ANALISI MATEMATICA 2

Anno accademico 2007-08

ELENCO delle DEFINIZIONI e TEOREMI del CORSO

DISPENSE

SINTESI DELLE LEZIONI

ELENCO DELLE DEFINIZIONI DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2

Serie numeriche

Serie numeriche convergenti e divergenti; somma di una serie. Serie oscillanti.
Serie geometrica. Serie armonica e serie armonica generalizzata.
Serie a termini positivi (o negativi). Serie a termini di segno alterno.
Serie assolutamente convergenti.

Integrali impropri

Integrale improprio di una funzione continua in un intervallo illimitato del tipo $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$ o di una funzione illimitata e continua in un intervallo semiaperto $[a, b[$ o $]a, b]$ o aperto $]a, b[$.

Calcolo differenziale per funzioni di piú variabili

Vettori di $\mathbf{R}^n$. Somma di due vettori di $\mathbf{R}^n$; prodotto di un numero reale per un vettore di $\mathbf{R}^n$.
Prodotto scalare di due vettori in $\mathbf{R}^n$. Norma e distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$.

Sfere aperte, sfere chiuse, superfici sferiche con centro $a \in \mathbf{R}^n$; intorni di un punto a di $\mathbf{R}^n$.

Punti interni, punti esterni, punti di frontiera, punti di accumulazione per una parte X di $\mathbf{R}^n$.

Insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi limitati, insiemi convessi e insiemi connessi per archi di $\mathbf{R}^n$.

Funzioni di una variabile a valori in $\mathbf{R}^k$; funzioni di n variabili a valori in R e in $\mathbf{R}^k$. Funzioni componenti di una funzione a valori in $\mathbf{R}^k$.

Convergenza e continuità per funzioni di n variabili a valori in $\mathbf{R}$ e per funzioni da $I \subseteq \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^k$.

Vettore derivata di una funzione da $I \subseteq \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^k$; suo significato geometrico.

Funzioni reali di due variabili reali. Grafico, linee coordinate e linee di livello.

Derivate parziali e derivate direzionali per funzioni reali di due variabili; significato geometrico. Funzioni reali di due variabili differenziabili in un punto.

Derivate parziali, derivate direzionali, gradiente per una funzione reale di n variabili.

Matrice Jacobiana di una funzione di $X \subset \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^k$ in un punto a interno ad X.

Differenziabilità per funzioni di $X \subset \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ e in $\mathbf{R}^k$.

Differenziale in un punto a interno ad un insieme $X \subset \mathbf{R}^n$ di una funzione $f : X \mapsto \mathbf{R}$ o $f : X \mapsto \mathbf{R}^k$.

Linee di livello, superfici di livello, insiemi di livello.

Derivate parziali di ordine superiore. Matrice hessiana di una funzione di $\mathbf{R}^n$ in R.
Polinomio di Taylor del secondo ordine.

Punti di minimo e massimo relativo ed assoluto. Punti di sella.

Forma quadratica associata ad una matrice quadrata simmetrica A di ordine n.

Forma quadratica definita (positiva o negativa), semidefinita (positiva o negativa), indefinita.

Autovalore ed autovettore di una matrice quadrata. Polinomio caratteristico di una matrice quadrata.

Funzioni (scalari) definite implicitamente da una equazione.

Funzioni (vettoriali) definite implicitamente da un sistema di equazioni.

Funzioni (strettamente) convesse o concave; esempi e proprietà.

Integrali doppi

Rettangolo e plurirettangolo in $\mathbf{R}^2$ e loro area. Intervallo e plurintervallo in $\mathbf{R}^n$ e loro misura.
Insieme misurabile secondo Peano Jordan in $\mathbf{R}^2$, e in $\mathbf{R}^n$ e sua misura. Insieme di misura nulla.
Dominio normale all'asse x o y.
Decomposizioni di un insieme misurabile di $\mathbf{R}^2$.

Somme inferiori e superiori, somme di Cauchy di una funzione limitata su un insieme misurabile di $\mathbf{R}^2$.

Integrabilità secondo Riemann di una funzione limitata su un insieme misurabile di $\mathbf{R}^2$ e suo integrale.

ELENCO DEI PRINCIPALI TEOREMI DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2

N.B. Dei teoremi contrassegnati da (*) non é richiesta la dimostrazione

Integrali impropri

Integrale improprio delle funzioni $1/|x|^{\alpha}$ ed $1/(x|\log(x)|^{\alpha})$.
Integrazione per parti e per sostituzione di un integrale improprio.
Criterio di confronto e di confronto asintotico per gli integrali impropri.

Serie numeriche

Condizione necessaria per la convergenza di una serie.
Serie a termini positivi.
Criterio di confronto con l'integrale improprio (*) ; serie armonica e armonica generalizzata.
Criterio di confronto, di confronto asintotico (*), della radice e del rapporto (*).
Teorema di Leibniz (*)

Teorema sul raggio di convergenza di una serie di potenze (*)

Calcolo del raggio di convergenza ρ : $\rho = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{|a_n|}$ oppure $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_n|/|a_{n+1}|$,
(purchè tali limiti esistano).
Derivazione e integrazione termine a termine di una serie di potenze (*)

Limiti e continuitá per funzioni di piú variabili

Una funzione a valori in $\mathbf{R}^k$ è convergente per $x \to a$, (rispettiv. continua in a), se e solo se le sue componenti sono convergenti per $x \to a$, (rispettiv. continue in a).

Teoremi sui limiti per funzioni di n variabili a valori in R e in $\mathbf{R}^k$. (*)

Esempi di funzioni continue: funzioni costanti, funzioni proiezione, polinomi, funzioni "elementari".

Proprietá degli insiemi aperti e degli insiemi chiusi.

Esempi di insiemi aperti o chiusi descritti da disequazioni o equazioni del tipo
$$f(x) < 0, \qquad f(x) \le 0, \qquad f(x) = 0.$$

Teorema di Weierstrass (*). Teorema di Bolzano. Teorema degli zeri.

Integrali doppi

Proprietá degli insiemi misurabili e della misura. (*)
Misurabilitá in $\mathbf{R}^2$ del rettangoloide di una funzione integrabile di una variabile e dei domini normali rispetto all'asse x o y.
Integrabilità delle funzioni limitate e generalmente continue in un insieme misurabile (ma non necessariamente chiuso) di $\mathbf{R}^2$. (*)
Integrabilità delle funzioni continue in un insieme chiuso e misurabile di $\mathbf{R}^2$.
Misurabilitá in $\mathbf{R}^3$ del cilindroide di una funzione continua in un insieme chiuso e misurabile di $\mathbf{R}^2$.
Formule di riduzione per l'integrale delle funzioni continue in un dominio normale.
L'integrale come limite di somme di Cauchy.(*)

Proprietà dell'integrale (*)
Cambio di variabili in un integrale doppio. (*)

Calcolo differenziale per funzioni di piú variabili

Condizione necessaria per la differenziabilità: se f è differenziabile in $\mathbf{x}^0$, allora:

a) f è continua in $\mathbf{x}^0$,

b) per ogni direzione $\mathbf{u}$ esiste la derivata di f in $\mathbf{x}^0$ nella direzione $\mathbf{u}$ e risulta

$$f'(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}^0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0).$$

Condizione sufficiente per la differenziabilità (*)

Derivata della funzione composta (*(Regola della catena)* .(*)

Proprietà del gradiente di una funzione in un punto $\mathbf{x}^0$:

a) $\nabla f(\mathbf{x}^0)$ è perpendicolare all'insieme di livello passante per $\mathbf{x}^0$,

b) $\nabla f(\mathbf{x}^0)$ rappresenta la direzione in cui f cresce il più rapidamente possibile.

Equazione della retta normale e del piano tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) alla superficie di livello di equazione $f(x, y, z) = \mathit{costante} = f(x_0, y_0, z_0)$:

Equazione del piano tangente alla superficie grafico di $g = g(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$.

