per } j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

In virtù della precedente Proposizione 2.1, per provare la tesi sarà sufficiente dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) - s(f, D_n) = 0.$$

Infatti, per ogni $n \in \mathbf{N}$, e per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ si ha

$$f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) \quad \text{per ogni } x \in [x_{k-1}, x_k],$$

e quindi

$$m_k = \min f([x_{k-1}, x_k]) = f(x_{k-1}), \quad M_k = \max f([x_{k-1}, x_k]) = f(x_k).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} s(f, D_n) &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) \\ S(f, D_n) &= \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)), \end{aligned}$$

e quindi

$$S(f, D_n) - s(f, D_n) = \frac{(b-a)}{n} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{(b-a)}{n} (f(b) - f(a)).$$

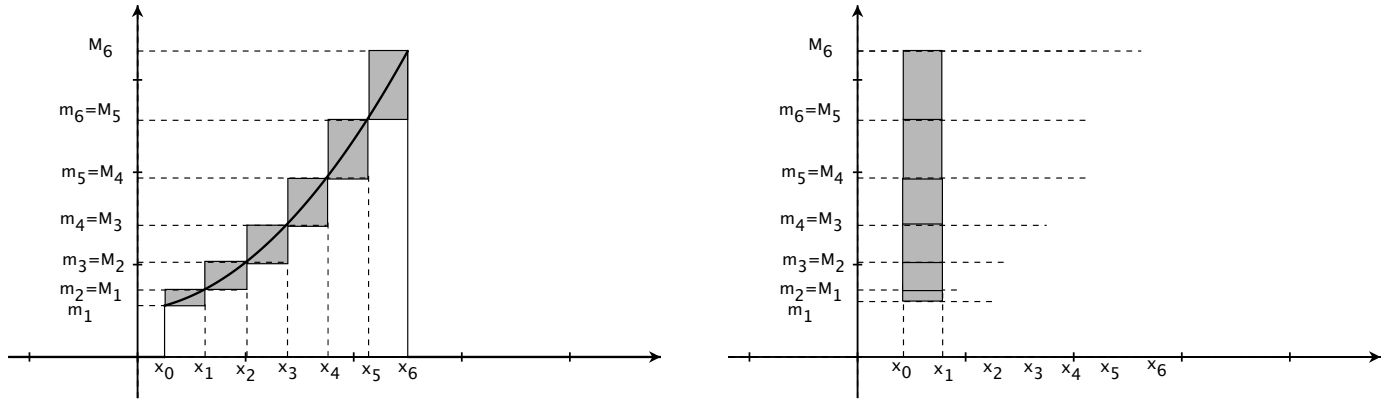
Questo prova la tesi, poiché $(b-a)/n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Se f è decrescente la dimostrazione è analoga, con l'unica differenza che ora è $m_k = f(x_k)$ ed $M_k = f(x_{k-1})$ per ogni k e quindi

$$S(f, D_n) - s(f, D_n) = \frac{b-a}{n} (f(a) - f(b)) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

■

Le figure seguenti illustrano la dimostrazione fatta. La differenza tra la somma superiore e la somma inferiore coincide con l'area della regione evidenziata: tale regione è l'unione di n rettangoli aventi la stessa lunghezza di base, $(b-a)/n$, e che sono "impilabili", sicché l'area di tale regione coincide con l'area di un rettangolo di base $(b-a)/n$ ed altezza $M_n - m_1 = f(b) - f(a)$.



■

Teorema 2.3. *Ogni funzione continua di $[a, b]$ in $\mathbf{R}$ è integrabile.*

Dim. Detta come prima D_n la decomposizione di $[a, b]$ che decompone $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza, cioè

$$D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{con} \quad x_j = a + j \frac{b-a}{n}, \quad \text{per } j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

a causa della Prop. 2.1 basterà dimostrare che risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) - s(f, D_n) = 0,$$

cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che

$$S(f, D_n) - s(f, D_n) < \varepsilon, \quad \text{per ogni } n > \bar{n}.$$

A tal fine fissiamo $\varepsilon > 0$ ed osserviamo che, per il teorema di Cantor, f è uniformemente continua, dal momento che essa è continua in un intervallo chiuso e limitato. Di conseguenza esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x', x'' \in [a, b]$ si ha:

$$(2.3) \quad |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon / (b - a).$$

Ciò posto, per ogni $n \in \mathbf{N}$ tale che $n > (b - a) / \delta$ e per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, in virtù del teorema di Weierstrass, si ha che esistono $x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tali che

$$m_k = \min f([x_{k-1}, x_k]) = f(x'_k), \quad M_k = \max f([x_{k-1}, x_k]) = f(x''_k).$$

D' altra parte si ha $|x'_k - x''_k| \leq x_k - x_{k-1} = (b - a) / n < \delta$ e quindi per la (2.3) si ha

$$M_k - m_k = |f(x''_k) - f(x'_k)| < \varepsilon / (b - a).$$

Pertanto, posto $\bar{n} = \text{INT}((b - a) / \delta)$, per ogni $n > (b - a) / \delta \geq \bar{n}$ si ha

$$\begin{aligned} S(f, D_n) - s(f, D_n) &= \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) < \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n\varepsilon}{b-a} = \varepsilon, \end{aligned}$$

come volevasi.

Osservazione 2.4 - Si noti che se f è una funzione crescente, decrescente o continua, allora f è dotata di minimo e massimo valore e quindi è limitata.

Osservazione 2.5 - Dai precedenti teoremi e dalla Proposizione 2.1 si deduce dunque che se f è una funzione crescente, decrescente o continua, allora f è integrabile secondo Riemann e il suo integrale è dato da

$$(2.4) \quad I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n m_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n M_k,$$

dove m_k ed M_k sono rispettivamente il minimo e il massimo valore di f nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ ed $x_k = a + k(b-a)/n$.

Perciò se f è crescente (rispett. decrescente), allora è $m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$, (rispett. $M_k = f(x_{k-1})$, $m_k = f(x_k)$), e quindi l'integrale di f può essere calcolato facilmente come limite di successioni:

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Invece se f è continua, allora m_k ed M_k sono i valori che f assume in due punti x'_k ed x''_k dell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ la cui esistenza ci viene garantita dal teorema di Weierstrass ma che non sapremmo come trovare. Tuttavia, anche nel caso di funzioni continue è possibile calcolare l'integrale come limite di successioni di numeri reali.

A tal fine, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ scegliamo arbitrariamente un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$; si ha allora $m_k \leq f(t_k) \leq M_k$ e quindi:

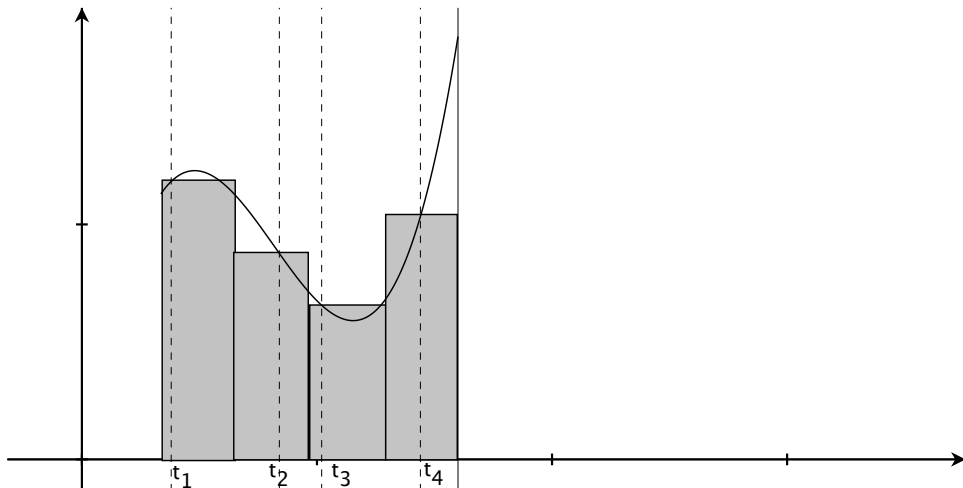
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n m_k \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n M_k, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Di qui segue, per la (2.4) e il teorema dei carabinieri, che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = I(f).$$

■

La figura seguente illustra graficamente il ragionamento fatto: nell'ipotesi che f sia continua e positiva, se scegliamo arbitrariamente un punto t_k in ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ e costruiamo il plurirettangolo costituito dai rettangoli di base $[x_0, x_1]$ ed altezza $f(t_1)$, di base $[x_1, x_2]$ ed altezza $f(t_2)$, di base $[x_{n-1}, x_n]$ ed altezza $f(t_n)$, otterremo un plurirettangolo che contiene il plurirettangolo contenuto nel rettangoloide R_f ed è contenuto nel plurirettangolo contenente R_f .



L'area di tale plurirettangolo $\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ é quindi una approssimazione dell'area del rettangoloide associato ad f , (anche se ovviamente non siamo in grado di dire se la approssima per difetto o per eccesso). L'errore dell'approssimazione sará tanto piú piccolo quanto piú é piccola la lunghezza degli n sottointervalli in cui é stato diviso l'intervallo $[a, b]$, e dunque l'area del rettangoloide é il limite per $n \rightarrow \infty$ della successione delle aree dei plurirettangoli approssimanti.

■

Le considerazioni precedenti suggeriscono la strada per approfondire il concetto di integrale di una funzione integrabile.

Definizione 2.6 -. Se $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ é una decomposizione di $[a, b]$, e per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ scegliamo arbitrariamente $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, allora l'insieme $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ dicesi **scelta relativa alla decomposizione D** e il numero reale

$$\sigma(f, D, T) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

dicesi **somma secondo Cauchy di f relativa a D e T** .

Chiaramente per ogni decomposizione D e per ogni scelta T relativa a D risulta

$$s(f, D) \leq \sigma(f, D, T) \leq S(f, D)$$

e quindi la somma di Cauchy $\sigma(f, D, T)$ relativa alla decomposizione D e alla scelta T rappresenta una approssimazione dell'integrale di f . Intuitivamente, l'errore dell'approssimazione sará tanto piú piccolo quanto piú é piccola la lunghezza dei sottointervalli di $[a, b]$ prodotti dalla decomposizione D , cioè quanto piú é piccolo il diametro di D .

In effetti si dimostra che se f é integrabile secondo Riemann, allora si ha:

$$(2.5) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, D_n, T_n),$$

dove, per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha che T_n é una scelta relativa alla decomposizione D_n di $[a, b]$ e $|D_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

In realtà, si dimostra che se f é integrabile secondo Riemann allora risulta :

$$(2.6) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(f, D, T),$$

nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni decomposizione D di diametro minore di δ e per ogni scelta T relativa a D si ha

$$|\sigma(f, D, T) - \int_a^b f(x) dx| < \varepsilon;$$

e viceversa, se esiste $l \in \mathbf{R}$ tale che

$$l = \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(f, D, T)$$

nel senso sopra precisato, allora f é integrabile secondo Riemann e il suo integrale $I(f)$ é proprio l .

■

3. - Proprietà dell' integrale

Dopo aver fornito nel paragrafo precedente degli esempi fondamentali di funzioni integrabili, passiamo a dare le principali proprietà delle funzioni integrabili e dell' integrale.

Proposizione 3.1. *Se f e g sono due funzioni integrabili di $[a, b]$ in $\mathbf{R}$, allora*

- a) $f \geq g \implies I(f) \geq I(g)$; in particolare $f \geq 0 \implies I(f) \geq 0$;
- b) $f + g$ è integrabile e risulta $I(f + g) = I(f) + I(g)$;
- c) $c \cdot f$ è integrabile per ogni $c \in \mathbf{R}$ e risulta: $I(c \cdot f) = c \cdot I(f)$;
in particolare $-f$ è integrabile e risulta $I(-f) = -I(f)$.

Dim. La dimostrazione può essere ottenuta utilizzando la definizione di integrale come estremo superiore dell'insieme delle somme inferiori o come estremo inferiore dell'insieme delle somme superiori, e dunque tramite le proprietà dell'estremo superiore o inferiore di un insieme di numeri reali, ma può essere ottenuta in maniera molto più semplice utilizzando la definizione di integrale come limite di somme di Cauchy, e quindi utilizzando le proprietà dei limiti.

Infatti, per ogni decomposizione D dell'intervallo $[a, b]$ e per ogni scelta T relativa a D , si ha:

$$\begin{aligned} f \geq g &\implies \sigma(f, D, T) \geq \sigma(g, D, T), \\ f \geq 0 &\implies \sigma(f, D, T) \geq 0, \\ \sigma(f + g, D, T) &= \sigma(f, D, T) + \sigma(g, D, T), \\ \sigma(c \cdot f, D, T) &= c \cdot \sigma(f, D, T). \end{aligned}$$

Ne segue, in virtù del teorema di prolungamento delle disuguaglianze, che

$$\begin{aligned} f \geq g &\implies I(f) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(f, D, T) \geq \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(g, D, T) = I(g), \\ f \geq 0 &\implies I(f) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(f, D, T) \geq 0. \end{aligned}$$

D'altra parte, dal teorema sul limite della somma e del prodotto si deduce che

$$\begin{aligned} \exists \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(f + g, D, T) &= \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(f, D, T) + \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(g, D, T) = I(f) + I(g), \\ \exists \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(c \cdot f, D, T) &= c \cdot \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma(f, D, T) = c \cdot I(f). \end{aligned}$$

Questo prova il resto della tesi.

■

Proposizione 3.2 - (Proprietà additiva dell'integrale) -. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ limitata e sia $c \in]a, b[$; allora f è integrabile se e solo se le restrizioni di f agli intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ sono integrabili.*

Risulta inoltre $I(f) = I(f|_{[a, c]}) + I(f|_{[c, b]})$.

Dim. Infatti supponiamo che f sia integrabile; allora, per la Prop. 2.1, fissato $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ tale che

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Sia ora $j = 1, 2, \dots, n$ tale che $x_{j-1} \leq c < x_j$ e poniamo allora $D' = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, c\}$ e $D'' = \{c, x_j, \dots, x_n\}$; evidentemente D' e D'' sono decomposizioni rispettivamente dell'intervallo $[a, c]$ e dell'intervallo $[c, b]$ e risulta

$$\begin{cases} S(f|_{[a,c]}, D') - s(f|_{[a,c]}, D') \\ S(f|_{[c,b]}, D'') - s(f|_{[c,b]}, D'') \end{cases} \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Questo prova che $f|_{[a,c]}$ ed $f|_{[c,b]}$ sono integrabili.

Viceversa supponiamo che $f|_{[a,c]}$ ed $f|_{[c,b]}$ siano integrabili e sia $\varepsilon > 0$; allora per la Prop. 2.1 esistono due decomposizioni D' e D'' rispettivamente di $[a, c]$ e $[c, b]$, tali che

$$S(f|_{[a,c]}, D') - s(f|_{[a,c]}, D') < \varepsilon/2, \quad S(f|_{[c,b]}, D'') - s(f|_{[c,b]}, D'') < \varepsilon/2.$$

Ora è evidente che $D = D' \cup D''$ è una decomposizione di $[a, b]$ e che risulta

$$s(f, D) = s(f|_{[a,c]}, D') + s(f|_{[c,b]}, D''), \quad S(f, D) = S(f|_{[a,c]}, D') + S(f|_{[c,b]}, D''),$$

e quindi

$$S(f, D) - s(f, D) = S(f|_{[a,c]}, D') - s(f|_{[a,c]}, D') + S(f|_{[c,b]}, D'') - s(f|_{[c,b]}, D'') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Questo prova che f è integrabile.

Per provare infine che $I(f) = I(f|_{[a,c]}) + I(f|_{[c,b]})$, consideriamo due successioni $(D'_n)_n$ e $(D''_n)_n$ di decomposizioni di $[a, c]$ e $[c, b]$ rispettivamente, tali che $|D'_n| \rightarrow 0$ e $|D''_n| \rightarrow 0$, e per ogni n siano rispettivamente T'_n e T''_n scelte relative a D'_n e D''_n .

