

Elenco delle definizioni del corso di ANALISI MATEMATICA ED ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE

CALCOLO VETTORIALE E MATRICIALE

Vettori in \mathbf{R}^n ; somma di due vettori, prodotto di uno scalare per un vettore, prodotto scalare di due vettori. Vettori ortogonali in \mathbf{R}^n . Norma e distanza euclidea in \mathbf{R}^n . Combinazione lineare di k vettori di \mathbf{R}^n .

Matrici di tipo k per n . Matrici quadrate. Matrici triangolari superiori o inferiori. Matrici diagonali. Matrice identica. Matrici a blocchi. Matrice trasposta. Somma di due matrici, prodotto di uno scalare per una matrice, prodotto matriciale righe per colonne. Matrici quadrate invertibili e relativa inversa.

DETERMINANTI

Determinante di una matrice quadrata. Matrici singolari e non singolari. Minori complementari e complementi algebrici. Matrice aggiunta di una matrice quadrata. Caratteristica o rango di una matrice.

SOTTOSPAZI VETTORIALI DI \mathbf{R}^n

Sottospazi vettoriali di \mathbf{R}^n , Sottospazio generato da un insieme finito di vettori. Vettori linearmente dipendenti o indipendenti. Sistema di generatori e base di un sottospazio vettoriale. Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Dimensione di un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^n . Rette, piani ed iperpiani. Sottospazi affini.

TRASFORMAZIONI LINEARI

Trasformazioni lineari tra \mathbf{R}^n ed \mathbf{R}^k . Nucleo ed immagine di una trasformazione lineare. Trasformazione lineare associata ad una matrice. Matrice di una trasformazione lineare di \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^k . Matrice del cambio di coordinate in \mathbf{R}^n . Matrice di una trasformazione lineare di \mathbf{R}^n in sé rispetto ad una base.

ORTOGONALITA'

Sottospazio ortogonale ad un insieme e ad un sottospazio. Complemento ortogonale ad un sottospazio di \mathbf{R}^n . Basi ortogonali in \mathbf{R}^n . Matrici ortogonali.

AUTOVALORI, AUTOVETTORI, FORME QUADRATICHE

Autovalori, autovettori ed autospazi di una matrice quadrata. Polinomio caratteristico di una matrice quadrata. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. Matrici simili, matrici diagonalizzabili. Indice di positività, di negatività e di nullità di una matrice quadrata simmetrica. Segnatura di una matrice quadrata simmetrica. Matrici congruenti. Riduzione in forma canonica di una matrice quadrata simmetrica. Forma quadratica associata ad una matrice quadrata simmetrica. Forme quadratiche definite positive, definite negative, semidefinite positive, semidefinite negative, indefinite.

INTEGRALI IMPROPRI E SERIE.

Integrale improprio di una funzione continua in un intervallo limitato semiaperto o aperto o in un intervallo illimitato chiuso o aperto. Serie numeriche convergenti e divergenti; somma di una serie. Serie assolutamente convergenti. Serie geometrica. Serie armonica e armonica generalizzata. Serie a termini positivi. Serie a termini di segno alterno. Serie di potenze.

LIMITI e CONTINUITA' per FUNZIONI VETTORIALI e per FUNZIONI di n VARIABILI

Sfera aperta, sfera chiusa e superficie sferica. Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione per un sottoinsieme di \mathbf{R}^n . Insiemi aperti e insiemi chiusi di \mathbf{R}^n

Funzioni di una variabile a valori vettoriali. Funzioni scalari di n variabili. Funzioni di n variabili a valori vettoriali. Immagine e grafico. Componenti di una funzione vettoriale. Linee coordinate e linee di livello per una funzione di due variabili. Superfici di livello per funzioni di n variabili.

Convergenza e continuità per funzioni vettoriali di una variabile, e per funzioni scalari o vettoriali di n variabili. Insiemi limitati in \mathbf{R}^n . Insiemi connessi per archi in \mathbf{R}^n .

CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Area di un rettangoloide e di un dominio normale all'asse x o y . Insiemi piani misurabili e loro misura.

Somme inferiori, somme superiori e somme di Cauchy di una funzione limitata su un insieme misurabile di \mathbf{R}^2 . Funzioni integrabili secondo Riemann su un insieme misurabile di \mathbf{R}^2 e loro integrale.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI n VARIABILI

Derivata di una funzione di una variabile a valori vettoriale: suo significato geometrico. Derivate parziali e derivate direzionali, gradiente e differenziale di una funzione di \mathbf{R}^n in \mathbf{R} . Matrice Jacobiana di una funzione di \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^k . Funzioni differenziabili di \mathbf{R}^n in \mathbf{R} o di \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^k in un punto di \mathbf{R}^n .

Derivate parziali di ordine superiore. Matrice hessiana di una funzione di \mathbf{R}^n in \mathbf{R} . Polinomio di Taylor del secondo ordine. Punti di minimo e massimo relativo, punti di sella. Funzioni convesse (strettamente) o concave. Funzioni definite implicitamente da una equazione. Funzioni vettoriali definite implicitamente da un sistema di equazioni

Elenco dei principali teoremi del corso di ANALISI MATEMATICA ED ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE

CALCOLO VETTORIALE E MATRICIALE

Proprietà delle operazioni di addizione di due vettori di \mathbf{R}^n , di moltiplicazione di uno scalare per un vettore, di prodotto scalare di due vettori.