Teorema di Fermat - Se $\mathbf{x}^0$ è punto di minimo o massimo relativo per $f : X \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, se $\mathbf{x}^0$ è interno ad X ed f è derivabile parzialmente in $\mathbf{x}^0$ rispetto a tutte le variabili, allora risulta:

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \qquad \text{cioè} \quad f_{x_i}(\mathbf{x}^0) = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, 2, \dots n.$$

Teorema di Schwartz sull'invertibilità dell' ordine di derivazione (*)

Proprietà delle forme quadratiche.

Criterio del segno degli autovalori (*).

Criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico (*).

Criterio di Sylvester (*)

Condizioni sufficienti perchè un punto sia punto di minimo o massimo relativo per una funzione di n variabili, ed in particolare per le funzioni di due variabili.

Teoremi del DINI (*).

Punti di minimo e massimo vincolato: moltiplicatori di Lagrange.

Caratterizzazione delle funzioni convesse, concave, ecc. (*)

Funzioni convesse ed ottimizzazione.

FUNZIONI TRASCURABILI E FUNZIONI EQUIVALENTI

In questo paragrafo vengono presentati i concetti di funzioni trascurabili e di funzioni equivalenti, che forniscono alcuni utili artifici per il calcolo di limiti che si presentano sotto le forme indeterminate $0 \cdot \infty, \quad 0/0, \quad \infty/\infty$, nonché per studiare il carattere delle serie numeriche e l' integrabilitá in senso improprio di una funzione.

In tutto ció che segue X una parte di $\mathbf{R}$ ed $x_0 \in \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é un punto di accumulazione di X. Cominciamo con il dare la seguente definizione

Definizione 1.1. *Date due funzioni f e g di X in $\mathbf{R}$, tali che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$, diciamo che f é* **trascurabile** *rispetto a g in x_0 o per $x \to x_0$ se risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Diciamo invece che f é **equivalente** *a g in x_0 o per $x \to x_0$ se risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Se $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$ si dice che f é asintoticamente trascurabile rispetto a g o asintoticamente equivalente a g.

Per dire che f é trascurabile rispetto a g o che é equivalente a g, adoperemo rispettivamente i simboli

$$\begin{array}{lcll} f << g & \text{o} & f(x) << g(x) & \text{in } x_o \text{ o per } x \to x_0 \\ f \simeq g & \text{o} & f(x) \simeq g(x) & \text{in } x_o \text{ o per } x \to x_0. \end{array}$$

Il motivo di tale denominazione é evidente. Se f é trascurabile rispetto a g in x_0, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)|,$$

e dunque intuitivamente i valori che f assume "vicino ad x_0" sono "infinitamente piú piccoli" dei valori di g. Invece se f é equivalente a g in x_0 allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$ si ha

$$0 < (1-\varepsilon)g(x) < f(x) < (1+\varepsilon)g(x) \quad \text{oppure} \quad (1+\varepsilon)g(x) < f(x) < (1-\varepsilon)g(x) < 0,$$

e dunque intuitivamente il valore che f assume "vicino ad x_0" é approssimativamente uguale al valore di g.

Osservazione 1.1 -. *E' evidente che se $f \simeq g$ in x_0 ed esiste il $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \in \hat{\mathbf{R}}$, allora anche il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed é uguale ad l. Pertanto per calcolare il limite per $x \to x_0$ di una funzione f basta cercare una funzione g equivalente ad f in x_0 di cui sia piú facile calcolare il limite.*

Diamo subito alcuni esempi di coppie di funzioni equivalenti o trascurabili l' una rispetto all' altra.

Esempio 1.1. - Se $\alpha < \beta$ allora $|x|^\alpha << |x|^\beta$ per $x \to \pm\infty$, mentre $|x|^\beta << |x|^\alpha$ per $x \to 0$.

Infatti $|x|^\alpha/|x|^\beta = |x|^{\alpha-\beta} \to 0$ per $x \to \pm\infty$ ed $|x|^\beta/|x|^\alpha = |x|^{\beta-\alpha} \to 0$ per $x \to 0$.

Esempio 1.2. - Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ é un polinomio di grado n, allora

a) p é asintoticamente trascurabile rispetto ad $|x|^\alpha$ per ogni $\alpha > n$,
b) p é asintoticamente equivalente alla funzione $g(x) = a_nx^n$.

Infatti si ha

$$\frac{p(x)}{|x|^\alpha} = \frac{a_0}{|x|^\alpha} + \frac{a_1}{|x|^{\alpha-1}} + \frac{a_2}{|x|^{\alpha-2}} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{|x|^{\alpha-n}} \to 0 \qquad \text{per } x \to \pm\infty$$
$$\frac{p(x)}{a_nx^n} = \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \quad \to 1 \qquad \text{per } x \to \pm\infty.$$

Esempio 1.3. - E' evidente che

a) se $\alpha < \beta$, allora $|\log x|^\alpha << |\log x|^\beta$ per $x \to +\infty$ e per $x \to 0^+$;
b) se $0 < a < b$, allora $a^x << b^x$ per $x \to +\infty$, mentre $b^x << a^x$ per $x \to -\infty$.

Esempio 1.4. - Ricordando che il limite per x che tende a 0 delle funzioni

$$\frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{\arcsin x}{x}, \qquad \frac{\text{tg } x}{x}, \qquad \frac{\text{arctg } x}{x}, \qquad \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \frac{\log\,(1+x)}{x}$$

uguale ad 1, si ha che per $x \to 0$

$$\sin x \simeq x, \quad \arcsin x \simeq x, \quad \text{tg } x \simeq x, \quad \text{arctg } x \simeq x, \quad e^x - 1 \simeq x, \quad \log\,(1+x) \simeq x.$$

D' altra parte ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

si ha che (per $x \to 0$),

$$1 - \cos x \simeq \frac{1}{2}x^2, \quad \log_a(1+x) \simeq x \log_a e = \frac{x}{\log a}, \quad a^x - 1 \simeq x \log a \quad (1+x)^\alpha - 1 \simeq \alpha x.$$

Esempio 1.5. - Se f tende ad $l \in \mathbf{R} - \{0\}$ per $x \to x_0$, allora f é equivalente in x_0 alla funzione costante $g(x) = l$;

E' altresí evidente che:

a) se f tende a 0 e g tende $l \in \hat{\mathbf{R}} - \{0\}$ per $x \to x_0$, allora $f << g$;
b) se f é convergente per $x \to x_0$ e g é divergente per $x \to x_0$, allora $f << g$;
c) se f é localmente limitata in x_0 e g é divergente per $x \to x_0$, allora $f << g$.

Esempio 1.6. - Per ogni polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ di grado n si ha chiaramente

$$\log|a_nx^n + \ldots\ldots + a_1x + a_0| = \log|x|^n + \log|a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots\ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}|,$$

e quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log|a_nx^n + \ldots\ldots + a_1x + a_0|}{\log|x|} = n,$$

Ne segue che $\log|p(x)| \simeq n\log|x|$ per $x \to \pm\infty$ per ogni polinomio p di grado n.