Evidentemente si ha che $D_n = D'_n \cup D''_n$ è una decomposizione di $[a, b]$, che $T_n = T'_n \cup T''_n$ è una scelta relativa a D_n e che

$$\sigma(f, D_n, T_n) = \sigma(f|_{[a,c]}, D'_n, T'_n) + \sigma(f|_{[c,b]}, D''_n, T''_n).$$

Infine si ha $|D_n| = \max(|D'_n|, |D''_n|) \rightarrow 0$, e quindi passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha :

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, D_n, T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f|_{[a,c]}, D'_n, T'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f|_{[c,b]}, D''_n, T''_n) = I(f|_{[a,c]}) + I(f|_{[c,b]}).$$

■

Osservazione 3.3 - Dalla precedente Prop. 3.2 segue che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile, allora è integrabile pure la restrizione di f a qualunque intervallo $[c, d] \subset [a, b]$.

■

4. Il Teorema della media

Teorema 4.1. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile secondo Riemann, allora posto $m = \inf f([a, b])$ ed $M = \sup f([a, b])$, si ha

$$(4.1) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Inoltre se f è continua, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$(4.2) \quad \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Dim. La (4.1) può essere dimostrata facilmente con due diversi procedimenti.

Infatti, posto $D = \{x_0, x_1\}$ con $x_0 = a, x_1 = b$, si ha che D è una decomposizione di $[a, b]$ e risulta

$$s(f, D) = m(x_1 - x_0) = m(b - a), \quad S(f, D) = M(x_1 - x_0) = M(b - a).$$

Ne segue che

$$s(f, D) \leq I(f) \leq S(f, D) \quad \text{cioé} \quad m(b - a) \leq I(f) \leq M(b - a).$$

Una dimostrazione alternativa della (4.1) è la seguente.

Siano g_1 e g_2 le funzioni costanti definite ponendo $g_1(x) = m$ e $g_2(x) = M$ per ogni $x \in [a, b]$; si ha allora che g_1 e g_2 sono funzioni integrabili e risulta $I(g_1) = m(b - a)$ ed $I(g_2) = M(b - a)$, (cfr. Esempio 1 del n.1). D'altra parte si ha $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$ e quindi $g_1 \leq f \leq g_2$; ne segue, per la Prop. 3.1, che $I(g_1) \leq I(f) \leq I(g_2)$, cioè $m(b - a) \leq I(f) \leq M(b - a)$.

Per provare la (4.2) osserviamo che, per il teorema di Weierstrass, f è dotata di minimo e massimo valore; pertanto esistono $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ tali che $f(\underline{x}) = m = \min f([a, b])$ ed $f(\bar{x}) = M = \max f([a, b])$. D'altra parte, per il teorema di Bolzano, l'insieme immagine di f è un intervallo, e precisamente l'intervallo i cui estremi sono $f(\underline{x}) = m$ ed $f(\bar{x}) = M$. Risulta dunque

$$f([a, b]) = [f(\underline{x}), f(\bar{x})] = [m, M].$$

Infine dalla (4.1) segue che

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Dunque

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \in [m, M] = f([a, b]),$$

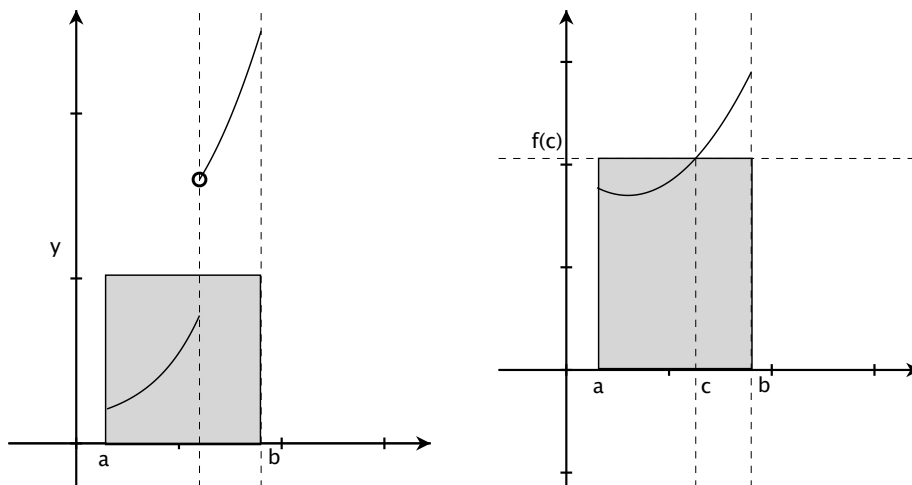
e quindi esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

come volevasi.

■

Osservazione 4.2. - Il significato geometrico del teorema della media è illustrato dalle figure seguenti:



Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile secondo Riemann e positiva, allora l'integrale di f , cioè l'area del rettangoloide R_f di base $[a, b]$ definito da f , è compreso tra $m(b-a)$ ed $M(b-a)$; pertanto R_f è equivalente ad un rettangolo avente per base la lunghezza dell'intervallo $[a, b]$ e per altezza un numero $\bar{y}$ compreso tra m ed M .

Se f è integrabile ma discontinua, allora l'insieme immagine di f non coincide con l'intervallo $[m, M]$, e quindi è possibile che tale numero non appartenga all'insieme $f([a, b])$. Se invece f è continua, allora $f([a, b])$ coincide con $[m, M]$, e quindi esiste $c \in [a, b]$ tale che R_f è equivalente al rettangolo avente per base la lunghezza dell'intervallo $[a, b]$ e per altezza $f(c)$. Per tale motivo il numero

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

dicesi il **valore medio** di f nell'intervallo $[a, b]$.

■

Possiamo renderci conto diversamente del motivo per cui il numero

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

rappresenta il valore medio di una funzione continua f , (anche se non sempre siamo in grado di trovare il o i numeri c tali che $f(c) = \bar{y}$).

Infatti considerata per ogni n la decomposizione D_n che consente di suddividere l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza a due a due adiacenti, e fissata una scelta $T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ relativa a D_n , si ha che

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, D_n, T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k),$$

e quindi

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k).$$

Pertanto, $\bar{y}$ rappresenta il limite della media aritmetica dei valori che f assume in n punti $t_1, t_2, \dots, t_n$, scelti come campioni di f negli intervalli $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, quando tende a ∞ il numero n dei campioni.

Questa interpretazione *statistica* del teorema della media dovrebbe riuscire ad illustrare bene l'importanza che il concetto di integrale riveste in Statistica.

■

n. 5. - Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

In questo paragrafo verrà illustrato il legame profondo che esiste tra due concetti apparentemente molto distanti tra loro, quali il concetto di derivata che è un concetto chiaramente *locale* e il concetto di integrale che è invece un concetto *globale*.

A tal fine cominciamo con il dare la seguente

Definizione 5.1. Se I è un intervallo di $\mathbf{R}$, una funzione $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ dicesi **primitiva** della funzione $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ se F è derivabile in I e risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

■

Proposizione 5.2. - (Proprietà delle primitive).

- (1) Se F è una primitiva di f , allora per ogni $c \in \mathbf{R}$ la funzione $F + c$ è pure una primitiva di f .
- (2) Se F_1 ed F_2 sono due primitive di f , allora la funzione $F_1 - F_2$ è costante.

Dim. di (1). Infatti $F + c$ è derivabile in I e risulta $(F + c)'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ per ogni $x \in I$. *Dim. di (2).* In effetti $F_1 - F_2$ è derivabile in I e risulta $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ per ogni $x \in I$. La tesi discende allora dal corollario del Teorema di Lagrange.

■

Osservazione 5.3. - Pertanto per trovare le primitive di una funzione continua, basta trovarne una; se F è una primitiva di f , le primitive di f sono tutte e sole le funzioni del tipo $F + c$, con c costante reale arbitraria.

■

Prima di enunciare e dimostrare il successivo fondamentale Teorema 5.4 è opportuno introdurre la seguente convenzione.

Se I è un qualunque intervallo di $\mathbf{R}$ ed f è una funzione continua in I , si converrà di porre per ogni $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} I(f|_{[a,b]}) & \text{se } a < b \\ 0 & \text{se } a = b \\ -I(f|_{[b,a]}) & \text{se } a > b. \end{cases}$$

■

E' evidente che risulta

$$(5.1) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{per ogni } a, b \in I.$$

Inoltre si verifica facilmente che

$$(5.2) \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \text{per ogni } a, b, c \in I,$$

indipendentemente dalla posizione di c rispetto ad a e b .

■

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare il seguente fondamentale

Teorema 5.4 - (Teorema di Torricelli - Barrow).

Ogni funzione f continua in un intervallo I è dotata di primitiva. Più esattamente, per ogni $a \in I$, una primitiva di f è la funzione F_a definita ponendo:

$$(5.3) \quad F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{per ogni } x \in I.$$

*Per ovvi motivi la funzione F_a prende il nome di **funzione integrale di f di punto iniziale a** .*

Dim. Fissato arbitrariamente $x_0 \in I$, vogliamo provare che F_a è derivabile in x_0 e che risulta

$$F_a'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

e dunque che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$(5.4) \quad \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[, \quad \text{per ogni } x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}.$$

A tal fine, fissiamo $\varepsilon > 0$ ed osserviamo che, per la continuità di f in x_0 , esiste $\delta > 0$ tale che

$$(5.5) \quad f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[, \quad \text{per ogni } x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Rimane da provare che δ soddisfa la (5.4). Ebbene per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}$ si ha:

$$\begin{aligned} F_a(x) - F_a(x_0) &= \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \\ &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt, \end{aligned}$$

e quindi, per il teorema della media, esiste c_x compreso tra x ed x_0 tale che

$$(5.6) \quad \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(c_x).$$

Ora il numero c_x soddisfacente la (5.6) è compreso tra x_0 ed x e quindi (al pari di x ed x_0) appartiene all'intervallo $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$; ne segue, per la (5.5), che

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(c_x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[,$$

come volevasi.

■

Teorema 5.5 - (Teorema fondamentale del calcolo integrale o di Newton - Leibnitz).

Se $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua nell'intervallo I di $\mathbf{R}$ e G è una qualunque primitiva di f , allora per ogni $a, b \in I$ risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Dim. Infatti, per il precedente teorema di Torricelli - Barrow, la funzione integrale di f di punto iniziale a , cioè la funzione F_a definita dalla (5.3) è una primitiva di f . Di conseguenza, per la (2) della Proposizione 5.2, si ha che $G - F_a$ è una funzione costante e quindi si ha

$$G(b) - F_a(b) = G(a) - F_a(a), \quad \text{o equivalentemente} \quad G(b) - G(a) = F_a(b) - F_a(a).$$

Questo prova la tesi, poichè $F_a(b) = \int_a^b f(t) dt$ ed $F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.

■

Osservazione 5.6. - Il precedente Teorema 5.5, per quanto non sia altro che una semplice conseguenza del teorema di Torricelli - Barrow e del Teorema di Lagrange, è uno dei Teoremi più importanti della Matematica.

In sostanza esso afferma che per calcolare l'integrale di una funzione continua, non è affatto necessario andare a cercare l'unico elemento separatore tra l'insieme delle somme inferiori e l'insieme delle somme superiori; nemmeno sarà necessario andare a cercare il limite di una successione di somme di Cauchy relative ad una successione di decomposizioni $(D_n)_n$ di $[a, b]$ con $|D_n| \rightarrow 0$, (e ad una successione di scelte ad esse relative). Per calcolare l'integrale di f sarà sufficiente

- trovare una primitiva G di f ,
- calcolare i valori di G negli estremi a e b dell'intervallo di integrazione,
- calcolare la differenza $G(b) - G(a)$.

Come si vede si tratta di un risultato decisamente rivoluzionario. Esso viene abitualmente attribuito a Newton e a Leibniz, che pare siano arrivati in maniera indipendente e con diverse motivazioni alla sua scoperta, anche se la disputa sulla priorità della scoperta ha impegnato a lungo in accese discussioni con feroci accuse di plagio i seguaci e sostenitori dei due sommi scienziati.

Indubbiamente esso rappresenta un punto di svolta. Dopo la sua scoperta per calcolare le aree dei rettangoloidi, (e di conseguenza i volumi di solidi, i baricentri e diversi altri concetti fisici o geometrici) non era più necessario usare i lunghi e pesanti ragionamenti per assurdo necessari per adoperare il metodo di esaustione, e nemmeno i sottili e controversi ragionamenti del metodo degli indivisibili, perché tutto ciò che occorre fare è cercare una primitiva della funzione integranda, e per fare questo tornano molto utili tutte le risorse del Calcolo Differenziale, quali la regola di derivazione della funzione somma o della funzione prodotto o della funzione composta di due funzioni, ecc...

■

Osservazione 5.7. - Se $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua, allora sapendo trovare una primitiva di f sapremo anche calcolare l' integrale della restrizione di f a qualunque intervallo chiuso e limitato contenuto in I . Per questo motivo se si vuole cercare una primitiva di f si dice anche che si vuole calcolare l' **integrale indefinito** di f , intendendo che in questa fase gli estremi di integrazione non sono stati fissati e quindi restano "indefiniti". In una seconda fase ci serviremo di tale primitiva per calcolare per ogni $a, b \in I$ l' integrale $\int_a^b f(x) dx$, che per contrasto si dirà l' **integrale definito di f tra a e b** .

Più esattamente dicesi **integrale indefinito di f** l' insieme di tutte le sue primitive: l' integrale indefinito di f viene indicato con il simbolo

$$\int f(x) dx,$$

il che rende esplicita la circostanza che esso serve poi per calcolare gli integrali definiti

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{per ogni } a, b \in I.$$

Ovviamente trovare l' integrale indefinito di f , (cioè l' insieme di tutte le primitive di f), equivale a trovare una primitiva F di f , perchè poi, a causa delle Osservazioni 5.2 e 5.3, sarà:

$$\int f(x) dx = \{F + c : c \in \mathbf{R}\},$$

ovvero, (come in genere si preferisce scrivere):

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad \text{con } c \in \mathbf{R} \text{ arbitraria,}$$

o semplicemente

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

■

Osservazione 5.8 - Se G è una qualunque funzione di I in $\mathbf{R}$ si conviene di porre per ogni $a, b \in I$:

$$[G(x)]_a^b = G(b) - G(a) \quad \text{o anche} \quad [G(x)]_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Il teorema fondamentale del Calcolo Integrale si esprime allora attraverso la formula

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b.$$

Si osservi inoltre che il teorema di Torricelli - Barrow e il teorema fondamentale del Calcolo Integrale affermano che in un certo senso le operazioni di derivazione e di integrazione sono l'una inversa dell'altra. Più esattamente per ogni $x \in I$ si ha:

$$D\left(\int_a^x f(t) dt\right) = f(x), \quad \int_a^x Df(t) dt = f(x) - f(a).$$

■

6. - Applicazioni

Diamo ora alcuni esempi di applicazioni del concetto di integrale. Ovviamente si tratta di una lista largamente incompleta; tali esempi vengono forniti al solo scopo di indicare la via per utilizzare tale concetto nelle più svariate situazioni.

La prima applicazione è al concetto di area di una regione piana. Del resto questo problema è quello che storicamente ha dato origine all'intera teoria, come è stato diffusamente detto nel paragrafo introduttivo, ed è attraverso un approccio intuitivo alla soluzione di tale problema che abbiamo dato la definizione di funzione integrabile e di integrale.

6.1 - Area del rettangoloide

Consideriamo innanzitutto il caso in cui si voglia definire e calcolare l'area della regione piana compresa tra l'asse x e il grafico di una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, cioè dell'insieme

$$R_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [\inf(0, f(x)), \sup(0, f(x))]\},$$

che viene detto *rettangoloide di base $[a, b]$ definito da f* .