Proprietà delle operazioni tra matrici (*). Passo di pivot. Algoritmo di Gauss Jordan.(*)

DETERMINANTI

Proprietà dei determinanti (*). Calcolo del determinante con l'algoritmo di Gauss Jordan. Regola di Laplace (*).

Una matrice quadrata è invertibile se e solo se $\det(A)$ è diverso da 0.

Calcolo della matrice inversa di una matrice quadrata invertibile con l'algoritmo di Gauss Jordan. Calcolo della caratteristica con l'algoritmo di Gauss Jordan (*).

SISTEMI LINEARI

Risoluzione di un sistema (omogeneo e non omogeneo) di k equazioni lineari in n incognite con l'algoritmo di Gauss Jordan. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo o non omogeneo. Teorema di Rouché e di Cramer.

SOTTOSPAZI VETTORIALI DI \mathbf{R}^n

Proprietà dei vettori linearmente dipendenti o indipendenti (*).

Legame tra la caratteristica di una matrice e la linearità o indipendenza delle sue righe o colonne.

Proprietà delle basi (*).

La caratteristica di una matrice come dimensione dello spazio generato dalle sue righe o dalle sue colonne (*).

Condizioni necessarie e sufficienti affinché un sottospazio abbia dimensione r .

Calcolo della caratteristica con il metodo degli orlati di Kronecker (*).

TRASFORMAZIONI LINEARI

Teoremi fondamentali sulle trasformazioni lineari di \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^k . Teorema della dimensione.

ORTOGONALITÀ

Sottospazio ortogonale ad un insieme e ad un sottospazio. Complemento ortogonale ad un sottospazio di \mathbf{R}^n .

Caratterizzazione del nucleo e dell'immagine di una trasformazione lineare in termini di complemento ortogonale.

Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (*). Proprietà delle matrici ortogonali (*).

AUTOVALORI, AUTOVETTORI, FORME QUADRATICHE

λ è un autovalore di A se e solo se $\det(A - \lambda I) = 0$. Proprietà delle matrici simili (*).

Una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se possiede n autovettori linearmente indipendenti.

Significato della diagonalizzabilità.

Proprietà degli autovalori e degli autovettori di una matrice quadrata simmetrica (*).

Una matrice quadrata simmetrica può essere diagonalizzata da una matrice ortogonale (*).

Legge d'inerzia di Sylvester (*). Regola dei segni di Cartesio (*).

Riduzione in forma canonica di una forma quadratica (*). Studio del segno di una forma quadratica mediante il segno degli autovalori, mediante il segno dei coefficienti del polinomio caratteristico e mediante il criterio di Sylvester.

INTEGRALI IMPROPRI E SERIE

Formule di integrazione (impropria) per sostituzione e per parti.

Criterio di confronto e di confronto asintotico per integrali impropri. (*)

Teorema sulle serie geometriche. Condizione necessaria per la convergenza di una serie.

Una serie a termini positivi è convergente o divergente positivamente.

Criterio di confronto con l'integrale improprio (*); serie armonica e armonica generalizzata.

Criterio di confronto, di confronto asintotico. Criterio della radice e del rapporto (*).

Una serie assolutamente convergente è convergente. Teorema di Leibniz sulle serie a termini di segno alterno (*).

Teorema sul raggio di convergenza di una serie di potenze (*).

Derivazione e integrazione termine a termine di una serie di potenze. (*)

LIMITI e CONTINUITA' per FUNZIONI VETTORIALI e per FUNZIONI di n VARIABILI

Un insieme X è aperto (rispett. chiuso) se e solo se il suo complementare è chiuso (rispett. aperto).

Una funzione vettoriale è convergente (continua) se e solo se tutte le sue componenti sono convergenti (continue).

Le funzioni costanti e le funzioni proiezione sono funzioni continue. Teoremi sui limiti. (*) .

Ulteriori esempi di funzioni continue di n variabili.

L'insieme delle soluzioni di una disequazione del tipo $f(x) < c$ o $f(x) > c$, (rispett. $f(x) \leq c$ o $f(x) \geq c$), è aperto, (chiuso)..

Teorema di Weierstrass (*), Teorema degli zeri, Teorema di Bolzano.

CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

L'integrale come limite di somme di Cauchy. (*). Proprietà dell'integrale. (*).

Integrabilità delle funzioni continue in un dominio normale all'asse x o y : formule di riduzione.

Integrabilità delle funzioni continue in un insieme chiuso e misurabile (*) e delle funzioni generalmente continue e limitate in un insieme misurabile (*).

Cambio di variabili in un integrale doppio (*). Calcolo di integrali mediante trasformazione in coordinate polari.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI n VARIABILI

Condizione necessaria per la differenziabilità: di una funzione di \mathbf{R}^n in \mathbf{R} .

Condizione sufficiente per la differenziabilità (*). Derivata della funzione composta (*).

Proprietà del gradiente. Iperpiano tangente e retta normale ad un insieme di livello.

Teorema di Schwartz sulla invertibilità dell'ordine di derivazione (*).

Punti di minimo e massimo relativo, punti di sella: condizioni necessarie. (*).

Punti di minimo e massimo relativo, punti di sella: condizioni sufficienti.

Caratterizzazione delle funzioni convesse, concave, ecc. (*). Funzioni convesse ed ottimizzazione (*).

Teoremi del Dini (*). Punti di minimo e massimo vincolato: moltiplicatori di Lagrange e di Kuhn Tucker (*).

(*) senza dimostrazione