Esempio 1.7. - Adoperando la regola di De L'Hopital si vede che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log^n x}{x^\alpha}=0 \quad \lim_{x\to 0}|x|^\alpha\log^n x=0 \qquad \text{per ogni } n\in\mathbf{N},\ \alpha>0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to-\infty}x^n a^x=0 \qquad \text{per ogni } n\in\mathbf{N},\ \text{ se é } a>1.$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^n a^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \qquad \text{per ogni } n\in\mathbf{N},\ \text{se é } 0<a<1.$$

Ne segue che

$$\text{(a)}\quad \begin{cases}\log^n|x| << |x|^\alpha \ \text{ per } x\to\pm\infty\\ \log^n|x| << 1/|x|^\alpha \text{ per } x\to 0\end{cases} \qquad \text{per ogni } \alpha>0,\ n\in\mathbf{N}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{cases}|x|^\alpha\log^n|x| << |x|^\beta \text{ per } x\to\pm\infty,\\ |x|^\beta\log^n|x| << |x|^\alpha \text{ per } x\to 0\end{cases} \qquad \text{per ogni } n\in\mathbf{N}, \text{ e per ogni } \beta>\alpha,$$

$$\text{(c)}\quad \begin{cases}x^n << a^x \text{ per } x\to+\infty, \quad a^x << 1/x^n \text{ per } x\to-\infty \quad \text{per ogni } n\in\mathbf{N} \text{ se } a>1,\\ x^n << a^x \text{ per } x\to-\infty, \ a^x << 1/x^n \text{ per } x\to+\infty \text{ per ogni } n\in\mathbf{N} \text{ se } 0<a<1.\end{cases}$$

Proposizione 1.2. *Le seguenti proprietá sono pressocché evidenti:*

(1) $f \simeq f$,
(2) $f \simeq g \Longleftrightarrow g \simeq f$,
(3) $f \simeq g,\quad g \simeq h \implies f \simeq h$,
(4) $\begin{cases} f << g, \quad g \simeq h \implies f << h,\\ f \simeq g, \quad g << h \implies f << h,\\ f << g, \quad g << h \implies f << h,\end{cases}$
(5) $\begin{cases} f << g \implies cf << g \ \ ed \ \ f << cg \ \ \textit{per ogni } c\neq 0;\\ f \simeq g \implies cf \simeq cg \ \ \textit{per ogni } c\neq 0;\end{cases}$
(6) $f_1 << g$ *ed* $f_2 << g \implies f_1+f_2 << g$,
(7) *se* $f_1 << g_1$ *ed* $f_2 \simeq g_2$, *allora* $f_1f_2 << g_1g_2$ *ed* $f_1/f_2 << g_1/g_2$.
(8) $f \simeq g \implies f-g << f$ *ed* $f-g << g$.

L' importanza del concetto di funzioni equivalenti nel calcolo dei limiti é resa evidente dalla seguente proposizione la cui dimostrazione é peraltro ovvia conseguenza della definizione 1.

Proposizione 1.3.

(a) *Se* $f << g$ *allora* $f+g \simeq g$.
(b) *Se* $f \simeq g$, *allora* $\begin{cases} f^n \simeq g^n, \quad \sqrt[n]{f} \simeq \sqrt[n]{g} & \textit{per ogni } n\in\mathbf{N}\\ f^\alpha \simeq g^\alpha & \textit{per ogni } \alpha\in\mathbf{R}.\end{cases}$
(c) *Se* $f_1 \simeq g_1$ *ed* $f_2 \simeq g_2$, *allora* $f_1f_2 \simeq g_1g_2$ *ed* $f_1/f_2 \simeq g_1/g_2$.

Dalla precedente proposizione discende il seguente

Principio di sostituzione: una funzione che é prodotto o rapporto di piú fattori viene trasformata in una funzione equivalente in x_0 se su di essa si effettuano le seguenti operazioni:

(a) sostituire ciascun fattore con una funzione equivalente,
(b) sostituire la potenza o la radice di un fattore con la potenza o la radice di una funzione equivalente,
(c) in un fattore che sia somma di due o piú funzioni, possiamo trascurare gli addendi che sono trascurabili rispetto ad un addendo che possiamo chiamare il **termine dominante,** e sostituire l' intero fattore con il termine dominante.

Tale principio risulta di enorme utilitá quando si deve calcolare il limite per $x \to x_0$ di una funzione che sia prodotto o rapporto di funzioni che tendono a 0 o a $\pm\infty$. Infatti al termine di tale processo di sostituzioni (e di eventuali semplificazioni), avremo ottenuto una funzione g equivalente ad f, (avente quindi lo stesso limite di f), di cui é in genere molto piú facile calcolare il limite per $x \to x_0$.

Esempio 1.8. - Volendo calcolare il limite per $x \to +\infty$ della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{-x^5 + 3x^3 - 2x + 2},$$

si puó osservare che

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \simeq x^3, \quad -x^5 + 3x^3 - 2x + 2 \simeq -x^5, \qquad \text{e quindi } f(x) \simeq x^2/(-x^5) = -x^{-2}.$$

Ne segue che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^{-2} = 0$.

In generale se

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad \text{e} \qquad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_k x^k$$

sono due polinomi di grado rispettivamente n e k, allora $p(x)/q(x) \simeq a_n x^n / b_k x^k$, e quindi si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < k, \\ a_n/b_k & \text{se } n = k, \\ (a_n/b_k)(+\infty) & \text{se } n > k. \end{cases}$$

Analogamente si calcola il limite di $p(x)/q(x)$ per $x \to -\infty$.

Esempio 1.9. - Volendo calcolare il limite per $x \to +\infty$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^5 + 3x^3 - 2x + 2},$$

si puó osservare che $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \simeq x^3$ e $x^5 + 3x^3 - 2x + 2 \simeq x^5$ e quindi che

$$\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x - 5} \simeq x^{3/2} \qquad \text{mentre} \qquad -\sqrt{x^5 + 3x^3 - 2x + 2} \simeq -x^{5/2}.$$

Se ne deduce che

$$\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x - 5} \simeq x^{3/2} << -x^{5/2} \simeq -\sqrt{x^5 + 3x^3 - 2x + 2},$$

e dunque che

$$f(x) \simeq -\sqrt{x^5 + 3x^3 - 2x + 2} \simeq -x^{5/2}.$$

Ne segue che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^{5/2} = -\infty$.

Con un procedimento simile si puó calcolare il limite per x che tende a $+\infty$ o a $-\infty$ di una funzione del tipo $f(x) = \sqrt[n]{p(x)} - \sqrt[m]{q(x)}$, dove p e q sono due polinomi di grado k ed l rispettivamente, e $k/n \neq l/m$.

Esempio 1.10. - Volendo calcolare il limite per $x \to +\infty$ delle funzioni

$$f(x) = \frac{2^x + x^3 - 2x + 5}{x^4 + x^2 \log x - 1}, \qquad g(x) = \frac{x^2 \log(x^3 - 3x^2 - x + 5) - 3x \log^3(x^2 - 1)}{3^x - x^2 + x \log^2(3x^2 - x + 4)},$$

possiamo osservare che:

(1) x^3, $-2x$ e 5 sono trascurabili rispetto a 2^x e quindi $2^x + x^3 - 2x + 5 \simeq 2^x$;
(2) $x^2 \log x$ e -1 sono trascurabili rispetto a x^4 e quindi $x^4 + x^2 \log x - 1 \simeq x^4$;
(3) $\log(x^3 - 3x^2 - x + 5) \simeq 3 \log x$ e quindi $x^2 \log(x^3 - 3x^2 - x + 5) \simeq 3x^2 \log x$;
analogamente $\log(x^2 - 1) \simeq 2 \log x$ e quindi $-3x \log^3(x^2 - 1) \simeq -3x(2 \log x)^3 = -24x \log^3 x$;
ne segue che $-3x \log^3(x^2 - 1) << x^2 \log(x^3 - 3x^2 - x + 5)$ e dunque

$$x^2 \log(x^3 - 3x^2 - x + 5) - 3x \log^3(x^2 - 1) \simeq x^2 \log(x^3 - 3x^2 - x + 5) \simeq 3x^2 \log x$$

.

(4) $\log(3x^2 - x + 4) \simeq 2 \log x$ e quindi $x \log^2(3x^2 - x + 4) \simeq x(2 \log x)^2 = 4x \log^2 x << 3^x$;
d' altra parte é $-x^2 << 3^x$ e quindi $3^x - x^2 + x \log^2(3x^2 - x + 4) \simeq 3^x$.