Se f è positiva, cioè se il grafico di f giace sopra l'asse x , allora, sulla base delle considerazioni sviluppate nel paragrafo introduttivo, è perfettamente ragionevole porre per definizione:

$$\text{area di } R_f = \int_a^b f(x) dx$$

Nel caso invece in cui il grafico di f giace sotto l'asse x , cioè se è $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora è altrettanto naturale ritenere che l'area del rettangoloide definito da f , cioè della regione compresa tra il grafico di f e l'asse x , coincida con l'area della regione piana ottenuta facendo ruotare R_f (e il piano (x, y) che lo contiene) di 180 gradi intorno all'asse x . Poichè tale regione non è altro che il rettangoloide di base $[a, b]$ definito da $-f = |f|$, è dunque naturale porre per definizione

$$\text{area di } R_f = \int_a^b |f(x)| dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Nel caso generale, se $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è una decomposizione di $[a, b]$, tale che f sia positiva o negativa in ciascun intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, allora è naturale assumere che l'area di R_f coincida con la somma delle aree dei rettangoloidi di base $[x_{k-1}, x_k]$ definiti da f , e quindi

$$\text{area di } R_f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

In ogni caso è dunque naturale **porre per definizione**

$$\text{area di } R_f = \int_a^b |f(x)| dx,$$

e quindi per calcolare l'area del rettangoloide R_f occorre:

- 1) calcolare l'integrale indefinito di f , cioè $\int f(x) dx = F(x) + c$,
- 2) risolvere la disequazione $f(x) \geq 0$ allo scopo di suddividere l'intervallo $[a, b]$ in sottointervalli a due a due adiacenti $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, (con $x_0 = a$ ed $x_n = b$), in cui si ha $f \geq 0$ oppure $f \leq 0$,
- 3) calcolare l'area di R_f utilizzando la proprietà additiva dell'integrale:

$$\text{area } R_f = \int_a^b |f(x)| dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| dx$$

dove per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ si ha:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| dx = \begin{cases} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = F(x_k) - F(x_{k-1}) & \text{se } f(x) \geq 0, \forall x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} -f(x) dx = F(x_{k-1}) - F(x_k) & \text{se } f(x) \leq 0, \forall x \in [x_{k-1}, x_k]. \end{cases}$$

Osservazione 6.1. - Le precedenti considerazioni ci consentono di ottenere una interessante interpretazione del concetto di integrale di una funzione continua.

Infatti se f è una funzione integrabile e positiva, allora l' integrale di f può essere interpretato come l' area del rettangoloide definito da f . Invece se f è negativa, allora $f = -|f|$ e quindi $I(f) = I(-|f|)$ è l' opposto dell' area del rettangoloide definito da f .

Se poi $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è una decomposizione di $[a, b]$, tale che f sia positiva o negativa in ciascun intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, allora $I(f)$ rappresenterà la somma delle aree delle parti di rettangoloide di f che giacciono sopra l' asse x meno la somma delle aree delle parti di rettangoloide di f che giacciono sotto l' asse x .

6.2 - Area del dominio normale

Consideriamo ora il caso che si voglia calcolare l' area di una regione che sia compresa tra i grafici di due funzioni continue f e g con $f \leq g$ e le rette di equazione $x = a$ ed $x = b$, cioè dell' insieme

$$R_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [f(x), g(x)] \}.$$

Ora se risulta $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora è naturale porre

$$\text{area di } R_{f,g} = \text{area di } R_g - \text{area di } R_f = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

Nel caso generale, poichè è naturale che l' area di una regione piana sia invariante per traslazioni, l' area della regione compresa tra il grafico di f e il grafico di g coinciderà con l'area della regione compresa tra il grafico di $f + c$ e il grafico di $g + c$. Se scegliamo la costante c in modo che risulti $0 \leq f(x) + c \leq g(x) + c$ per ogni x , (ad esempio $c = -\min_{x \in [a,b]} f(x)$), si avrà

$$\text{area di } R_{f,g} = \text{area di } R_{f+c, g+c} = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)] dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

In ogni caso è naturale dunque porre per definizione

$$\text{area di } R_{f,g} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

L'insieme $R_{f,g}$ dicesi *dominio normale all'asse x* poichè esso ha la proprietà che ogni retta perpendicolare all'asse x lo interseca in un segmento o nell'insieme vuoto. Naturalmente accanto ad esso si può considerare il dominio normale all'asse y definito dalle funzioni f e g , cioè la regione compresa tra le curve di equazioni $x = f(y)$, $x = g(y)$ e le rette di equazione $y = a$ ed $y = b$:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in [a, b], x \in [f(y), g(y)]\}.$$

L'area di tale regione sarà ancora data dall'integrale $\int_a^b [g(y) - f(y)] dy$.

Infine se una regione piana $X \subset \mathbf{R}^2$ può essere decomposta in un numero finito di domini normali all'asse x o all'asse y a due a due senza punti interni comuni, allora l'area di X sarà la somma delle aree di tali domini normali e quindi potrà essere calcolata mediante gli integrali.

6.3 - Volumi

Sia X una regione piana (identificata con una parte di $\mathbf{R}^2$) e sia c un numero reale > 0 . Allora l'insieme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in X, 0 \leq z \leq c\}$$

dicesi *cilindro retto di base X* ed altezza c .

E' abbastanza naturale definire volume di T il prodotto di c per l'area di X .

Fissiamo ora un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio tridimensionale e sia T una regione limitata compresa tra i piani di equazione $z = a$ ed $z = b$; vogliamo definire il *volume di T* .

A tal fine per ogni $\xi \in [a, b]$ sia T_ξ la sezione di T con il piano $z = \xi$ e supponiamo che siamo in grado di definire e calcolare l'area $A(\xi)$ di T_ξ ; supponiamo inoltre che la funzione $z \in [a, b] \rightarrow A(z)$ sia continua.

Se ora dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza e consideriamo il *pluricilindro* costituito dai cilindri di altezza $(b - a)/n$ e base $T_{z_1}, T_{z_2}, \dots, T_{z_n}$ (dove $z_k = a + k(b - a)/n$), allora è ragionevole assumere che il volume di tale pluricilindro, cioè il numero reale

$$\frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^n A(z_k) = \sum_{k=1}^n A(z_k)(z_k - z_{k-1}),$$

sia un valore approssimato del volume di T e che tale approssimazione sia tanto più accurata quanto maggiore è il numero n delle parti in cui abbiamo diviso l'intervallo $[a, b]$. E' pertanto naturale **porre per definizione**

$$\text{volume di } T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A(z_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_a^b A(z) dz.$$

Naturalmente si hanno definizioni simili se si considerano le sezioni di T con piani perpendicolari all'asse x o all'asse y , invece che all'asse z .

Ad esempio se T è il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x del rettangoloide di base $[a, b]$ definito da una funzione continua e positiva $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, allora per ogni $\xi \in [a, b]$ la sezione di T con il piano $x = \xi$ è un cerchio di raggio $f(\xi)$ e quindi ha area $A(\xi) = \pi f(\xi)^2$. Si ha dunque

$$\text{volume di } T = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Ad esempio la sfera di raggio r , può essere ottenuta dalla rotazione intorno all'asse x del rettangoloide di base $[-r, r]$ della funzione $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$; il suo volume sarà perciò dato da

$$\pi \int_{-r}^r f^2(x) dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - (-r)^3 + \frac{(-r)^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

6.4 - Baricentri

Se abbiamo n oggetti puntiformi di masse rispettivamente $m_1, m_2, \dots, m_n$ disposti lungo una retta rispettivamente nei punti di ascisse $x_1, x_2, \dots, x_n$ rispetto ad un fissato riferimento cartesiano, allora dicesi **baricentro** di tale sistema di masse il punto di ascissa

$$\bar{x} = (\sum_{k=1}^n x_k m_k) / (\sum_{k=1}^n m_k).$$

L'importanza del concetto di baricentro consiste nel fatto che, per esempio, il moto traslatorio di un sistema materiale di n oggetti puntiformi viene descritto studiando il moto di una particella avente la massa complessiva del sistema concentrata nel baricentro.

Se ora abbiamo non più un sistema discreto di masse puntiformi ma un filo materiale rettilineo potremo cercare ancora di studiare il moto del filo studiando il moto di un oggetto puntiforme avente la massa complessiva del filo concentrata in un punto che potremmo chiamare il baricentro del filo.

Se il filo è omogeneo, allora è naturale supporre che il baricentro sia nel punto medio del filo. Ma se il filo non è omogeneo, se per esempio la sua densità cresce mano a mano che ci si allontana da un estremo in misura proporzionale alla distanza da tale estremo, allora occorre cercare di dare una definizione ragionevole di baricentro.

Per far questo fissiamo innanzitutto un riferimento cartesiano sulla retta che contiene il filo, siano a e b le coordinate degli estremi del filo e per ogni $x \in [a, b]$ sia $\rho(x)$ la densità nel punto x . (Ad esempio $\rho(x) = \alpha(x - a)$ se la densità cresce in misura proporzionale alla distanza dall'estremo a . In generale $\rho(x)$ rappresenta il limite per $h \rightarrow 0$ del rapporto tra la massa del pezzo di filo di estremi x ed $x + h$ e la lunghezza h di tale pezzo. Si noti che se si pone $m(x)$ la massa del pezzo di filo di estremi a ed x , sarà

$$\rho(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (m(x + h) - m(x)) / h = m'(x)$$

e quindi per il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale sarà

$$\int_a^b \rho(x) dx = \int_a^b m'(x) dx = m(b) - m(a) = M = \text{massa totale del filo}.$$

Ora allo scopo di definire il baricentro supponiamo di suddividere il filo in n parti di uguale lunghezza, siano $x_0, x_1, \dots, x_n$ gli estremi di tali parti, e immaginiamo di sostituire il filo con un altro filo omogeneo a pezzi, la cui densità è costante in ciascuno dei pezzi di estremi x_{k-1} ed x_k ed è costantemente uguale alla densità nel punto medio t_k . L'intero filo potrà quindi essere sostituito con n oggetti puntiformi di massa $m_1, m_2, \dots, m_n$, concentrate nei punti $t_1, t_2, \dots, t_n$, con $m_k = \rho(t_k)(x_k - x_{k-1})$, per ogni k .

Un valore approssimato dell'ascissa del baricentro sarà allora

$$(6.1) \quad \frac{\sum_{k=1}^n t_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{\sum_{k=1}^n t_k \rho(t_k) (x_k - x_{k-1})}{\sum_{k=1}^n \rho(t_k) (x_k - x_{k-1})}.$$

Naturalmente l'approssimazione sarà tanto più accurata quanto maggiore è il numero n delle parti in cui si è diviso il filo. E' naturale dunque definire *baricentro del filo* il punto la cui ascissa è il limite per $n \rightarrow \infty$ della (6.1). Poichè la (6.1) non è altro che il rapporto tra una somma di Cauchy della funzione $x\rho(x)$ e una somma di Cauchy di $\rho(x)$, è naturale definire allora ascissa del baricentro il numero reale

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx} = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\text{massa totale del filo}}.$$

6.5 - Valore atteso e varianza di una variabile aleatoria

Consideriamo un esperimento il cui esito non sia perfettamente prevedibile ma dipenda dal caso, quale può essere il lancio di una moneta, di una coppia di dadi, ecc.. Ad ogni possibile esito dell' esperimento supponiamo di associare un numero reale x che misura per esempio la vincita associata a quel particolare esito dell' esperimento. In tal caso si dice che è stata definita una variabile aleatoria X . La variabile aleatoria si dice *discreta* se essa può assumere solo un numero finito (o numerabile) di valori, mentre si dice *continua* se può assumere tutti i valori di un intervallo limitato o illimitato di $\mathbf{R}$.

Ad esempio si consideri un' urna contenente 5 palline bianche e 3 palline nere e si faccia il seguente gioco: il giocatore A estrae una pallina dall' urna e paga 1 Euro al giocatore B se la pallina estratta è bianca, mentre vince 2 Euro se la pallina estratta è nera. In questo gioco il giocatore A ha una vincita aleatoria di -1 Euro o di +2 Euro: i valori che la variabile aleatoria può assumere sono solo due e quindi la variabile aleatoria è discreta.

Consideriamo invece il seguente esperimento: si sceglie a caso una persona per esempio dalle liste elettorali di un grande Comune e se ne misura l' altezza. Questa volta la variabile aleatoria *altezza* è una variabile continua perchè l'altezza può essere un qualunque numero compreso tra 0 e ... 3 m. Oppure consideriamo uno stock di televisori, ne estraiamo a caso uno e consideriamo il tempo di funzionamento del televisore prima che esso subisca un guasto. La variabile aleatoria *funzionamento senza guasti del televisore* è una v.a. continua perchè può essere un qualunque numero reale ≥ 0 o perlomeno un qualunque numero reale compreso tra 0 e ... 100 anni.

Consideriamo il caso di una variabile aleatoria discreta; siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ i possibili valori di tale v.a. e siano $p_1, p_2, \dots, p_n$ le rispettive probabilità. (Si noti che si tratta di numeri ≥ 0 la cui somma è 1). Nell' esempio precedente la probabilità di estrarre una pallina bianca e quindi di avere una vincita di $x_1 = -1$ Euro era $p_1 = 5/8$, mentre la probabilità di estrarre una pallina nera e quindi di avere una vincita di $x_2 = 2$ Euro era $p_2 = 3/8$. Ripetendo il gioco n volte, se n è molto grande, avremo che il giocatore A vincerà una somma pari ad Euro

$$(-1) \cdot \frac{5}{8}n + 2 \cdot \frac{3}{8}n = \frac{1}{8}n.$$

La vincita media per partita sarà allora 1/8 di Euro.

In generale il valore medio o, (come anche viene detto), il *valore atteso* o *speranza matematica* della variabile aleatoria è dato da

$$\bar{x} = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{k=1}^n x_kp_k.$$

Invece il numero

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 p_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - \bar{x}^2$$

dicesi *varianza* della v.a.; la sua radice quadrata σ dicesi *scarto quadratico medio* o *deviazione standard*. Essa misura la dispersione dei valori della v.a. rispetto al valore medio, pesati con la loro probabilità.

Vogliamo ora estendere tali concetti al caso di v.a. continue, in modo da poter definire per esempio l' altezza media di una popolazione, o la durata media di un apparecchio, ecc. Consideriamo dunque una v. a. continua e sia $[a, b]$ l' intervallo che contiene tutti i suoi possibili valori. Questa volta, per ogni $x \in [a, b]$, la probabilità che la v.a. sia proprio uguale ad x è nulla, e quindi ha senso solo prendere in considerazione la probabilità che la v.a. abbia un valore compreso in un certo intervallo. Consideriamo dunque la cosiddetta *funzione di ripartizione* o *distribuzione cumulativa*, cioè la funzione F definita ponendo per ogni $x \in [a, b]$:

$$F(x) = \text{probabilità che la v. a. abbia un valore compreso tra } a \text{ ed } x.$$

E' evidente che risulta $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, e che F è crescente. Infatti, se $x_1 < x_2$ allora $F(x_2) - F(x_1)$ rappresenta la probabilità che la v. a. abbia un valore compreso tra x_1 ed x_2 e quindi è un numero reale

≥ 0 . Inoltre, se F è derivabile, la funzione f definita ponendo

$$f(x) = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

dicesi *funzione densità di probabilità* della v.a. Ovviamente risulta

$$f(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in [a, b] \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = 1.$$

Ciò posto cerchiamo di definire il valore medio e la varianza della v.a. A tal fine dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti di uguali lunghezza, siano $x_0, x_1, \dots, x_n$ gli estremi di tali intervalli, e per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ sia p_k la probabilità che il valore della v.a. sia compreso tra x_{k-1} e x_k , cioè $p_k = F(x_k) - F(x_{k-1})$. Allora, per il teorema di Lagrange, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ esiste $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tale che

$$p_k = F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Ebbene, approssimiamo la v.a. continua con una v.a. discreta i cui unici valori sono $t_1, t_2, \dots, t_n$ con probabilità $p_1, p_2, \dots, p_n$. Il valore atteso e la varianza della v.a. saranno dunque approssimativamente

$$(6.2) \quad \sum_{k=1}^n t_k p_k = \sum_{k=1}^n t_k f(t_k)(x_k - x_{k-1}),$$

$$(6.3) \quad \sum_{k=1}^n t_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^n t_k p_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n t_k^2 f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - \left(\sum_{k=1}^n t_k f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \right)^2.$$

Naturalmente l'approssimazione sarà tanto più accurata quanto maggiore è il numero n delle parti in cui si è diviso l'intervallo $[a, b]$. E' naturale dunque definire *valore atteso e varianza* della v.a. i limiti per $n \rightarrow \infty$ dei valori approssimati dati dalle (6.2) e (6.3). Poichè la (6.2) e la (6.3) contengono delle somme di Cauchy, è naturale definire *valore atteso e varianza* della v.a.

$$\bar{x} = \int_a^b x f(x) dx, \quad \sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \bar{x}^2.$$

(Si noti che dal fatto che $\int_a^b f(x) dx = 1$ ed $\int_a^b x f(x) dx = \bar{x}$ segue facilmente che

$$\int_a^b (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 f(x) dx - \bar{x}^2 = \sigma^2).$$

6.6 - Costo, ricavo e profitto di un' impresa monopolista

Consideriamo un' impresa monopolista che deve fissare il prezzo del bene da essa prodotto lungo l' arco di tempo $[0, T]$, dove T rappresenta l'orizzonte di pianificazione. Sia $p(t)$ il prezzo del bene all' istante t e $q(t)$ l' intensità della domanda all' istante t (cioè approssimativamente la quantità di merce prodotta e venduta nell'unità di tempo). (Naturalmente $q(t)$ dipende dal prezzo $p(t)$ e magari dalla rapidità $p'(t)$ con cui il prezzo varia. Ad esempio si potrebbe ipotizzare che il legame tra q , p e p' sia del tipo $q(t) = a - bp(t) - cp'(t)$). Sia poi $C = C(q)$ la funzione che descrive il costo di produzione (nell'unità di tempo) in funzione dell'intensità di domanda. (Ad esempio $C(q) = c_0 + c_1 q$, dove c_0 rappresenta il costo fisso per unità di tempo e c_1 il costo di produzione unitario per unità di tempo).

Si vuole valutare il costo, il ricavo e il profitto che complessivamente si riuscirà ad ottenere nell' intervallo di tempo $[0, T]$, in modo (ad esempio) da scegliere la politica dei prezzi più conveniente.

A tale scopo supponiamo di dividere l'intervallo $[0, T]$ in n parti uguali, poniamo $t_k = kT/n$ per ogni $k = 0, 1, 2, \dots, n$ e sostituiamo la funzione $p = p(t)$ con la funzione che è costantemente uguale a $p(t_k)$ per ogni $t \in]t_{k-1}, t_k]$; di conseguenza $q(t)$ sarà costantemente uguale a $q(t_k)$ per ogni t nello stesso intervallo. La quantità di merce prodotta e venduta nell'intervallo di tempo $[t_{k-1}, t_k]$ sarà allora approssimativamente $q(t_k)(t_k - t_{k-1})$ e quindi il costo e il ricavo nell'intervallo di tempo $[t_{k-1}, t_k]$ saranno rispettivamente $C(q(t_k))(t_k - t_{k-1})$ e $p(t_k)q(t_k)(t_k - t_{k-1})$. Il costo complessivo e il ricavo complessivo su tutto l'intervallo $[0, T]$ saranno allora approssimativamente

$$(6.4) \quad \sum_{k=1}^n C(q(t_k))(t_k - t_{k-1}) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n p(t_k)q(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Invece il profitto complessivo sarà approssimativamente

$$(6.5) \quad \sum_{k=1}^n [p(t_k)q(t_k) - C(q(t_k))](t_k - t_{k-1}).$$

Naturalmente l'errore di tale approssimazione è tanto minore quanto più è grande n e quindi è naturale definire *costo*, *ricavo* e *profitto* i limiti per $n \rightarrow \infty$ delle quantità rappresentate nella (6.4) e nella (6.5), cioè rispettivamente gli integrali

$$\int_0^T C(q(t)) dt, \quad \int_0^T p(t)q(t) dt, \quad \int_0^T [p(t)q(t) - C(q(t))] dt.$$

INTEGRALI INDEFINITI

Ricordiamo che dicesi **primitiva** di una funzione continua $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una qualunque funzione derivabile $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $F' = f$ e che l'insieme delle primitive di f dicesi **integrale indefinito** di f e si denota con il simbolo

$$\int f(x) dx.$$

Ricordiamo altresí le seguenti **Proprietà delle primitive**:

- (1) se F é primitiva di f , allora $F + c$ è primitiva di f per ogni $c \in \mathbf{R}$;
- (2) se F e G sono primitive di f , allora $F - G$ è costante;
- (3) se F é primitiva di f , allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni della forma $F + c$ con $c \in \mathbf{R}$.

Ne segue che trovare l'integrale indefinito di f equivale a trovare una primitiva F di f , poichè tutte le altre sono del tipo $F + c$; si scrive allora

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Ovviamente il nome di **integrale indefinito** deriva dal fatto che conoscendo una primitiva F di f si potrà immediatamente ottenere l'integrale definito di f tra due punti qualunque a e b di I calcolando la differenza tra $F(b)$ ed $F(a)$.

■

1 . - Integrali indefiniti immediati.

Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari si deduce che

$$\begin{array}{ll} \int 0 dx = c, & \int dx = x + c, \\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad \forall n \neq 1 \\ \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c, & \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \forall \alpha \neq -1; \\ \int e^x dx = e^x + c, & \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \\ \int \cos x dx = \sin x + c, & \int \sin x dx = -\cos x + c \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c, & \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c \end{array}$$

2 . - Metodo di integrazione per scomposizione

In questo e nei paragrafi seguenti mostreremo come dalle regole di derivazione della funzione somma, della funzione prodotto e della funzione composta di due funzioni derivabili si deducono facilmente delle regole per calcolare l'integrale indefinito di una funzione.

Proposizione 2.1. *Se f e g sono funzioni continue nell'intervallo I ed α, β sono numeri reali, allora:*

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$$

nel senso che se F è primitiva di f e G è primitiva di g , allora $\alpha F + \beta G$ è primitiva di $\alpha f + \beta g$.

Infatti $\alpha F + \beta G$ è derivabile in I e risulta $D(\alpha F + \beta G) = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$.

Ad esempio risulta:

$$\begin{aligned} \int (x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3) dx &= \int x^4 dx - 3 \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx - \int x dx + 3 \int dx = \\ &= x^5/5 - 3(x^4/4) + 2(x^3/3) - (x^2/2) + 3x + c, \end{aligned}$$

$$\int (2x^3 - 5 \cos(x)) dx = 2 \int x^3 dx - 5 \int \cos(x) dx = 2(x^4/4) - 5 \sin(x) + c = (x^4/2) - 5 \sin(x) + c,$$

$$\int \left(3e^x + \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{4}{x} \right) dx = 3 \int e^x dx - \int -\frac{1}{\sin^2(x)} dx - 4 \int \frac{1}{x} dx = 3e^x - \cotg(x) - 4 \log|x| + c.$$

■

3 . - Metodo di integrazione per parti

Dalla regola di derivazione della funzione prodotto di due funzioni derivabili si deduce un metodo per calcolare l'integrale indefinito del prodotto di due funzioni $\int f(x) \cdot g(x) dx$. Si ha infatti la seguente

Proposizione 3.1. *Se F e G sono funzioni derivabili con derivate continue nell'intervallo I , allora risulta:*

$$\int F(x) \cdot G'(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F'(x) \cdot G(x) dx.$$

Quest'ultima relazione prende il nome di **formula di integrazione per parti**; F dicesi **fattore finito**, mentre G' dicesi **fattore differenziale**.

Infatti, dalla regola di derivazione della funzione prodotto $D(F \cdot G) = F' \cdot G + F \cdot G'$ e dalla formula di integrazione per scomposizione, si deduce che

$$\begin{aligned} \int F(x) \cdot G'(x) dx &= \int (D(F \cdot G)(x) - F'(x) \cdot G(x)) dx = \\ &= \int D(F \cdot G)(x) dx - \int F'(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F'(x) \cdot G(x) dx. \end{aligned}$$

■

In pratica, per calcolare l'integrale indefinito del prodotto di due funzioni, occorre:

- (1) scegliere quale dei due fattori è il fattore finito, (cioè la funzione f di cui è facile calcolare la derivata), e quale è invece il fattore differenziale g , (cioè il fattore di cui è facile trovare una primitiva G),
- (2) calcolare la derivata f' del fattore finito e la primitiva G del fattore differenziale g .

Si ha allora

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) \cdot DG(x) dx = f(x)G(x) - \int G(x) \cdot f'(x) dx.$$

Naturalmente il procedimento è efficace se l'integrale $\int G(x) \cdot f'(x) dx$ è facile da calcolare o perlomeno più facile dell'integrale iniziale.

■

Ad esempio, si ha:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int x^2 D e^x dx = x^2 e^x - \int e^x D(x^2) dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x D e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x D x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x) dx &= \int x^2 D \sin(x) dx = x^2 \sin(x) - \int \sin(x) D(x^2) dx = x^2 \sin(x) - 2 \int x \sin(x) dx = \\ &= x^2 \sin(x) + 2 \int x D \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \int \cos(x) D x dx = \\ &= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \int \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \log(x) dx &= \int \log(x) \cdot D(x^3/3) dx = (x^3/3) \log(x) - \int (x^3/3) D \log(x) dx = \\ &= (x^3/3) \log(x) - \int (x^3/3) \cdot (1/x) dx = (x^3/3) \log(x) - (1/3) \int x^2 dx = \\ &= (x^3/3) \log(x) - (x^3/9) + c. \end{aligned}$$

■

4 . - Prima formula di integrazione per sostituzione

Dalla regola di derivazione della funzione composta si deduce la seguente

Proposizione 4.1. *Sia f una funzione derivabile con derivata continua in un intervallo $I \subseteq \mathbf{R}$ e sia g una funzione continua in un intervallo $J \subseteq \mathbf{R}$ tale che $Im(f) \subseteq J$.*

Se G è una primitiva di g , allora $G \circ f$ è una primitiva della funzione $x \in I \rightarrow g(f(x)) \cdot f'(x)$.

Infatti $G \circ f$ è derivabile e per ogni $x \in I$ risulta: $D(G \circ f)(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$.

■

In pratica, per calcolare un integrale indefinito della forma $\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$, basta:

- (1) porre $y = f(x)$,
- (2) sostituire $f(x)$ con y ed $f'(x) dx$ con dy ,
- (3) calcolare l'integrale $\int g(y) dy = G(y) + c$,
- (4) sostituire y con $f(x)$ ed ottenere $\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + c$.

L'intero processo può essere sintetizzato nella formula

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \left(\int g(y) dy \right)_{y=f(x)};$$

che viene detta la **prima formula di integrazione per sostituzione**.

■

Ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} \int e^{\sin(x)} \cos(x) dx &= \quad (\text{posto } y = \sin(x), \text{ e } dy = D \sin(x) dx = \cos(x) dx) \\ &= \int e^y dy = e^y + c = e^{\sin(x)} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\log^2(x) - 3 \log(x) + 2}{x} dx &= \int (\log^2(x) - 3 \log(x) + 2) \cdot (1/x) dx = \\ &\quad (\text{posto } y = \log(x) \text{ e } dy = D \log(x) dx = (1/x) dx) \\ &= \int (y^2 - 3y + 2) dy = y^3/3 - 3y^2/2 + 2y + c = \\ &= (1/3) \log^3(x) - (3/2) \log^2(x) + 2 \log(x) + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx &= \frac{1}{\log 2} \int \frac{1}{\sqrt{1-4^x}} \cdot 2^x \log 2 dx = \\ &\quad (\text{posto } y = 2^x \text{ e } dy = D 2^x dx = 2^x \log 2 dx) \\ &= \frac{1}{\log 2} \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{\log 2} \arcsin(y) + c = \frac{1}{\log 2} \arcsin(2^x) + c \end{aligned}$$

■

5 . - Seconda formula di integrazione per sostituzione

Vediamo ora come fare a calcolare un integrale indefinito del tipo

$$\int g(f(x)) dx,$$

dove f è una funzione invertibile tale che f ed f^{-1} sono funzioni derivabili con derivate continue.

Infatti, essendo $f^{-1}(f(x)) = x$ per ogni $x \in \text{Dom}(f)$, dal teorema sulla derivata della funzione composta si deduce che

$$1 = Dx = D(f^{-1} \circ f)(x) = D(f^{-1})(f(x)) \cdot f'(x) \quad \text{per ogni } x \in \text{Dom}(f);$$

ne segue che

$$\begin{aligned} \int g(f(x)) dx &= \int g(f(x)) \cdot D(f^{-1})(f(x)) \cdot f'(x) dx = \quad (\text{posto } y = f(x) \text{ e } dy = f'(x) dx) \\ &= \int g(y) \cdot Df^{-1}(y) dy = H(y) + c = H(f(x)) + c. \end{aligned}$$

■

In pratica, per calcolare un integrale indefinito della forma $\int g(f(x)) dx$, basta:

- (1) porre $y = f(x)$,
- (2) trovare la funzione inversa f^{-1} di f , cioè ricavare x in funzione di y ,
- (3) calcolare la derivata di f^{-1} , cioè la derivata di x rispetto ad y ,
- (4) sostituire $f(x)$ con y ed dx con $Df^{-1}(y) dy = \frac{dx}{dy} dy$,
- (5) calcolare l'integrale $\int g(y) \cdot \frac{dx}{dy} dy = H(y) + c$,
- (6) sostituire y con $f(x)$ ed ottenere $\int g(f(x)) dx = H(f(x)) + c$.

L'intero processo può essere sintetizzato nella formula

$$\int g(f(x)) dx = \left(\int g(y) \cdot \frac{dx}{dy} dy \right)_{y=f(x)},$$

che prende il nome di **seconda formula di integrazione per sostituzione**.