Ne segue che

$$f(x) \simeq 2^x/x^4, \qquad g(x) \simeq \frac{3x^2 \log x}{3^x}$$

e dunque $\quad f(x) \to +\infty, \quad$ mentre $\quad g(x) \to 0 \quad$ per $x \to +\infty$.

Esempio 1. 11. - Volendo calcolare il limite per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{(x + 2x^2) \sin^3 x \sqrt[3]{\arcsin^2 x}}{(\text{tg}\ ^2 x + 5x^4)(\log_3(1 + x))^2(\sqrt{1 + x} - 1)^{1/3}},$$

possiamo osservare che:

(1) $2x^2$ é trascurabile rispetto ad x e quindi $x + 2x^2 \simeq x$;
(2) $\sin x \simeq x$ e quindi $\sin^3 x \simeq x^3$,
(3) $\arcsin x \simeq x$ e quindi $\sqrt[3]{\arcsin^2 x} \simeq x^{2/3}$,
(4) $\text{tg}\ x \simeq x$ e quindi $\text{tg}\ ^2 x \simeq x^2$; d' altra parte $5x^4 << x^2$ e quindi $5x^4 << \text{tg}\ ^2 x \simeq x^2$; dunque $\text{tg}\ ^2 x + 5x^4 \simeq x^2$;
(5) $\log_3(1 + x) \simeq x/\log 3$ e quindi $(\log_3(1 + x))^2 \simeq x^2/\log^2 3$;
(6) $\sqrt{1 + x} - 1 \simeq x/2$ e quindi $(\sqrt{1 + x} - 1)^{1/3} \simeq (x/2)^{1/3}$.

Di conseguenza f é equivalente alla funzione

$$g(x) = \frac{x \cdot x^3 \cdot x^{2/3}}{x^2 \cdot (x^2/\log^2 3) \cdot (x/2)^{1/3}} = (\sqrt[3]{2} \log^2 3) x^{1/3};$$

e dunque si ha che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

La seguente proposizione consente di potenziare ulteriormente il principio di sostituzione.

Proposizione 1.4. *Siano X ed Y due parti di $\mathbf{R}$, sia f una funzione reale definita in X tale che $f(X) \subset Y$, e siano g_1 e g_2 due funzioni reali definite in Y.*
Supponiamo che
i) *$x_0 \in \hat{\mathbf{R}}$ é un punto di accumulazione di X ed esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \hat{\mathbf{R}}$;*
ii) *y_0 é un punto di accumulazione per Y;*
iii) *esiste un intorno J di x_0 tale che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in X \cap J - \{x_0\}$.*
Ebbene se $\quad g_1 \simeq g_2 \quad$ in $\; y_0$, $\quad$ allora $\; g_1 \circ f \simeq g_2 \circ f \quad$ in $\; x_0$.

La dimostrazione é ovvia in virtú del teorema sul limite della funzione composta. Si noti che la iii) é sicuramente soddisfatta se $y_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$ o se f é iniettiva (perlomeno localmente).

Esempio 1. 12. - Essendo $\sin y \simeq y$ in 0, allora

$$\sin(x - x_0) \simeq x - x_0 \quad \text{in } x_0,$$
$$\sin \alpha x \simeq \alpha x, \quad \sin x^n \simeq x^n, \quad \sin \sqrt[n]{x} \simeq \sqrt[n]{x}, \qquad \text{in } 0$$
$$\sin \frac{1}{x} \simeq \frac{1}{x}, \quad \sin \frac{1}{n} \simeq \frac{1}{n}, \quad \sin \frac{1}{x^\alpha} \simeq \frac{1}{x^\alpha} \qquad \text{in } +\infty, \text{ per ogni } \alpha > 0.$$

Risultati simili si ottengono sostituendo la funzione seno con le funzioni $tg, \arcsin, \arctan$.

Esempio 1.13. - Essendo $log(1 + y) \simeq y$ in 0, allora

$$log(1 + x^n) \simeq x^n, \quad log(1 + \sqrt[n]{x}) \simeq \sqrt[n]{x} \qquad \text{in } 0 \quad \text{per ogni } n,$$
$$log(1 + \sin x^n) \simeq \sin x^n \simeq x^n, \quad log(1 + \sin^n x) \simeq \sin^n x \simeq x^n, \qquad \text{in } 0 \text{ per ogni } n.$$

Esempio 1.14. - Calcolare il limite per $x \to 0^+$ della funzione

$$f(x) = \frac{(5^{\sqrt[3]{\arcsin^2 x}} - 1) \log_2(1 + \sin(x + x^3))}{\arctan^3 \sqrt{x^2 - 2x^3}(1 - \cos \sqrt[3]{x^2})}.$$

Osserviamo che:

(1) essendo $5^y - 1 \simeq y \log 5$ in $y_0 = 0$, e $\sqrt[3]{\arcsin^2 x} \to 0$ per $x \to 0$, si ha
$$(5^{\sqrt[3]{\arcsin^2 x}} - 1) \simeq \sqrt[3]{\arcsin^2 x} \cdot \log 5 \simeq x^{2/3} \log 5 \quad \text{in } \; x = 0;$$
(2) essendo $\log_2(1 + y) \simeq y / \log 2$ in $y_0 = 0$ e $\sin(x + x^3) \to 0$ per $x \to 0$, si ha che
$$\log_2(1 + \sin(x + x^3)) \simeq \sin(x + x^3)/ \log 2 \simeq (x + x^3)/ \log 2 \simeq x/ \log 2,$$
poiché $x^3 << x$ in 0;
(3) essendo $\arctan y \simeq y$ in $y_0 = 0$ e $\sqrt{x^2 - 2x^3} \to 0$ per $x \to 0$, sará $\arctan(\sqrt{x^2 - 2x^3}) \simeq \sqrt{x^2 - 2x^3}$; d' altra parte, essendo $-2x^3 << x^2$, si ha che $x^2 - 2x^3 \simeq x^2$ e quindi $\sqrt{x^2 - 2x^3} \simeq \sqrt{x^2} = x$; ne segue che
$$\arctan \sqrt{x^2 - 2x^3} \simeq x \quad \text{e quindi} \quad \arctan^3 \sqrt{x^2 - 2x^3} \simeq x^3;$$
(4) essendo $1 - \cos y \simeq y^2/2$ per $y \to 0$ e $\sqrt[3]{x^2} \to 0$ per $x \to 0$, si ha:
$$(1 - \cos \sqrt[3]{x^2}) \simeq x^{4/3}/2.$$

Di conseguenza f é equivalente per $x \to 0$ alla funzione

$$g(x) = \frac{x^{2/3} \log 5 \cdot (x/ \log 2)}{x^3 \cdot x^{4/3}/2} = \frac{\log 5}{\log 2}\, x^{-8/3} \quad \to +\infty \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto f diverge positivamente per $x \to 0$.

INTEGRALI IMPROPRI

n. 1 - Definizioni

Vogliamo ora estendere il concetto di integrale di una funzione, in modo da poter calcolare l'area di una regione piana non limitata. Ad esempio questo è il caso del rettangoloide

$$R_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

di una funzione continua e positiva $f : X \to \mathbf{R}$, se X è un intervallo illimitato del tipo $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ o $]-\infty,+\infty[$, oppure se X è un intervallo limitato del tipo $[a,b[$, $]a,b]$ o $]a,b[$, ma risulta

$$\lim_{x\to b} f(x) = +\infty, \qquad \text{e/o} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

A tal fine osserviamo che se f è una funzione continua e positiva in $X = [a,b[$, (rispettivamente in $X = [a,+\infty[$), allora per ogni $x \in]a,b[$, (rispettivamente $x \in]a,+\infty[$), si ha che $\int_a^x f(t)\,dt$ rappresenta l'area del rettangoloide della restrizione di f all' intervallo $[a,x]$.

La figura 1 mostra allora come sia del tutto ragionevole porre per definizione:

$$\text{Area di } R_f = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt, \qquad (\text{rispettiv.} \quad \text{Area di } R_f = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt),$$

(ovviamente nell' ipotesi che tale limite esista).
Analogamente la figura 2 mostra che se f è una funzione continua e positiva in $X =]a,b]$, (rispettiv. in $X =]-\infty,b]$), allora è ragionevole porre per definizione:

$$\text{Area di } R_f = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,dt \qquad (\text{rispettiv.} \quad \text{Area di } R_f = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\,dt).$$

Questo giustifica la seguente definizione.

Definizione 1.1. *Se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione reale continua nell' intervallo $X = [a,b[$, con b numero reale maggiore di a o $b = +\infty$, oppure $X =]a,b]$, con a numero reale minore di b o $a = -\infty$, si dice* **integrale improprio** *di f tra a e b, (o esteso all'intervallo X), l' elemento di $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ definito da*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt, & \text{se } X = [a,b[, \\ \\ \lim\limits_{x\to a}\int_x^b f(t)\,dt & \text{se } X =]a,b], \end{cases}$$

purchè tale limite esista.

Si dice inoltre che f è integrabile in senso improprio tra a e b, (o che f ha un integrale improprio convergente), se l' integrale improprio di f tra a e b esiste ed è un numero reale.
Si dice invece che f ha un integrale improprio divergente (positivamente o negativamente) se l' integrale improprio di f tra a e b è uguale a $+\infty$ o $-\infty$.