■

Ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} \int \cos(ax + b) dx &= \quad (\text{posto } y = ax + b, \quad x = (y - b)/a, \quad dx = D((y - b)/a) dy = (1/a) dy), \\ &= \int \cos y (1/a) dy = (1/a) \sin(y) + c = (1/a) \sin(ax + b) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x-1} dx &= \quad (\text{posto } y = \sqrt{x-1}, \quad x = y^2 + 1, \quad dx = D(y^2 + 1) dx = 2y dy), \\ &= \int (y^2 + 1) \cdot y \cdot 2y dy = \int (2y^4 + 2y^2) dy = 2y^5/5 + 2y^3/3 + c = \\ &= (2/5)(\sqrt{x-1})^5 + (2/3)(\sqrt{x-1})^3 + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (4^x - 2^x + 2) dx &= \quad (\text{posto } y = 2^x, \quad x = \log_2(y), \quad dx = D(\log_2(y)) dy = \frac{1}{y \log(2)} dy), \\ &= \int (y^2 - y + 2) \cdot \frac{1}{y \log(2)} dy = \frac{1}{\log(2)} \int (y - 1 + \frac{2}{y}) dy = \\ &= \frac{1}{\log(2)} (y^2/2 - y + 2 \log y) + c = \frac{1}{2 \log(2)} (4^x - 2 \cdot 2^x + 4 \log(2^x)) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \log^2(x) dx &= \quad (\text{posto } y = \log(x), \quad x = e^y, \quad dx = D(e^y) dy = e^y dy), \\ &= \int y^2 e^y dy = \quad (\text{dopo due integrazioni per parti}) \\ &= e^y (y^2 - 2y + 2) + c = x(\log^2(x) - 2 \log(x) + 2) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x - 1} dx &= \quad (\text{posto } y = e^x - 1, \quad x = \log(y + 1), \quad dx = D(\log(y + 1)) dy = \frac{1}{y + 1} dy), \\ &= \int \sqrt{y} \cdot \frac{1}{y + 1} dy = \quad (\text{posto } z = \sqrt{y}, \quad y = z^2, \quad dy = D(z^2) dz = 2z dz), \\ &= \int \frac{z}{z^2 + 1} \cdot 2z dz = 2 \int \frac{z^2}{z^2 + 1} dz = 2 \int \left(1 - \frac{1}{z^2 + 1} \right) dz \\ &= 2(z - \operatorname{arctg}(z)) + c = 2(\sqrt{y} - \operatorname{arctg}(\sqrt{y})) + c = \\ &= 2(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x - 1})) + c \end{aligned}$$

■

6 . - Integrale delle funzioni $\log(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$ e delle funzioni circolari inverse

Dalla formula di integrazione per parti si ricava che:

$$\begin{aligned}\int \log(x) dx &= \int \log(x) \cdot Dx dx = x \log(x) - \int x \cdot D \log(x) dx = \\ &= x \log(x) - \int dx = x \log(x) - x + c = x(\log(x) - 1) + c,\end{aligned}$$

D'altra parte, dalla prima formula di integrazione per sostituzione si deduce in particolare che

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left(\text{posto } y = f(x) \text{ e } dy = f'(x)dx \right) = \int \frac{1}{y} dy = \log(|y|) + c = \log(|f(x)|) + c.$$

Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cotg}(x) dx &= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \int \frac{D \sin(x)}{\sin(x)} dx = \log(|\sin(x)|) + c, \\ \int \operatorname{tg}(x) dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{D \cos(x)}{\cos(x)} dx = -\log(|\cos(x)|) + c, \\ \int \frac{1}{ax+b} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{D(ax+b)}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log(|ax+b|) + c, \\ \int \frac{x}{ax^2+b} dx &= \frac{1}{2a} \int \frac{2ax}{ax^2+b} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{D(ax^2+b)}{ax^2+b} dx = \frac{1}{2a} \log(|ax^2+b|) + c.\end{aligned}$$

■

Combinando quest'ultima relazione con la formula di integrazione per parti, si ricava che:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg}(x) dx &= \int \operatorname{arctg}(x) \cdot Dx dx = x \operatorname{arctg}(x) - \int x \cdot D \operatorname{arctg}(x) dx = \\ &= x \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c, \\ \int \operatorname{arccotg}(x) dx &= \int \operatorname{arccotg}(x) \cdot Dx dx = x \operatorname{arccotg}(x) - \int x \cdot D \operatorname{arccotg}(x) dx = \\ &= x \operatorname{arccotg}(x) + \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arccotg}(x) + \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c,\end{aligned}$$

■

Infine si ha

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsen}(x) dx &= \int \operatorname{arcsen}(x) \cdot Dx dx = x \operatorname{arcsen}(x) - \int x \cdot D \operatorname{arcsen}(x) dx = \\ &= x \operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \quad (\text{posto } y = 1-x^2 \text{ e } dy = -2x dx) \\ &= x \operatorname{arcsen}(x) + \int \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = x \operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{y} + c = x \operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

In maniera analoga si vede che

$$\int \operatorname{arccos}(x) dx = x \operatorname{arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + c.$$

■

7 . - Integrale indefinito delle funzioni razionali

Vediamo ora come fare a trovare un integrale indefinito del tipo $\int (f(x)/g(x)) dx$ con f e g polinomi.

A tal fine cominciamo con l'osservare che se il grado del numeratore f é maggiore o uguale al grado del denominatore g , allora effettuando la divisione dei polinomi si trovano un polinomio quoziente q ed un polinomio resto r tali che $f = gq + r$ e $\text{grado}(r) < \text{grado}(g)$. Di conseguenza sarà

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \left(q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \right) dx = \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx.$$

Il primo integrale si calcola in maniera semplicissima, e quindi rimane da calcolare l'integrale di una funzione razionale in cui il grado del numeratore é minore del grado del denominatore.

Ad esempio dividendo il polinomio $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 - x$ per il polinomio $g(x) = x^2 - x + 2$ si ottiene il polinomio quoziente $q(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ ed un polinomio resto $r(x) = -5x + 4$. Si ha dunque

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 - x^2 - x}{x^2 - x + 2} dx = \int \left(x^3 + x^2 + x - 2 + \frac{-5x + 4}{x^2 - x + 2} \right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - \int \frac{5x - 4}{x^2 - x + 2} dx$$

■

Vediamo dunque come fare a calcolare l'integrale di una funzione razionale in cui il grado del numeratore f é minore del grado del denominatore g .

Procederemo gradualmente trattando dapprima i casi piú semplici per arrivare poi al caso piú generale; inoltre illustreremo i vari casi con degli esempi, in modo da illustrare le varie metodologie, piuttosto che indicare delle formule da ricordare a memoria.

Caso 1:

$$\int \frac{1}{ax + b} dx, \quad \text{ad esempio} \quad \int \frac{1}{2x + 3} dx.$$

Posto $y = 2x + 3$, $x = (y - 3)/2$, $dx = (1/2)dy$, si ha

$$\int \frac{1}{2x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \log(|y|) + c = \frac{1}{2} \log|2x + 3| + c.$$

■

Caso 2:

$$\int \frac{1}{(ax + b)^n} dx, \quad \text{ad esempio} \quad \int \frac{1}{(2x + 3)^2} dx \quad \text{o} \quad \int \frac{1}{(2x + 3)^3} dx.$$

Posto $y = 2x + 3$, $x = (y - 3)/2$, $dx = (1/2)dy$, si ha

$$\int \frac{1}{(2x + 3)^2} dx = \frac{1}{2} \int y^{-2} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{2(2x + 3)} + c.$$

$$\int \frac{1}{(2x + 3)^3} dx = \frac{1}{2} \int y^{-3} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4(2x + 3)^2} + c.$$

■

Caso 3:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx \quad \text{con} \quad \Delta = p^2 - 4q = 0, \quad \text{ad esempio} \quad \int \frac{3x-4}{x^2-4x+4} dx.$$

Il polinomio al denominatore ha una radice reale doppia; nel caso dell'esempio si ha $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Posto $y = x - 2$, $x = y + 2$, $dx = dy$, si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{x^2-4x+4} dx &= \int \frac{3x-4}{(x-2)^2} dx = \int \frac{3y+6-4}{y^2} dy = 3 \int \frac{1}{y} dy + 2 \int \frac{1}{y^2} dy = \\ &= 3 \log(|y|) - \frac{2}{y} + c = 3 \log|x-2| - \frac{2}{x-2} + c. \end{aligned}$$

■

Caso 4:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx \quad \text{con} \quad \Delta = p^2 - 4q > 0, \quad \text{ad esempio} \quad \int \frac{3x-2}{x^2-3x-4} dx.$$

In questo caso il polinomio al denominatore ha due radici reali e distinte x_1 ed x_2 ; nel caso dell'esempio, l'equazione $x^2 - 3x - 4 = 0$ ha le radici $x_1 = -1$ ed $x_2 = 4$ e quindi si ha $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$.

Il problema viene allora risolto cercando due costanti A e B tali che

$$\frac{3x-2}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{(A+B)x - 4A + B}{(x+1)(x-4)};$$

occorre dunque che risulti $\begin{cases} A+B = 3 \\ -4A+B = -2 \end{cases}$; la soluzione di tale sistema é $A = 1$, $B = 2$.

Si ha dunque

$$\int \frac{3x-2}{x^2-3x-4} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-4} \right) dx = \log|x+1| + 2 \log|x-4| + c.$$

■

Caso 5:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+q} dx \quad \text{con} \quad q > 0, \quad \text{ad esempio} \quad \int \frac{3x+4}{x^2+5} dx.$$

Si ha

$$\int \frac{3x+4}{x^2+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+5} dx + \frac{4}{5} \int \frac{1}{1+(x/\sqrt{5})^2} dx;$$

d'altra parte, posto $y = x^2 + 5$, $dy = 2x dx$ e $z = x/\sqrt{5}$, $x = z\sqrt{5}$, $dx = \sqrt{5} dz$, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2+5} dx &= \int \frac{1}{y} dy = \log|y| + c = \log(x^2+5) + c, \\ \int \frac{1}{1+(x/\sqrt{5})^2} dx &= \sqrt{5} \int \frac{1}{1+z^2} dz = \sqrt{5} \operatorname{arctg} z + c = \sqrt{5} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{5}) + c. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\int \frac{3x+4}{x^2+5} dx = \frac{3}{2} \log(x^2+5) + \frac{4\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + c$$

■

Caso 6:

$$\int \frac{ax+b}{mx^2+px+q} dx \quad \text{con } \Delta = p^2 - 4mq < 0, \text{ ad esempio } \int \frac{3x+4}{x^2+6x+11} dx.$$

L'integrale viene calcolato cercando di trasformare il denominatore nella forma $y^2 + q'$, in modo da potersi ricondurre al caso 5. Si ha infatti $x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 11 = (x+3)^2 + 2$; pertanto, posto $x+3 = y$, $x = y-3$, $dx = dy$, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{x^2+6x+11} dx &= \int \frac{3(y-3)+4}{y^2+2} dy = \int \frac{3y-5}{y^2+2} dy = \frac{3}{2} \int \frac{2y}{y^2+2} dy - \frac{5}{2} \int \frac{1}{1+(y/\sqrt{2})^2} dy = \\ &= \frac{3}{2} \log(y^2+2) - \frac{5\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(y/\sqrt{2}) + c = \\ &= \frac{3}{2} \log(x^2+6x+11) - \frac{5\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}((x+3)/\sqrt{2}) + c. \end{aligned}$$

Si noti che se i coefficienti del denominatore, m , p e q , sono numeri interi, può essere utile moltiplicare numeratore e denominatore per $4m$, in modo che il denominatore possa essere più facilmente rappresentato nella forma $y^2 + q'$. Si ha infatti:

$$4m^2x^2 + 4mpx + 4mq = 4m^2x^2 + 4mpx + p^2 - p^2 + 4mq = (2mx+p)^2 - (p^2 - 4mq) = (2mx+p)^2 - \Delta.$$

Ad esempio si ha:

$$\int \frac{x-2}{2x^2-3x+2} dx = \int \frac{8x-16}{16x^2-24x+16} dx = \int \frac{8x-16}{16x^2-24x+9-9+16} dx = \int \frac{8x-16}{(4x-3)^2+7} dx;$$

posto $y = 4x-3$, $x = (y+3)/4$, $dx = (1/4)dy$, l'integrale viene trasformato nell'integrale

$$\begin{aligned} \int \frac{2(y+3)-16}{y^2+7} \cdot \frac{1}{4} dy &= \frac{1}{4} \int \frac{2y}{y^2+7} dy - \frac{5}{14} \int \frac{1}{1+(y/\sqrt{7})^2} dy = \\ &= \frac{1}{4} \log(y^2+7) - \frac{5\sqrt{7}}{14} \operatorname{arctg}(y/\sqrt{7}) + c = \\ &= \frac{1}{4} \log((4x-3)^2+7) - \frac{5\sqrt{7}}{14} \operatorname{arctg}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{7}}\right) + c. \end{aligned}$$

■

Caso 7: il numeratore $f(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale a 2 e il denominatore $g(x)$ è un polinomio di terzo grado.

Dividendo numeratore e denominatore per il coefficiente del termine x^3 , possiamo fare in modo che tale coefficiente sia uguale ad 1. Si hanno allora le alternative:

- a) $g(x)$ ha tre radici reali e distinte x_1, x_2, x_3 e quindi $g(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$;
- b) $g(x)$ ha due radici reali e distinte, (x_1 doppia ed x_2 semplice), e quindi $g(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)$;
- c) $g(x)$ ha una radice tripla x_0 e quindi $g(x) = (x-x_0)^3$;
- d) $g(x)$ ha una radice reale x_1 e due radici complesse e coniugate e quindi $g(x) = (x-x_1)(x^2+px+q)$.

In questo caso si cercano tre costanti A, B, C tali che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} & \text{nel caso a),} \\ \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_2} & \text{nel caso b),} \\ \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3} & \text{nel caso c),} \\ \frac{A}{x-x_1} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q} & \text{nel caso d).} \end{cases}$$

Riducendo allo stesso denominatore le frazioni a secondo membro, si ottiene al denominatore il polinomio g ed al numeratore un polinomio di secondo grado i cui coefficienti dipendono dalle incognite A, B e C . Imponendo che i coefficienti del numeratore a secondo membro coincidano con i coefficienti di f , si ottiene un sistema di tre equazioni in tre incognite A, B e C .

Risolvendo tale sistema, si trovano le costanti A, B e C ; una volta trovate tali costanti, l'integrale di f/g verrà trasformato nella somma di integrali dei tipi precedenti.

Ad esempio per calcolare l'integrale

$$\int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = \int \frac{x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx,$$

cerchiamo tre costanti A, B e C tali che

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \\ &= \frac{A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \\ &= \frac{A(x^2 + 3x + 2) + B(x^2 + x - 2) + C(x^2 - 1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (3A+B)x + (2A-2B-C)}{(x-1)(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Deve aversi dunque

$$\begin{cases} A+B+C &= 1 \\ 3A+B &= 3 \\ 2A-2B-C &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=3-3A \\ C=1-A-B=1-A-3+3A \\ 2A-6+6A-2A+2=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=3-3A \\ C=2A-2 \\ 6A=3 \end{cases}$$

Si ha dunque $A = 1/2$, $B = 3 - 3/2 = 3/2$, $C = -1$ e quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx &= \int \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{3/2}{x+1} + \frac{-1}{x+2} \right) dx = \\ &= (1/2) \log |x-1| + (3/2) \log |x+1| - \log |x+2| + c. \end{aligned}$$

Il procedimento è simile se si presenta uno dei casi b), c) o d).

■

Caso 8: g è un polinomio di grado $n > 3$ con radici reali eventualmente multiple e/o radici complesse coniugate semplici.

Si estende il ragionamento descritto nel caso 7: dopo aver scomposto $g(x)$ in fattori di primo grado (eventualmente multipli) ed in fattori di secondo grado con discriminante negativo, si scompone la funzione $f(x)/g(x)$ in somma di un numero finito di “fratti semplici”, cioè di funzioni del tipo descritto nei Casi 1, 2 o 6.

Ad esempio dovendo calcolare l'integrale indefinito delle funzioni

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{(x-1)(x+1)^3}, \quad \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x-1)^3(x^2 - 2x + 5)}, \quad \frac{x^2 + 3x}{(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 5)}, \quad \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^2(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 5)}$$

si cercano delle costanti $A_1, A_2, \dots$, tali che (rispettivamente)

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{A_3}{(x+1)^2} + \frac{A_4}{(x+1)^3} \\ \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x-1)^3(x^2 - 2x + 5)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_4x + A_5}{x^2 - 2x + 5} \\ \frac{x^2 + 3x}{(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 5)} &= \frac{A_1x + A_2}{x^2 + 4} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 - 2x + 5} \\ \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^2(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 5)} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + 4} + \frac{A_5x + A_6}{x^2 - 2x + 5}.\end{aligned}$$

Tali costanti vengono trovate riducendo il secondo membro delle precedenti uguaglianze ad un'unica frazione e risolvendo il sistema lineare di n equazioni in n incognite ottenuto uguagliando i coefficienti del numeratore di tale frazione con i coefficienti del numeratore del primo membro delle stesse uguaglianze.

Una volta trovate tali costanti, il calcolo dell'integrale viene ricondotto al calcolo di integrali studiati ai casi 1, 2 e 6.

I dettagli sono omessi per semplicità.