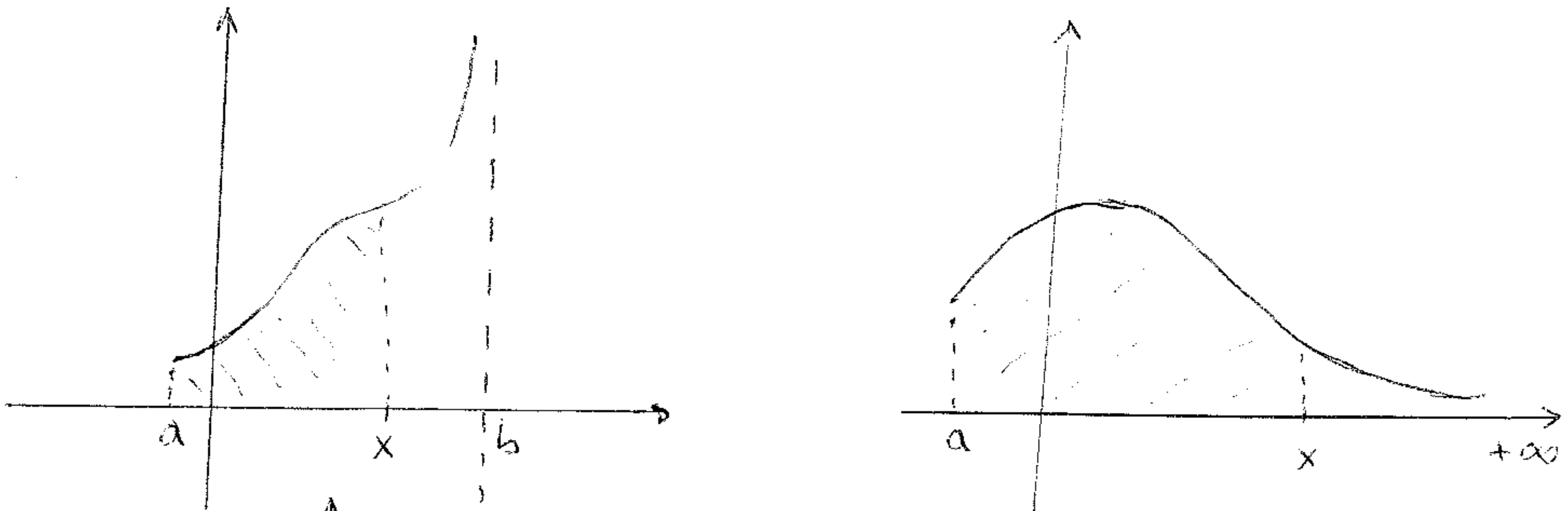

Fig. 1

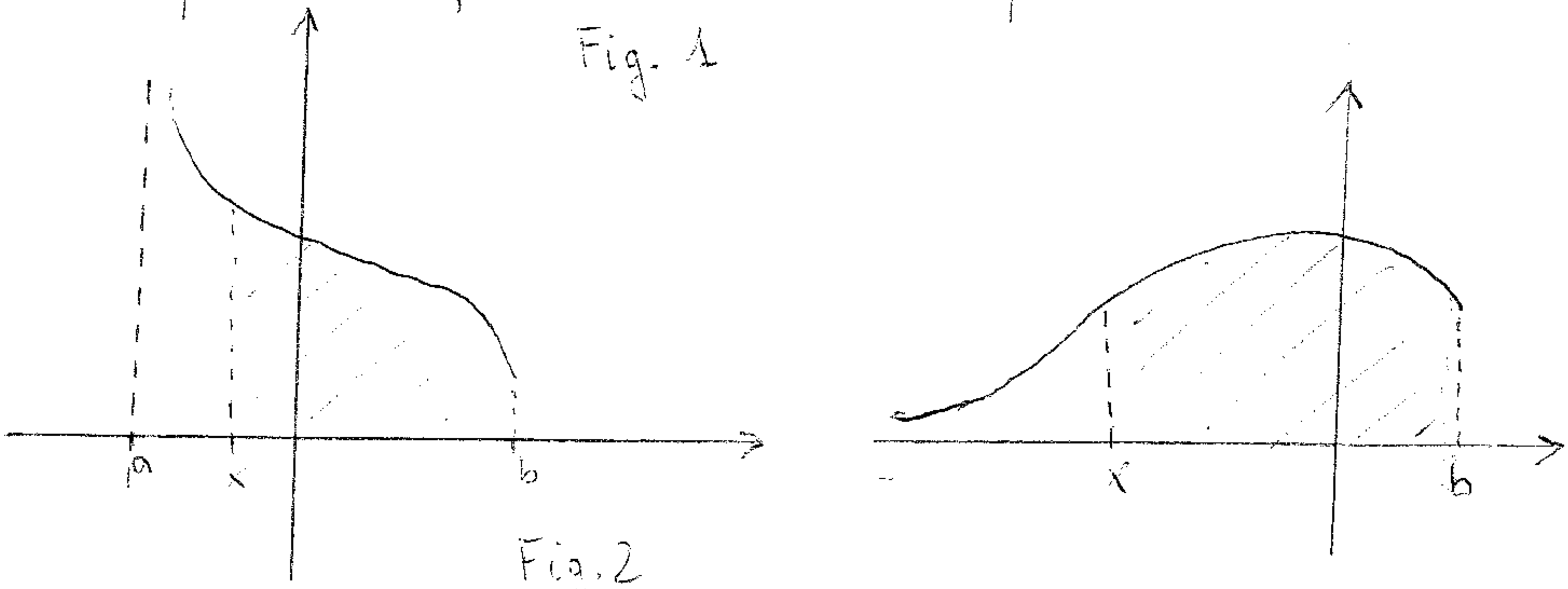

Fig. 2

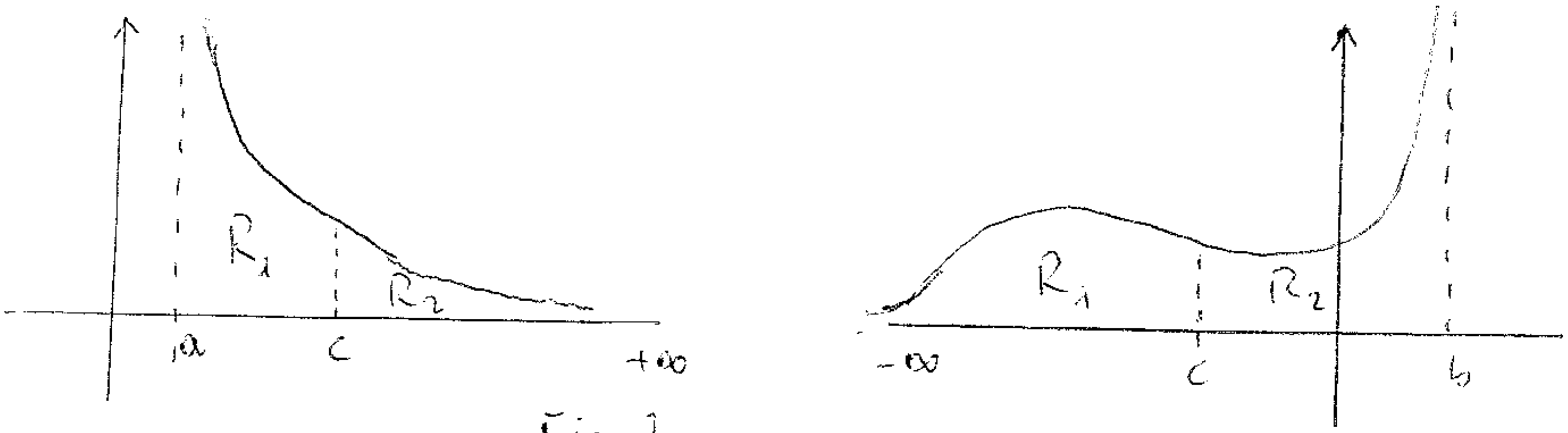

Fig. 3

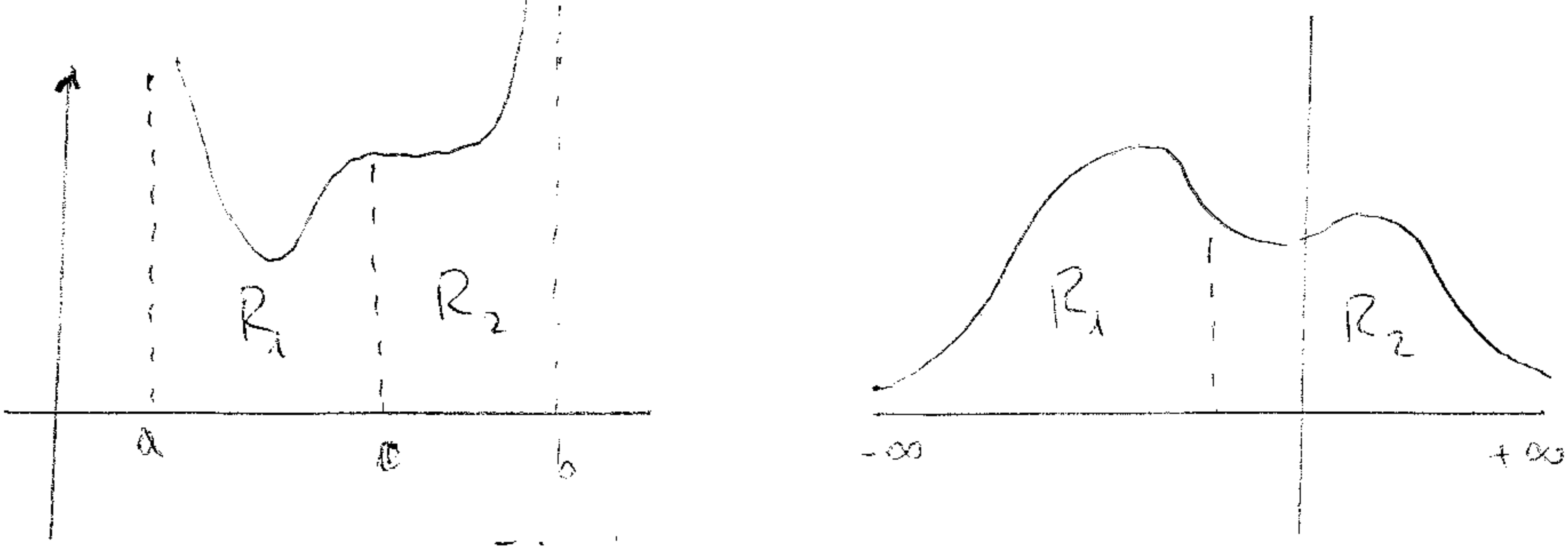

Fig. 4

Osservazione 1.2 - Se f è continua in $X = [a, b[$, (rispettivamente $X =]a, b]$), e $c \in]a, b[$, allora l' integrale improprio di f tra a e b esiste se e solo se esiste l' integrale improprio di f tra c e b (rispettivamente tra a e c), e risulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

con le consuete convenzioni: $+\infty + \alpha = +\infty, \quad -\infty + \alpha = -\infty$, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.
Infatti, se ad esempio risulta $X = [a, b[$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x\to b}\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Perciò per provare che f ha integrale improprio convergente o divergente tra a e b sarà sufficiente provare che questo accade per la restrizione di f ad un opportuno intorno sinistro di b, (rispettiv. ad un opportuno intorno destro di a).

Vogliamo ora estendere il concetto di integrale improprio al caso di funzioni definite in un intervallo aperto X del tipo $]a, b[$, $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$.
A tal fine osserviamo che se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione reale continua e positiva nell' intervallo $X =]a, b[$, con $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, allora, preso $c \in]a, b[$ si ha evidentemente che il rettangoloide R_f di f è l' unione dei due insiemi R_1 ed R_2, rettangoloidi delle restrizioni di f agli intervalli $]a, c]$ e $[c, b[$, (vedi figure 3 e 4).

Pertanto è naturale porre

$$\text{Area } R_f = \text{ Area } R_1 + \text{ Area } R_2.$$

Questo giustifica la seguente

Definizione 1.3. *Se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione reale continua nell' intervallo $X =]a, b[$, con $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, allora, preso arbitrariamente $c \in]a, b[$, si dice integrale improprio di f tra a e b l' elemento di $\hat{\mathbf{R}}$ definito da*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a}\int_x^c f(t)\,dt + \lim_{x\to b}\int_c^x f(t)\,dt,$$

purchè tali limiti esistano e non diano origine ad una forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Si dice inoltre che f è integrabile in senso improprio tra a e b, (o che f ha un integrale improprio convergente), se l' integrale improprio di f tra a e b esiste ed è un numero reale, cioè se f è integrabile in senso improprio tra a e c e tra c e b.
Si dice invece che f ha un integrale improprio divergente (positivamente o negativamente) se l' integrale improprio di f tra a e b è uguale a $+\infty$ o $-\infty$.

Osservazione 1.4. - La precedente definizione ha senso poichè si vede facilmente che essa non dipende dalla scelta dell' elemento c di $]a, b[$.
Infatti se $c_1, c_2 \in]a, b[$, $c_1 < c_2$, allora per la Osservazione 1.2 si ha che:
f è dotato di integrale improprio tra a e c_2 se e solo se f è dotato di integrale improprio tra a e c_1,
f è dotato di integrale improprio tra c_1 e b se e solo se f è dotato di integrale improprio tra c_2 e b.
Risulta inoltre:

$$\int_a^{c_2} f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \qquad \int_{c_1}^b f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^b f(x)\,dx.$$

Ne segue che f è dotato di integrale improprio tra a e c_1 e tra c_1 e b se e solo se f è dotato di integrale improprio tra a e c_2 e tra c_2 e b e risulta

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Definizione 1.5. *Se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione reale continua in X ed X è l'unione di due intervalli adiacenti X_1 ed X_2, dove X_1 è uno degli intervalli $[a, c[$ o $]a, c[$ con $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ed X_2 è uno degli intervalli $]c, b]$ o $]c, b[$ con $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, allora si dice integrale improprio di f tra a e b l' elemento di $\hat{\mathbf{R}}$ definito da*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

purchè entrambi gli integrali impropri esistano e non diano origine alla forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Si dice inoltre che f è integrabile in senso improprio tra a e b, (o che f ha un integrale improprio convergente), se l' integrale improprio di f tra a e b esiste ed è un numero reale, cioè se f è integrabile in senso improprio tra a e c e tra c e b.
Si dice invece che f ha un integrale improprio divergente (positivamente o negativamente) se l' integrale improprio di f tra a e b è uguale a $+\infty$ o $-\infty$.