■

Caso 9: g è un polinomio di grado $n > 3$ con radici complesse coniugate multiple.

In questo caso, dopo avere scomposto g in fattori di primo e/o secondo grado irriducibili, (cioè con discriminante minore di 0), eventualmente multipli, si adopera la cosiddetta **formula di Hermite** che consiste nello scrivere la funzione razionale $f(x)/g(x)$ come somma dei seguenti addendi:

- (1) tante funzioni della forma $A_i/(x - \alpha_i)$, con A_i incognita, quante sono le radici reali distinte di g , indipendentemente dalla loro molteplicità,
- (2) tante funzioni della forma $(A_ix + A_{i+1})/(x^2 + p_ix + q_i)$, (con A_i e A_{i+1} incognite, quante sono le coppie di radici complesse coniugate distinte di g , indipendentemente dalla loro molteplicità,
- (3) la derivata di una funzione razionale p/q il cui denominatore q è il prodotto dei fattori di primo e secondo grado di g ciascuno con l'esponente diminuito di 1 e il cui numeratore p è un polinomio incognito di grado uguale al grado di q meno 1.

Ad esempio:

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - x^2 + 3}{(x-1)^3 \cdot (x^2 - 2x + 5)^2} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 - 2x + 5} + \frac{d}{dx} \left(\frac{A_4 + A_5x + A_6x^2 + A_7x^3}{(x-1)^2(x^2 - 2x + 5)} \right) \\ \frac{x^3 - 1}{(x+2)^2(x^2 - 3x + 7)^3} &= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 - 3x + 7} + \frac{d}{dx} \left(\frac{A_4 + A_5x + A_6x^2 + A_7x^3 + A_8x^4}{(x+2)(x^2 - 3x + 7)^2} \right) \\ \frac{x^3 + 2x - 1}{(x+2)(x^2 + 4)^2(x^2 - 3x + 7)} &= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 + 4} + \frac{A_4x + A_5}{x^2 - 3x + 7} + \frac{d}{dx} \left(\frac{A_6 + A_7x}{x^2 + 4} \right).\end{aligned}$$

Nota bene: le incognite da trovare devono essere in numero n uguale al grado di g .

■

Una volta scritta la funzione f/g nella forma suddetta, si calcola la derivata di p/q , si effettuano le dovute semplificazioni, si riduce il secondo membro ad un'unica frazione e si ottiene una funzione razionale il cui denominatore è esattamente g mentre il numeratore è un polinomio di grado $n - 1$ con coefficienti dipendenti dalle incognite $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Ne segue che il numeratore del secondo membro deve essere uguale al numeratore f del primo membro, e quindi che i coefficienti del numeratore del secondo membro devono essere ordinatamente uguali ai coefficienti di f . Si ottiene così un sistema lineare di n equazioni in n incognite, da cui si ricavano le incognite $A_1, A_2, \dots, A_n$.

A questo punto siamo in grado di calcolare l'integrale di f/g come somma degli integrali dei diversi addendi descritti ai punti (1), (2) e (3):

- gli integrali degli addendi del tipo indicati al punto (1) sono evidentemente dati da $A_i \log(|x - \alpha_i|)$,
- gli integrali del tipo descritti al punto (2) si calcolano nella maniera descritta nel Caso 6,
- una primitiva della funzione descritta al punto (3) é semplicemente p/q .

■

A titolo di esempio calcoliamo l'integrale indefinito della funzione $\frac{x^4 - x^2 + 3}{(x+1)^3 \cdot (x^2+4)^2}$.

In tal caso si devono cercare 7 = grado(g) incognite, $A_1, A_2, \dots, A_7$ tali che

$$(7.1) \quad \frac{x^4 - x^2 + 3}{(x+1)^3 \cdot (x^2+4)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2x + A_3}{x^2+4} + D\left(\frac{A_4x^3 + A_5x^2 + A_6x + A_7}{(x+1)^2(x^2+4)}\right).$$

Se riusciamo a trovare i valori delle incognite $A_1, A_2, \dots, A_7$ soddisfacenti la (7.1), potremo concludere che

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 3}{(x+1)^3 \cdot (x^2+4)^2} dx = \int \frac{A_1}{x+1} dx + \int \frac{A_2x + A_3}{x^2+4} dx + \int D\left(\frac{A_4x^3 + A_5x^2 + A_6x + A_7}{(x+1)^2(x^2+4)}\right) dx.$$

Il primo integrale é $A_1 \log|x+1|$; l'ultimo integrale é semplicemente $\frac{A_4x^3 + A_5x^2 + A_6x + A_7}{(x+1)^2(x^2+4)}$.

Infine il secondo integrale é uguale a

$$\frac{A_2}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 2x + 5} dx + A_3 \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{A_2}{2} \log(x^2 + 4) + \frac{A_3}{2} \operatorname{arctg}(x/2)$$

e dunque potremo concludere che

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^2 + 3}{(x+1)^3 \cdot (x^2+4)^2} dx &= A_1 \log(|x+1|) + \frac{A_2}{2} \log(x^2+4) + \\ &+ \frac{A_2}{2} \operatorname{arctg}(x/2) + \frac{A_4x^3 + A_5x^2 + A_6x + A_7}{(x+1)^2(x^2+4)} + c. \end{aligned}$$

Ebbene per trovare le incognite $A_1, A_2, \dots, A_7$ calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{A_4x^3 + A_5x^2 + A_6x + A_7}{(x+1)^2(x^2+4)}\right) &= \\ \frac{(3A_4x^2 + 2A_5x + A_6)(x+1)^2(x^2+4) - (A_4x^3 + A_5x^2 + A_6x + A_7)(2(x+1)(x^2+4) + 2x(x+1)^2)}{(x+1)^4(x^2+4)^2} &= \\ = \frac{(3A_4x^2 + 2A_5x + A_6)(x+1)(x^2+4) - (A_4x^3 + A_5x^2 + A_6x + A_7)(2(x^2+4) + 2x(x+1))}{(x+1)^3(x^2-2x+5)^2}. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli, si ottiene una funzione razionale il cui denominatore é esattamente $(x+1)^3 \cdot (x^2 - 2x + 5)^2 = g(x)$ ed il cui numeratore é un polinomio di quinto grado. Riducendo allo stesso denominatore il secondo membro della (7.1) si ottiene una frazione il cui denominatore é g ed il cui numeratore é un polinomio di sesto grado i cui sette coefficienti dipendono dalle incognite $A_1, A_2, \dots, A_7$. Uguagliando tali coefficienti ai coefficienti di $f(x) = x^4 - x^2 + 3$ si ottiene un sistema lineare di 7 equazioni in sette incognite; risolvendo tale sistema, si trovano i valori delle incognite $A_1, A_2, \dots, A_7$ che soddisfano la (7.1).

■

8 . - Integrali riconducibili ad integrali di funzioni razionali

Con alcune semplici sostituzioni gli integrali di alcune funzioni possono essere ricondotte ad integrali di funzioni razionali e dunque calcolati nella maniera illustrata nel precedente paragrafo.

1 . - Ad esempio, si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt[3]{2x+3}}{x^2-1} dx &= \text{posto } y = \sqrt[3]{2x+3}, \quad x = (y^3-3)/2, \quad dx = 3y^2/2 \\ &= \int \frac{(y^3-3+2y)/2}{[(y^3-3)^2-4]/4} \cdot \frac{3y^2}{2} dy = \int \frac{3y^5+6y^3-9y^2}{y^6-6y^3+5} dy \end{aligned}$$

A questo punto il calcolo prosegue come illustrato nel precedente paragrafo ed alla fine si sostituisce y con $\sqrt[3]{2x+3}$.

In generale, se si deve calcolare l'integrale di una funzione razionale nelle variabili x e $\sqrt[n]{ax+b}$, basta porre $y = \sqrt[n]{ax+b}$, $x = (y^n-b)/a$, $dx = (n/a)y^{n-1}dy$ per trasformare l'integrale in esame nell'integrale di una funzione razionale nella variabile y .

■

2 . - Calcoliamo l'integrale $\int \sqrt{x^2-3x+5} dx$.

Posto $\sqrt{x^2-3x+5} = x+t$, si ha $x^2-3x+5 = x^2+2tx+t^2$ e quindi

$$x = \frac{5-t^2}{2t+3}, \quad dx = \frac{-2t(2t+3) - 2(5-t^2)}{(2t+3)^2} dt = \frac{-2t^2-6t-10}{(2t+3)^2} dt.$$

Se ne deduce che

$$\int \sqrt{x^2-3x+5} dx = \int \left(\frac{5-t^2}{2t+3} + t \right) \cdot \frac{-2t^2-6t-10}{(2t+3)^2} dt = \int \frac{(t^2+3t+5)(-2t^2-6t-10)}{(2t+3)^3} dt.$$

Il calcolo prosegue seguendo le procedure illustrate al paragrafo precedente ed alla fine occorre sostituire t con $\sqrt{x^2-3x+5} - x$.

Lo stesso procedimento si segue in generale se si deve calcolare l'integrale di una funzione razionale nelle variabili x e $\sqrt{ax^2+bx+c}$ con $a > 0$:

- si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+t)$, si eleva al quadrato e si ricava x in funzione di t ,
- si calcola la derivata di x rispetto a t ,
- si fanno le dovute sostituzioni e si ottiene l'integrale di una funzione razionale nella variabile t ;
- infine si sostituisce t con $\sqrt{x^2+bx/a+c/a} - x$.

■

3 . - Calcoliamo l'integrale $\int \sqrt{-x^2-3x+4} dx$.

Il radicando si annulla per $x = -4$ e per $x = 1$ ed é positivo per $x \in]-4, 1[$; inoltre si ha

$$\sqrt{-x^2-3x+4} = \sqrt{(x+4)(1-x)} = (x+4)\sqrt{(1-x)/(x+4)} \quad \text{per ogni } x \in]-4, 1[.$$

Posto allora $t = \sqrt{(1-x)/(x+4)}$, si ha $(x+4)t^2 = 1-x$ e quindi

$$x = \frac{1-4t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-8t(1+t^2) - 2t(1-4t^2)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-10t}{(1+t^2)^2} dt,$$

si ha

$$\int \sqrt{-x^2-3x+4} dx = \int (x+4)\sqrt{(1-x)/(x+4)} dx = \int \left(\frac{1-4t^2}{1+t^2} + 4 \right) \cdot t \cdot \frac{-10t}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{-50t^2}{(1+t^2)^3} dt$$

Il calcolo prosegue seguendo le procedure illustrate al paragrafo precedente ed alla fine occorre sostituire t con $\sqrt{(1-x)/(x+4)}$.

Lo stesso procedimento si segue in generale se si deve calcolare l'integrale di una funzione razionale nelle variabili x e $\sqrt{ax^2+bx+c}$ con $a < 0$:

- si trovano le radici x_1 ed x_2 , (con $x_1 < x_2$), del radicando e si pone $t = \sqrt{|a|(x_2-x)/(x-x_1)}$,
- si eleva al quadrato e si trova x in funzione di t ;
- si calcola la derivata di x rispetto a t ,
- si fanno le dovute sostituzioni nell'integrale tenendo presente che

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{|a|(x-x_1)(x_2-x)} = (x-x_1)\sqrt{|a|(x_2-x)/(x-x_1)}.$$

Si ottiene così l'integrale di una funzione razionale nella variabile t ; dopo aver calcolato tale integrale si sostituisce t con $\sqrt{|a|(x_2-x)/(x-x_1)}$.

■

4 . - Se si deve calcolare l'integrale di una funzione razionale nella variabile a^x basta porre

$$y = a^x, \quad x = \log_a(x), \quad dx = (1/y \log(a)) dy,$$

per trasformare l'integrale dato nell'integrale di una funzione razionale nella variabile y .

Ad esempio

$$\int \frac{1-4^x}{2^x+3} dx = \quad (\text{posto } y = 2^x, \quad x = \log_2(x), \quad dx = (1/y \log(2)) dy) = \int \frac{1-y^2}{y+3} \cdot \frac{1}{y \log(2)} dy = \dots$$

■

5 . - Se si deve calcolare l'integrale di una funzione in cui sono presenti somme, prodotti e rapporti di potenze di $\text{tg}(x)$ e/o $\text{sen}(x)\cos(x)$ e/o potenze pari di $\text{sen}(x)$ e/o $\cos(x)$, una sostituzione molto utile è la seguente:

$$t = \text{tg } x, \quad \text{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \text{sen} x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad x = \arctgt, \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Se invece sono presenti anche delle potenze dispari di $\text{sen}(x)$ o $\cos(x)$, allora occorre adoperare le sostituzioni

$$t = \text{tg } \frac{x}{2}, \quad \text{sen } x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{tg } x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad x = 2\arctgt, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Con queste sostituzioni l'integrale iniziale viene trasformato nell'integrale di una funzione razionale nella variabile t : una volta calcolato tale integrale occorre sostituire t con $\arctgt$ o con $2\arctgt$.

Ad esempio

$$\int \frac{1+\cos^4(x)}{\text{tg}(x)+2\text{sen}^2(x)} dx = \int \frac{1+\frac{1}{(1+t^2)^2}}{t+\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \dots$$

$$\int \frac{1+2\cos(x)}{\text{tg}(x)+2\text{sen}^2(x)} dx = \int \frac{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}+\frac{8t^2}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \dots$$

■

ESERCIZI

1 - Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 - 1}{x^2 - 9}, \quad \frac{4x + 6}{x^2 + 4x + 10}, \quad \frac{x^3 - 3x + 4}{x - 4}, \quad \frac{4x - 6}{x^2 + 6x + 18}, \\ & \frac{4x^4 - 1}{2x + 1}, \quad \frac{2x - 5}{4x^2 - 4x + 5}, \quad \frac{x^4 - x^2}{x^3 + 8}, \quad \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}, \\ & \frac{x^3 + x}{x^4 + 2x^2 + 2}, \quad \frac{5x - 8}{x^2 - 8\sqrt{x}} dx, \quad \frac{1}{(x + 1)(1 - \sqrt[3]{x + 1})^2}, \\ & x(1 - x^4)e^{-x^2}, \quad 9x^2 \log^2 x, \quad (x^2 - 3x) \cos(2x), \quad x^3 \operatorname{sen}(2x) \\ & \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}, \quad \cos(\sqrt[3]{x - 2}), \quad x \cos(2x + 1), \quad \frac{x}{\cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

2 - Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\begin{aligned} & \int_1^{e^4} (1/x) \operatorname{arctg} \sqrt{2 \log x + 1} dx, \quad \int_0^4 \operatorname{arctg} \sqrt{2 - \sqrt{x}} dx, \quad \int_5^9 \log(x + 2\sqrt{x - 5}) dx \\ & \int_0^1 \log(x + \sqrt{2 - x}) dx, \quad \int_{-2}^2 e^{-x/2} (x^2 - 3x) dx, \quad \int_1^2 \frac{x + 1}{\sqrt{3x - 2}} dx, \\ & \int_4^6 \log(x^2 - 2x - 3\sqrt{x - 2}) dx, \quad \int_1^4 \log(2x + \sqrt{x}) dx, \quad \int_0^1 \operatorname{arcsen}^2 x dx, \\ & \int_{1/e}^1 \frac{2 \log x + 3}{x(\log^2 x + 4 \log x + 5)} dx, \quad \int_{1/2}^1 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx, \quad \int_0^1 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2x - 1} \right) dx. \\ & \int_0^{\pi/2} (\cos x) \cdot \log \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 5}{1 + \operatorname{sen} x} \right) dx, \quad \int_0^{(\pi/3)^2} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} dx, \quad \int_1^2 x \cos(1 + 2 \log x) dx. \end{aligned}$$

3 - Calcolare il valore medio nell'intervallo $[1, e]$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \left(\frac{\log x}{1 + \log x} \right).$$

Calcolare l'integrale definito e il valor medio nell'intervallo $[6, 9]$ della funzione

$$f(x) = \log(x - 4\sqrt{x - 5}).$$

NUMERI COMPLESSI

1 . - Numeri complessi: forma algebrica

Come é ben noto, non esiste alcun numero reale il cui quadrato sia un numero negativo e tuttavia é utile pensare a degli altri numeri, diversi dai numeri reali, che moltiplicati per sé stessi danno per risultato un numero reale minore di 0; per marcare la loro differenza dai numeri reali, li chiameremo **numeri immaginari**.

In particolare il numero (immaginario) il cui quadrato é uguale a -1 verrà detto **unità immaginaria** e verrà denotato con la lettera i ; di conseguenza denoteremo $2i$ il numero immaginario il cui quadrato é $(2i)^2 = 4i^2 = -4$, denoteremo $-3i$ il numero immaginario il cui quadrato é $(-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = -9$, in generale denoteremo ai il numero immaginario il cui quadrato é $(ai)^2 = a^2 i^2 = -a^2$.

D'altra parte ci si imbatte facilmente di fronte a degli ibridi dati dalla somma tra un numero reale ed un numero immaginario. Ad esempio, se dobbiamo risolvere l'equazione di secondo grado $x^2 - 2x + 5 = 0$, che trasformiamo facilmente nella forma $(x - 1)^2 + 4 = 0$ e quindi $(x - 1)^2 = -4$, siamo spontaneamente portati a dire che le sue eventuali soluzioni siano dei numeri x tali che $x - 1$ sia un numero immaginario, (precisamente $2i$ e $-2i$), e dunque che tali soluzioni siano i numeri $1 + 2i$ ed $1 - 2i$.

Introduciamo dunque dei nuovi numeri della forma $a + bi$, con a, b numeri reali, che chiameremo **numeri complessi**; denoteremo con il simbolo $\mathbf{C}$ l'insieme di tutti i numeri complessi.

A questo punto dobbiamo estendere ai numeri complessi le operazioni di addizione e moltiplicazione; se diamo per scontato che continueranno a valere le consuete proprietà associativa, commutativa e distributiva, dovrà essere

$$(a + bi) + (c + di) = [(a + bi) + c] + di = [(a + c) + bi] + di = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (a + bi) \cdot c + (a + bi) \cdot di = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

e quindi viene spontaneo porre per definizione:

$$(a + bi) + (c + di) \stackrel{def}{=} (a + c) + (b + d)i, \quad (a + bi) \cdot (c + di) \stackrel{def}{=} (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

■

Osservazione 1.1 - Alla luce di quanto visto, possiamo rendere più rigorosa la costruzione del campo dei numeri complessi, nel senso che possiamo dire numero complesso una qualunque coppia ordinata di numeri reali (a, b) e pertanto $\mathbf{C}$ non é altro che l'insieme $\mathbf{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali.

In $\mathbf{C}$ si definiscono le operazioni $+$ e $\cdot$ ponendo, (per ogni coppia di numeri complessi (a, b) e (c, d)):

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Identificando il generico numero reale a con il numero complesso $(a, 0)$, e quindi $\mathbf{R}$ con $\mathbf{R} \times \{0\}$, possiamo dire che $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Inoltre, per il numero complesso $(0, 1)$ risulta

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1,$$

e dunque $(0, 1)$ é proprio l'unità immaginaria i .

D'altra parte, per ogni $a \in \mathbf{R}$, si ha $(0, a) = (a, 0) \cdot (0, 1) = ai$, e dunque i numeri immaginari sono i numeri complessi della forma $(0, a)$.

Infine, per ogni numero complesso (a, b) si ha:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

che dicesi la **forma algebrica** del numero complesso (a, b) .

Del generico numero complesso $z = a + bi$ diremo che a é la **parte reale**, bi é la **parte immaginaria** e b é il **coefficiente della parte immaginaria**. Denoteremo con i simboli $Re(z)$ ed $Im(z)$ rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di z .

■

Si verifica allora facilmente che le operazioni $+$ e $\cdot$ in $\mathbf{C}$ godono effettivamente delle consuete proprietà:

- (*commutativa*) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$
- (*associativa*) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$
- (*distributiva*) $(z_1 + z_2) \cdot w = z_1 \cdot w + z_2 \cdot w.$

Inoltre il numero complesso $(0, 0) = 0 + 0i$ é elemento neutro per l'addizione ed $(1, 0) = 1 + 0i$ é elemento neutro per la moltiplicazione, nel senso che

$$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi \quad (a + bi) \cdot (1 + 0i) = a + bi \quad \text{per ogni } a + bi \in \mathbf{C}$$

e verranno denotati semplicemente con i simboli 0 ed 1.

Di ogni numero complesso $z = a + bi$ esiste l'opposto $-z$, (cioé il numero complesso tale che $z + (-z) = 0$), ed é $-z = -a + (-b)i$. Analogamente di ogni numero complesso $z = a + ib \neq 0 = 0 + 0i$ esiste il reciproco $1/z$, (cioé il numero complesso tale che $z \cdot (1/z) = 1$), ed é $1/z = (a/(a^2 + b^2)) - (b/(a^2 + b^2))i$.

In definitiva $(\mathbf{C}, +, \cdot)$, al pari di $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ e di $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, é un corpo commutativo o campo.

■

Osservazione 1.2 - Possiamo rappresentare graficamente i numeri complessi considerando un riferimento cartesiano ortogonale nel piano euclideo: allora ogni numero complesso $(a, b) = a + bi$ può essere identificato con il punto del piano di coordinate cartesiane (a, b) . L'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi viene detto perciò **piano complesso** o **piano di Gauss** dal nome del matematico che per primo adoperò un simile approccio geometrico.

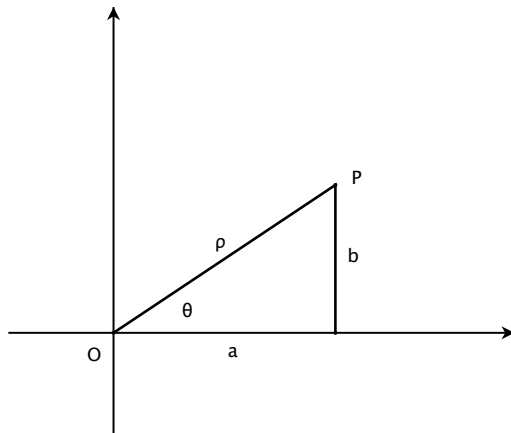
I punti dell'asse x rappresentano allora i numeri reali (e viene detto l'**asse reale**), mentre i punti dell'asse y rappresentano i numeri immaginari (e viene detto l'**asse immaginario**).

Se $z = a + bi$ e $w = c + id$ sono due numeri complessi che identifichiamo rispettivamente con i punti P e Q del piano, allora il numero complesso $z + w$ si identifica con il punto R costruito con la ben nota "regola del parallelogramma", cioè con il punto di intersezione della retta per Q parallela ad OP con la retta per P parallela ad OQ .

■

2 . - Forma trigonometrica di un numero complesso

Sia $z = a + bi$ un numero complesso diverso da $0 = 0 + 0i = (0, 0)$, identificato con un punto del piano P diverso dall'origine O . Allora il punto P può essere identificato dalle coordinate cartesiane (a, b) , ma anche dalle cosiddette **coordinate polari**, (ρ, θ) , dove ρ indica la distanza di P dall'origine O e θ misura l'ampiezza (in radianti) dell'angolo orientato che il semiasse positivo delle ascisse forma con la semiretta OP , (con la consueta convenzione di considerare positivo il verso antiorario e negativo il verso orario).



La distanza ρ dicesi **modulo** di z e il numero θ dicesi **argomento** di z .

Si noti che il modulo di z è univocamente determinato, (e viene indicato con il simbolo $|z|$), ma ci sono infiniti argomenti di z : infatti, se la semiretta OP è individuata dall'angolo di ampiezza θ radianti, la stessa semiretta è individuata anche dagli angoli di ampiezza $\theta \pm 2\pi, \theta \pm 4\pi, \dots$, in generale $\theta + 2k\pi$ radianti con $k \in \mathbf{Z}$.

Indicheremo con il simbolo $\text{Arg}(z)$ l'insieme degli infiniti argomenti di z ; se θ è un argomento di z , tutti gli altri sono della forma $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ e scriveremo quindi $\text{Arg}(z) = \theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

■

Dalla figura precedente si deduce chiaramente che se ρ e θ sono il modulo ed un argomento del numero complesso $z \neq 0$, allora la parte reale a e il coefficiente b della parte immaginaria di z sono date da $a = \rho \cos(\theta)$, $b = \rho \sin(\theta)$, e quindi si ha

$$z = a + bi = \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) \cdot i = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

che dicesi la **forma trigonometrica** del numero complesso z .

Viceversa se $z = a + bi$ è un numero complesso diverso da 0, allora il modulo ρ e gli argomenti θ di z possono essere ricavate dalle relazioni:

$$(2.1) \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos(\theta) = a/\rho = a/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin(\theta) = b/\rho = b/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

■

Tra gli infiniti argomenti di z , cioè tra gli infiniti numeri θ soddisfacenti le condizioni (2.1), ne esiste uno ed uno solo che appartiene all'intervallo $[0, 2\pi[$: tale argomento viene detto **argomento principale** di z e viene denotato $\arg(z)$.

L'argomento principale dei numeri complessi diversi da 0 viene usato quando ci si limita a considerare angoli (percorsi in senso antiorario) di ampiezza minore dell'angolo giro.

Talvolta è però preferibile considerare angoli di ampiezza minore dell'angolo piatto, percorso in senso antiorario o in senso orario a seconda che il punto P si trovi al di sopra o al di sotto dell'asse reale; in tal caso si sceglie come argomento principale di z l'unico argomento di z che appartiene all'intervallo $] - \pi, \pi]$.

■

Ad esempio se $z = 1 + i$, allora il modulo di z é $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e gli argomenti di z si ricavano dalle relazioni

$$\cos(\theta) = 1/\rho = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2, \quad \text{sen}(\theta) = 1/\rho = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2;$$

pertanto l'argomento principale di z é $\pi/4$, gli altri argomenti sono dati da $\pi/4 + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Invece nel caso $z = -1 + \sqrt{3}i$, il modulo di z é $\rho = \sqrt{1 + 3} = 2$ e gli argomenti si ricavano dalle relazioni

$$\cos(\theta) = -1/\rho = -1/2, \quad \text{sen}(\theta) = \sqrt{3}/\rho = \sqrt{3}/2;$$

pertanto l'argomento principale di z é $\pi - \pi/3 = (2/3)\pi$, gli altri argomenti sono dati da $(2/3)\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Infine, nel caso $z = \sqrt{3} - i$, il modulo di z é $\rho = \sqrt{3 + 1} = 2$ e gli argomenti si ricavano dalle relazioni

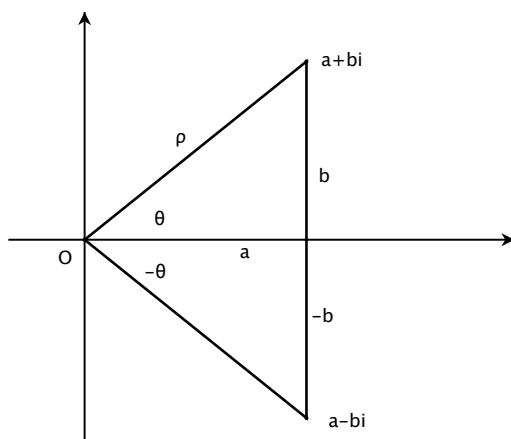
$$\cos(\theta) = \sqrt{3}/\rho = \sqrt{3}/2, \quad \text{sen}(\theta) = -1/\rho = -1/2;$$

pertanto l'argomento principale di z é $2\pi - \pi/6 = (11/6)\pi$, ma forse é piú semplice considerare argomento principale di z il numero $\theta = -\pi/6$; gli altri argomenti di z sono dati da $-\pi/6 + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

■

3 . - Coniugato di un numero complesso

Definizione 3.1. Se $z = a + bi$ é un numero complesso, il simmetrico di z rispetto all'asse reale, cioè $\bar{z} = a - bi$ viene detto il “**coniugato**” di z .



E' pressoché evidente che:

- il coniugato del coniugato di z coincide con z ,
- $z \in \mathbf{R}$ se e solo se $z = \bar{z}$,
- $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$,
- se $z \neq 0$ e θ é un argomento di z , allora $-\theta$ é un argomento di $\bar{z}$,
- $\text{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\text{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$,
- $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$,
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, (cioé il coniugato della somma coincide con la somma dei coniugati),
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, (cioé il coniugato del prodotto coincide con il prodotto dei coniugati),
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Usando il concetto di coniugato si ritrova facilmente la formula del reciproco di un numero $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (a - bi) = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i.$$

■

4 . - Formule di De Moivre

La forma trigonometrica risulta particolarmente comoda quando si voglia calcolare il prodotto o il rapporto di due numeri complessi non nulli o la potenza di un numero complesso diverso da 0.

Infatti, se $z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ e $z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$, allora si ha:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + i (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che:

Proposizione 4.1. *Il prodotto $z_1 \cdot z_2$ di due numeri complessi diversi da 0 è il numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli di z_1 e z_2 e per argomento la somma dei loro argomenti.*

■

Da quanto appena visto si deduce immediatamente che

Corollario 4.2. *Se $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, allora si ha $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$.*

In altri termini, la potenza n -sima di un numero complesso $z \neq 0$ è il numero complesso che ha per modulo la potenza n -sima del modulo di z e per argomento il multiplo n -simo di un suo argomento.

■

Dalla Proposizione 4.1 discende pure che

Corollario 4.3. *Il reciproco di un numero complesso $z \neq 0$ è il numero complesso w che ha per modulo il reciproco del modulo di z e per argomento l'opposto di un suo argomento. In altri termini si ha:*

$$z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \neq 0 \implies \frac{1}{z} = w = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{\rho}(\cos(\theta) - i \sin(\theta)).$$

In effetti il prodotto di z per w è il numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli $\rho \cdot (1/\rho) = 1$ e per argomento la somma degli argomenti $\theta + (-\theta) = 0$, cioè il numero complesso $1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0)) = 1 + 0i = 1$.

■

Dalla Proposizione 4.1 e dal Corollario 4.3 si deduce immediatamente che:

Corollario 4.4. *Il rapporto z_1/z_2 di due numeri complessi non nulli è il numero complesso w che ha per modulo il rapporto ρ_1/ρ_2 dei moduli di z_1 e z_2 e per argomento la differenza $\theta_1 - \theta_2$ dei loro argomenti.*

■

Ad esempio, se $z = -1 + i$ e $w = \sqrt{3} + i$, si ha:

$$\begin{array}{ll}
 |z| = \sqrt{2}, & \arg(z) = (3/4)\pi, \\
 |w| = \sqrt{3+1} = 2, & \arg(w) = \pi/6, \\
 |z^3| = |z|^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}, & \arg(z^3) = 3\arg(z) = (9/4)\pi, \\
 |w^4| = |w|^4 = 2^4 = 16, & \arg(w^4) = 4\arg(w) = 4(\pi/6) = (2/3)\pi, \\
 |z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 2\sqrt{2}, & \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) = (3/4)\pi + \pi/6 = (11/12)\pi, \\
 |z/w| = |z|/|w| = \sqrt{2}/2, & \arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w) = (3/4)\pi - \pi/6 = (7/12)\pi, \\
 |z^3 \cdot w^4| = |z^3| \cdot |w^4| = 32\sqrt{2}, & \arg(z^3 \cdot w^4) = \arg(z^3) + \arg(w^4) = (9/4)\pi + (2/3)\pi = (35/12)\pi.
 \end{array}$$

dove naturalmente $\arg(\cdot)$ denota semplicemente un argomento del numero in esame e non necessariamente il suo argomento principale.