Osservazione 1.6. - La definizione precedente può essere estesa in maniera ovvia al caso di funzioni definite nell' insieme X unione di un numero finito di intervalli $X_1,\ X_2,\ \ldots X_n$ a due a due adiacenti:

$$\int_X f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{X_i} f(x)\,dx.$$

Osservazione 1.7. - In base alle considerazioni che hanno motivato le precedenti definizioni, se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, positiva e integrabile in senso improprio in X, dove X è un intervallo semiaperto o aperto, limitato o illimitato, oppure è l' unione di due o più intervalli adiacenti, allora l' area del rettangoloide definito da f è **per definizione** l' integrale improprio di f esteso ad X.
Se f non è positiva, ma $|f|$ è integrabile in senso improprio, allora l' area del rettangoloide definito da f è **per definizione** l' integrale improprio di $|f|$.

Osservazione 1.8. - In tutte le precedenti definizioni (e nei paragrafi seguenti) l'ipotesi di continuitá di f non é indispensabile; essa serve a garantire che sia integrabile (secondo Riemann) la restrizione di f a qualunque intervallo chiuso e limitato contenuto nell'insieme di definizione di f e puó essere dappertutto sostituita da tale ultima condizione.

n.2 - Alcuni esempi

Esempio 2.1. - Se f è una funzione costante, $f(x) = K$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ si ha:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } K > 0, \\ -\infty & \text{se } K < 0, \\ 0 & \text{se } K = 0. \end{cases}$$

Si ha infatti:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x K\,dt = \lim_{x\to+\infty} K(x-a), \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b K\,dt = \lim_{x\to-\infty} K(b-x)$$

e di qui discende la tesi.

Esempio 2.2. - Posto $f(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha

$$\int_0^{+\infty} a^x\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x a^t\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x - 1}{\log a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ -1/\log a & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^0 a^x\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 a^t\,dt = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - a^x}{\log a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1, \\ 1/\log a & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^x\,dx = \int_{-\infty}^0 a^x\,dx + \int_0^{+\infty} a^x\,dx = +\infty, \qquad \text{per ogni } a > 0, a \neq 1.$$

Esempio 2.3. - Considerata la funzione $f(x) = 1/x$ per ogni $x \neq 0$, si ha:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \log x - \log 1 = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \log 1 - \log t = +\infty.$$

Analogamente si prova che:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx = -\infty,$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x}\,dx = (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

Invece $1/x$ non ha integrale improprio tra -1 ed 1 o tra $-\infty$ e $+\infty$, poichè esso assumerebbe la forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Esempio 2.4. - Per ogni $p \neq 1$ si ha:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{se } p>1,\\ +\infty & \text{se } p<1,\end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p>1,\\ 1/(1-p) & \text{se } p<1,\end{cases}$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty \qquad \text{per ogni } p>0, p\neq 1.$$

n. 3 - Alcune Osservazioni ed Ulteriori Esempi

In tutto il presente paragrafo X denoterà uno degli intervalli $[a,b[$, $]a,b]$, o $]a,b[$, con $a\in\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ e $b\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$.

Osservazione 3.1. - Cominciamo con l'osservare che porremo per definizione

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

coerentemente con quanto fatto nel caso di funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

Osservazione 3.2. - Se $f: X\to\mathbf{R}$ è dotata di integrale improprio tra a e b, allora per ogni $\alpha\neq 0$ si ha:

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx,$$

con le consuete convenzioni

$$\alpha\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0,\\ -\infty & \text{se } \alpha<0,\end{cases} \qquad \alpha\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha>0,\\ +\infty & \text{se } \alpha<0.\end{cases}$$

In particolare, (con la convenzione $-(+\infty)=-\infty$ e $-(-\infty)=+\infty$), si ha

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Infatti se ad esempio è $X=[a,b[$, allora si ha:

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \lim_{x\to b}\int_a^x \alpha f(t)\,dt = \lim_{x\to b}\alpha\int_a^x f(t)\,dt = \alpha\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt = \alpha\int_a^b f(x)\,dx.$$

Osservazione 3.3. - In maniera simile si prova che se f e g sono dotate di integrale improprio tra a e b, allora si ha:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

purchè non si presenti la forma indeterminata $+\infty-\infty$.

Osservazione 3.4. - Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale può essere esteso agli integrali impropri, nel senso che se $f : X \to \mathbf{R}$ è continua in X, se F è una qualunque primitiva di f e poniamo per convenzione:

$$F(a) = \lim_{x\to a} F(x), \qquad \text{e / o} \qquad F(b) = \lim_{x\to b} F(x),$$

allora l' integrale improprio di f tra a e b è dato da

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x),$$

purchè tali limiti esistano e non diano origine alla forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Infatti, se ad esempio è $X = [a, b[$, per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a) = F(b) - F(a).$$

In maniera analoga si procede se $X =]a, b]$.
Infine, se $X =]a, b[$, allora preso arbitrariamente $c \in]a, b[$ si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a).$$

Esempio 3.5. - Consideriamo le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{per ogni } x \in]-1, 1[, \qquad g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

Le funzioni $F(x) = \text{ arcsen } x$ e $G(x) = \text{arctg } x$ sono primitive di f e g rispettivamente. Dalla Osservazione precedente segue allora che

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arcsen } 1 - \text{ arcsen } (-1) = \lim_{x\to 1} \text{ arcsen } x - \lim_{x\to -1} \text{ arcsen } x = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctg } (+\infty) - \text{arctg } (-\infty) = \lim_{x\to+\infty} \text{arctg } x - \lim_{x\to-\infty} \text{arctg } x = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi$$

Pertanto le funzioni $1/\sqrt{1-x^2}$ e $1/(1+x^2)$ sono integrabili rispettivamente tra -1 ed 1 e tra $-\infty$ e $+\infty$.

Osservazione 3.6. - (Formula di integrazione impropria per parti) -
Il metodo di integrazione per parti può essere esteso agli integrali impropri, nel senso che se f e g sono funzioni derivabili con derivata continua in X, allora si ha

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

con la convenzione che

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x), \quad g(a) = \lim_{x\to a} g(x), \qquad \text{ed} \qquad f(b) = \lim_{x\to b} f(x), \quad g(b) = \lim_{x\to b} g(x),$$

purchè tali limiti e gli integrali impropri esistano e non diano origine alla forma indeterminata $+\infty-\infty$.

Infatti, se ad esempio risulta $X = [a, b[$, allora

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx &= \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)g'(t)\,dt = \lim_{x\to b}\,[f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\,dt\,]\\ &= \lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \lim_{x\to b}\int_a^x f'(t)g(t)\,dt\\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Esempio 3.7. - Ad esempio si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx &= \int_0^{+\infty} x^2D(-e^{-x})\,dx = \lim_{x\to+\infty} -x^2e^{-x} - \lim_{x\to 0} -x^2e^{-x} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}\,dx\\ &= \int_0^{+\infty} 2xD(-e^{-x})\,dx = \lim_{x\to+\infty} -2xe^{-x} - \lim_{x\to 0} -2xe^{-x} - \int_0^{+\infty} -2e^{-x}\,dx\\ &= \lim_{x\to+\infty} -2e^{-x} - \lim_{x\to 0} -2e^{-x} = 0 - (-2) = 2\end{aligned}$$

Osservazione 3.8. - (Formula di integrazione impropria per sostituzione) -
Il metodo di integrazione per sostituzione può essere esteso agli integrali impropri, nel senso che se f è una funzione derivabile con derivata continua in X, e g è continua in $Y = f(X)$, allora si ha

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy,$$

con la convenzione che

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x),, \qquad \text{ed} \qquad f(b) = \lim_{x\to b} f(x),$$

purchè tali integrali impropri esistano.