Ovviamente, se si vuole trovare l'argomento principale occorre eventualmente sottrarre un opportuno multiplo di 2π . Ad esempio l'argomento principale di z^3 é $(9/4)\pi - 2\pi = \pi/4$, l'argomento principale di $z^3 \cdot w^4$ é $(35/12)\pi - 2\pi = (11/12)\pi$.

■

5 . - Radici n -sime di un numero complesso.

Definizione 5.1 -. Se z é un numero complesso ed $n \in \mathbf{N}$ dicesi **radice n -sima di z** un qualunque numero complesso w tale che $w^n = z$.

Se $z = 0$, l'unica radice n -sima di z é $w = 0$, poiché $w \neq 0 \implies w^n \neq 0$. D'altra parte, si dimostra facilmente che:

Proposizione 5.2 -. Di ogni numero complesso $z \neq 0$ esistono n radici n -sime distinte $w_1, w_2, \dots, w_n$; tali radici sono caratterizzate dal fatto che

$$|w_k| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg(w_k) = \frac{\arg(z) + 2(k-1)\pi}{n} \quad \text{per ogni } k = 1, 2, \dots, n.$$

Dim. Infatti, se $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ e $w = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ sono numeri complessi diversi da 0, allora é $w^n = z$ se e solo se $r^n = \rho$ ed $n\alpha$ é un argomento di z e quindi del tipo $\theta + 2k\pi$. Pertanto w é radice n -sima di z se e solo se $r = \sqrt[n]{\rho}$ ed esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $\alpha = (\theta + 2k\pi)/n$.

Se θ é l'argomento principale di z , (cioé $\theta \in [0, 2\pi[$), allora si ha:

$$0 \leq \alpha_1 = \frac{\theta}{n} < \frac{2\pi}{n} \leq \alpha_2 = \frac{\theta + 2\pi}{n} < \frac{4\pi}{n} \leq \alpha_3 = \frac{\theta + 4\pi}{n} < \frac{6\pi}{n} \leq \dots \leq \alpha_n = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} < 2\pi.$$

Pertanto i numeri complessi $w_1, w_2, \dots, w_n$ di modulo $\sqrt[n]{\rho}$ ed argomenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono n radici n -sime distinte di z ; invece per ogni $k \in \mathbf{Z}$ tale che $k < 0$ oppure $k \geq n$, si ha che il numero complesso di modulo $\sqrt[n]{\rho}$ ed argomento $(\theta + 2k\pi)/n$ é una radice n -sima di z ma coincide con una delle radici $w_1, w_2, \dots, w_n$.

■

Esempio 1 - Se $z = \sqrt{3} - i = 2(\cos(11/6)\pi + i \sin(11/6)\pi)$, allora le radici quarte di z sono i numeri complessi di modulo $\sqrt[4]{2}$ ed argomento

$$\begin{array}{ll}
 \alpha_1 = \frac{(11/6)\pi}{4} = \frac{11}{24}\pi, & \alpha_2 = \frac{(11/6)\pi + 2\pi}{4} = \frac{11}{24}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{23}{24}\pi, \\
 \alpha_3 = \frac{(11/6)\pi + 4\pi}{4} = \frac{11}{24}\pi + \pi = \frac{35}{24}\pi, & \alpha_4 = \frac{(11/6)\pi + 6\pi}{4} = \frac{11}{24}\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{47}{24}\pi.
 \end{array}$$

■

Osservazione 5.3 - Si noti che $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ possono anche essere ottenuti tramite la formula ricorrente

$$\alpha_1 = \theta/n, \quad \alpha_k = \alpha_{k-1} + (2\pi)/n \quad \text{per } k = 2, 3, \dots, n.$$

ne segue che le n radici n -sime di z sono i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio con centro l'origine O e raggio $r = \sqrt[n]{\rho}$ il cui primo vertice ha argomento θ/n .

■

In particolare, se $z \in \mathbf{R}^+$, allora si ha $|z| = z$ ed $\arg(z) = 0$ e quindi le n radici n -sime di z sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio con centro l'origine O e raggio $r = \sqrt[n]{z}$, il cui primo vertice ha argomento 0 e quindi é il numero reale $\sqrt[n]{z}$.

Se n é dispari, nessun altro vertice del poligono cade sull'asse reale e quindi le restanti $n - 1$ radici sono numeri complessi non reali. Se invece n é pari, allora il poligono ha due vertici sull'asse reale, precisamente $\sqrt[n]{z}$ e $-\sqrt[n]{z}$, le restanti $n - 2$ radici di z sono numeri complessi non reali.

Se invece $z \in \mathbf{R}^-$, e quindi $\arg(z) = \pi$, allora le n radici n -sime di z sono tutte numeri complessi non reali nel caso n pari, mentre nel caso n dispari si ha che una delle radici é reale, (precisamente $-\sqrt[n]{-z}$), e le restanti $n - 1$ radici sono numeri complessi non reali.

■

Osservazione 5.4 - In particolare, se $n = 2$, allora le due radici quadrate del numero complesso $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ sono i numeri complessi

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{|z|}(\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)), \\ w_2 &= \sqrt{|z|}(\cos(\theta/2 + \pi) + i \sin(\theta/2 + \pi)) = -\sqrt{|z|}(\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)) = -w_1. \end{aligned}$$

■

Osservazione 5.5 - Possiamo facilmente estendere al caso complesso la formula risolvente di una equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$.

Risulta infatti:

$$az^2 + bz + c = \frac{1}{4a} \cdot (4a^2z^2 + 4abz + 4ac) = \frac{1}{4a} \cdot ((2az + b)^2 - (b^2 - 4ac)).$$

Ne segue che le radici complesse dell'equazione a coefficienti complessi $az^2 + bz + c = 0$ sono i numeri complessi z tali che $2az + b$ é una delle due radici quadrate complesse di $\Delta = b^2 - 4ac$; tali radici sono una opposta all'altra e quindi possiamo ancora scrivere che le radici dell'equazione sono date da

$$z = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a.$$

Ad esempio per trovare le radici complesse dell'equazione $(1 + i)z^2 - 2z - i = 0$ osserviamo che $\Delta = 4 + 4i(1 + i) = 4 + 4i - 4 = 4i = 4(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$ e quindi

$$\sqrt{\Delta} = 2(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2}(1 + i).$$

Ne segue che le radici dell'equazione sono date da:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 + i)} = \frac{2 \pm \sqrt{2}(1 + i)}{2(1 + i)} = \frac{2(1 - i) \pm \sqrt{2}(1 + i)(1 - i)}{2(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 \pm \sqrt{2} - i}{2}.$$

■

Osservazione 5.6 - L'insieme dei numeri complessi é l'ambiente adatto per studiare i polinomi, cioè le funzioni di $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ del tipo $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ con $a_0, a_1, \dots, a_n$ numeri complessi.

Se $a_n \neq 0$, allora $p(z)$ dicesi **polinomio di grado n a coefficienti complessi**. Inoltre dicesi **radice del polinomio p** un qualunque numero complesso $\bar{z}$ tale che $p(\bar{z}) = 0$.

Si vede allora che:

- (1) (*Teorema di Ruffini*) - $\bar{z}$ é una radice di p se e solo se esiste un polinomio q di grado $n - 1$ tale che $p(z) = q(z)(z - \bar{z})$.
- (2) (*Teorema fondamentale dell'Algebra*) - Ogni polinomio a coefficienti complessi ha almeno una radice (complessa). Ne segue che un polinomio di grado n ha esattamente n radici complesse (non necessariamente distinte).
- (3) Se $z_1, z_2, \dots, z_s$ sono le radici distinte di p , rispettivamente di molteplicitá $k_1, k_2, \dots, k_s$, si ha

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_s)^{k_s}.$$

- (4) Se i coefficienti di p sono numeri reali ed $a + bi$ é una radice di molteplicitá k di p , allora anche $a - bi$ é una radice di molteplicitá k di p .
- (5) Se i coefficienti di p sono numeri reali ed $a \pm bi$ sono radici complesse coniugate di molteplicitá k di $p(z)$, allora $p(z)$ é divisibile per $(z - (a + bi))(z - (a - bi)) = (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2$, che é un polinomio di secondo grado con $\Delta = 4a^2 - 4a^2 - 4b^2 = -4b^2 < 0$.
- (6) Pertanto ogni polinomio a coefficienti reali può essere scomposto in fattori di primo e secondo grado irriducibili, (cioé con $\Delta < 0$), eventualmente multipli.

■

6 . - Funzione esponenziale complessa

Il concetto di successione convergente può essere esteso al caso di successioni di numeri complessi, nel senso che una successione $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di numeri complessi si dice convergente verso il numero complesso z se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n > \bar{n}$ si ha che $|z_n - z| < \varepsilon$, cioè se e solo se $|z_n - z| \rightarrow 0$. Si vede allora che $z_n = x_n + i y_n$ tende a $z = x + iy$ se e solo se $x_n \rightarrow x$ ed $y_n \rightarrow y$. Se z é diverso da 0, allora $z_n \rightarrow z$ se e solo se $|z_n| \rightarrow |z|$ ed $\arg(z_n) \rightarrow \arg(z)$.

In maniera analoga é possibile estendere i concetti di limite e derivata alle funzioni $f : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$.

Diremo infatti che $f(x)$ tende ad $\alpha + i\beta$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se $|f(x) - (\alpha + i\beta)| \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$ e diremo derivata di f in x_0 , (in simboli $f'(x_0)$), il limite (in $\mathbf{C}$) della funzione rapporto incrementale $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ (se tale limite esiste).

Infine alle funzioni $f : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, con I intervallo, é possibile estendere il concetto di primitiva e di integrale indefinito, nel senso che F é primitiva di f se e solo se F é derivabile e $F' = f$ e che dicesi integrale indefinito di f l'insieme di tutte le sue primitive.

Si vede allora facilmente che se $f(x) = u(x) + iv(x)$ per ogni $x \in I$, allora:

- (1) $f(x) \rightarrow \alpha + i\beta$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se $u(x) \rightarrow \alpha$ e $v(x) \rightarrow \beta$,
- (2) f é derivabile in x_0 se e solo se u e v sono derivabili in x_0 e risulta: $f'(x_0) = u'(x_0) + i v'(x_0)$,
- (3) $\int f(x) dx = \int u(x) dx + i \int v(x) dx$.

■

Osservazione 6.1 - Attraverso il concetto di successione convergente di numeri complessi é possibile ottenere un prolungamento a $\mathbf{C}$ della funzione esponenziale

$$y = e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n.$$

Infatti, si dimostra che per ogni $z = x + iy \in \mathbf{C}$ la successione $((1 + z/n)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge verso il numero complesso di modulo e^x e di argomento y . Ebbene, per analogia con il caso reale, si pone

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n \quad \text{e dunque} \quad e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} e^{2-(\pi/2)i} &= e^2(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2)) = -e^2 i, \\ e^{-2+(\pi/6)i} &= e^{-2}(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)) = (1/2)e^{-2}(\sqrt{3} + i). \end{aligned}$$

■

Osservazione 6.2 - Si dimostra che la funzione e^z soddisfa le consuete proprietà

$$e^{-z} = 1/e^z, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}.$$

■

Osservazione 6.3 - In particolare, per ogni $\theta \in \mathbf{R}$ si ha

$$e^{i\theta} = e^0(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta,$$

donde seguono le fondamentali **Formule di Eulero**:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

D'altra parte, se $z \neq 0$ è un numero complesso di modulo ρ ed argomento θ si ha :

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

che fornisce una ulteriore rappresentazione di z che viene detta la **forma esponenziale**.

■

Osservazione 6.4 - Sia $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$ e sia

$$f(x) = e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x+i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Evidentemente f è derivabile in $\mathbf{R}$ e si verifica immediatamente che $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Ne segue che risulta

$$\int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + c \quad \text{con } c \in \mathbf{C} \text{ arbitrario.}$$

■

Osservazione 6.5 - Le formule di Eulero e la Osservazione 6.4 possono essere usate per calcolare facilmente l'integrale indefinito di una funzione prodotto di funzioni esponenziali, seno e coseno.

Ad esempio per calcolare l'integrale $\int \cos^4(x) \sin^2(3x) dx$ osserviamo che

$$\begin{aligned} (\cos^4 x) \cdot (\sin^2(3x)) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \cdot \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{64} \left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6e^{0ix} + 4e^{-2ix} + e^{-4ix} \right) \left(e^{6ix} + e^{-6ix} - 2 \right) = \\ &= -\frac{1}{64} \left(e^{10ix} + 4e^{8ix} + 6e^{6ix} + 4e^{4ix} + e^{2ix} + e^{-2ix} + 4e^{-4ix} + 6e^{-6ix} + \right. \\ &\quad \left. + 4e^{-8ix} + e^{-10ix} - 2e^{4ix} - 8e^{2ix} - 12 - 8e^{-2ix} - 2e^{-4ix} \right) = \\ &= -\frac{1}{64} \left(e^{10ix} + 4e^{8ix} + 6e^{6ix} + 2e^{4ix} - 7e^{2ix} - 7e^{-2ix} + 2e^{-4ix} + 6e^{-6ix} + 4e^{-8ix} + e^{-10ix} - 12 \right) = \\ &= -\frac{1}{64} \left(e^{10ix} + e^{-10ix} + 4e^{8ix} + 4e^{-8ix} + 6e^{6ix} + 6e^{-6ix} + 2e^{4ix} + 2e^{-4ix} - 7e^{2ix} - 7e^{-2ix} - 12 \right) = \\ &= -\frac{1}{64} \left(2 \cos(10x) + 8 \cos(8x) + 12 \cos(6x) + 4 \cos(4x) - 14 \cos(2x) - 12 \right) \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\int \cos^4(x) \sin^2(3x) dx &= -\frac{1}{64} \int \left(2 \cos(10x) + 8 \cos(8x) + 12 \cos(6x) + 4 \cos(4x) - 14 \cos(2x) - 12 \right) dx = \\ &= -\frac{1}{64} \left(\frac{1}{5} \sin(10x) + \sin(8x) + 2 \sin(6x) + \sin(4x) - 7 \sin(2x) - 12x \right) + c\end{aligned}$$

■

Come ulteriore esempio calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(2x) \sin(3x) dx &= \int e^x \cdot \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \cdot \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} dx \\ &= \frac{1}{4i} \int e^x \cdot (e^{5ix} - e^{-5ix} + e^{ix} - e^{-ix}) dx = \\ &= \frac{1}{4i} \int (e^{(1+5i)x} - e^{(1-5i)x} + e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}) dx = \\ &= \frac{1}{4i} \left(\int e^{(1+5i)x} dx - \int e^{(1-5i)x} dx + \int e^{(1+i)x} dx - \int e^{(1-i)x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4i} \left(\frac{e^{(1+5i)x}}{1+5i} - \frac{e^{(1-5i)x}}{1-5i} + \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{e^{(1-i)x}}{1-i} \right) + c = \\ &= \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{26} e^x (1-5i)(\cos(5x) + i \sin(5x)) - \frac{1}{26} e^x (1+5i)(\cos(5x) - i \sin(5x)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e^x (1-i)(\cos(x) + i \sin(x)) - \frac{1}{2} e^x (1+i)(\cos(x) - i \sin(x)) \right) + c = \\ &= \frac{1}{104i} e^x \left(\cos(5x) + 5 \sin(5x) - 5i \cos(5x) + i \sin(5x) - \cos(5x) - 5 \sin(5x) - 5i \cos(5x) + i \sin(5x) \right. \\ &\quad \left. + 13 \cos x + 13 \sin x - 13i \cos x + 13i \sin x - 13 \cos x - 13 \sin x - 13i \cos x + 13i \sin x \right) + c = \\ &= \frac{1}{104i} e^x \left(-10i \cos(5x) + 2i \sin(5x) - 26i \cos x + 26i \sin x \right) + c = \\ &= \frac{1}{52} e^x \left(-5 \cos(5x) + \sin(5x) - 13 \cos x + 13 \sin x \right) + c.\end{aligned}$$