Infatti se G è una primitiva di g, allora $G\circ f$ è una primitiva di $g(f(x))f'(x)$, e quindi si ha:

$$\begin{aligned}\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx &= \lim_{x\to b} G(f(x)) - \lim_{x\to a} G(f(x))\\ &= \lim_{y\to f(b)} G(y) - \lim_{y\to f(a)} G(y) = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy.\end{aligned}$$

Esempio 3.9. - Consideriamo le funzioni $f(x) = \log x$ e $g(y) = 1/|y|^p$; si ha allora

$$f'(x) = 1/x, \quad f(1) = \log 1 = 0, \quad f(2) = \log 2, \quad f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$$

e quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{x(\log x)^p}\,dx = \int_0^{\log 2} \frac{1}{y^p}\,dy \quad \begin{cases} \in \mathbf{R} & \text{se } p < 1,\\ = +\infty & \text{se } p \geq 1.\end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^p}\, dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^p}\, dy \quad \begin{cases} \in \mathbf{R} & \text{se } p > 1, \\ = +\infty & \text{se } p \leq 1. \end{cases}$$

Esempio 3.10 - Per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$, posto $y = x - x_0,\ dy = dx$, si ha:

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{|x - x_0|^p}\, dx = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{y^p}\, dy \quad \begin{cases} \in \mathbf{R} & \text{se } p < 1, \\ = +\infty & \text{se } p \geq 1. \end{cases}$$

Analogamente, posto $y = x_0 - x$, $dy = -dx$, si ha:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{1}{|x - x_0|^p}\, dx = \int_{\varepsilon}^{0} -\frac{1}{y^p}\, dy = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{y^p}\, dy \quad \begin{cases} \in \mathbf{R} & \text{se } p < 1, \\ = +\infty & \text{se } p \geq 1. \end{cases}$$

Pertanto la funzione $1/(|x - x_0|^p)$ ha un integrale improprio convergente (rispett. divergente positivamente) in ogni intorno sinistro o destro di x_0 se $p < 1$ (rispett. se $p \geq 1$).

Osservazione 3.11. - In generale, se $a \in \mathbf{R}$ ed f é continua in $]a, b]$, allora, posto $y = x - a,\ dy = dx$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_0^{b-a} f(a + y)\, dy.$$

Analogamente, se $b \in \mathbf{R}$ ed f é continua in $[a, b[$, allora, posto $y = b - x,\ dy = -dx$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{b-a}^{0} -f(b - y)\, dy = \int_0^{b-a} f(b - y)\, dy.$$

Pertanto qualunque integrale improprio esteso ad un intervallo semiaperto e limitato puó essere trasformato in un integrale improprio esteso ad un intorno destro di 0.

Osservazione 3.12. - Risulta:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(-y)\, dy,$$

con la consueta convenzione $-(+\infty) = -\infty$ e $-(-\infty) = +\infty$.
Infatti, posto $y = -x,\ dy = -dx$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-a}^{-b} -f(-y)\, dy = \int_{-b}^{-a} f(-y)\, dy.$$

In particolare, se $a > 0$ ed f è una funzione continua nell'intervallo $]-\infty, -a]$ o nell'intervallo $[-a, 0[$, allora si ha:

$$\int_{-\infty}^{-a} f(x)\, dx = \int_a^{+\infty} f(-y)\, dy \qquad \text{oppure} \qquad \int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_0^a f(-y)\, dy.$$

Pertanto qualunque integrale improprio esteso ad un intorno di $-\infty$ puó essere trasformato in un integrale improprio esteso ad un intorno di $+\infty$, e qualunque integrale improprio esteso ad un intorno sinistro di 0 puó essere trasformato in un integrale improprio esteso ad un intorno destro di0.

Esempio 3.13. - Ad esempio risulta:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^p}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{|-y|^p}\,dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^p}\,dy \quad \begin{cases} \in \mathbf{R} & \text{se } p > 1, \\ = +\infty & \text{se } p \le 1; \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{|x|^p}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{|-y|^p}\,dy = \int_0^{1} \frac{1}{y^p}\,dy \quad \begin{cases} \in \mathbf{R} & \text{se } p < 1, \\ = +\infty & \text{se } p \ge 1. \end{cases}$$

Esempio 3.14. - Posto $y = \log x$, $dy = (1/x)dx$, essendo $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$ e $\log(1/2) = -\log 2$, si ha:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\log x|^p}\,dx = \int_{-\infty}^{-\log 2} \frac{1}{|y|^p}\,dy = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{|-y|^p}\,dy = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^p}\,dy \quad \begin{cases} \in \mathbf{R} & \text{se } p > 1, \\ = +\infty & \text{se } p \le 1. \end{cases}$$

In maniera analoga si possono calcolare gli integrali impropri della funzione $1/(x|\log|x||^p)$ negli intervalli $]-\infty,-2], [-2,-1[,]-1,-1/2], [-1/2,0[$.

n. 4 - Alcune condizioni necessarie o sufficienti di Integrabilità

Anche nel presente paragrafo X denoterà l' intervallo $[a,b[$ o l' intervallo $]a,b]$, con $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Vogliamo dare alcune condizioni che garantiscono che l' integrale improprio esteso ad X di una funzione f è convergente o divergente.
Cominciamo con la seguente

Proposizione 4.1. *Se f è continua in $X = [a,b[$, ed esiste $c \in]a,b[$, tale che*

$$f(x) \ge 0 \quad (\textit{rispett. } \le 0) \qquad \textit{per ogni } \; x \in [c,b[\tag{4.1}$$

allora l' integrale improprio di f tra a e b esiste ed è convergente o divergente positivamente (rispett. convergente o divergente negativamente) .

La tesi sussiste ancora se $X =]a,b]$ e nella (4.1) si sostituisce l'intervallo $[c,b[$ con $]a,c]$.

Dim.. Infatti, posto $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ per ogni $x \in]a,b[$, si ha che F é una primitiva di f e risulta $F'(x) = f(x) \ge 0$, (rispett. ≤ 0) per ogni $x \in [c,b[$. Ne segue che F è crescente (rispett. decrescente) in $[c,b[$, e quindi esiste il limite di F per $x \to b$, e risulta:

$$\lim_{x\to b} F(x) = \sup F(]c,b[) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}, \qquad (\text{rispett. } \lim_{x\to b} F(x) = \inf F(]c,b[) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}).$$

Se ne deduce che l'integrale improprio di f tra a e b esiste ed é dato da

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x\to b} F(x) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}, \qquad (\text{rispett. } \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}).$$

come volevasi.

Il ragionamento é simile nel caso $X =]a,b]$.

Osservazione 4.2. - Dalla Prop. 4.1 e dal teorema di permanenza del segno si deduce immediatamente che l' integrale improprio di f tra a e b esiste ed è convergente o divergente positivamente, (rispett. negativamente), se f è continua in $[a,b[$, e il limite per $x \to b$ esiste ed é > 0, (rispett. < 0), oppure se f è continua in $]a,b]$, e il limite per $x \to a$ esiste ed é > 0, (rispett. < 0).
In particolare, l' integrale improprio di f tra a e b esiste ed è convergente o divergente positivamente, (rispett. negativamente), se f è continua in $[a,b[$ ed é divergente positivamente (rispett. negativamente) per $x \to b$ oppure se f è continua in $]a,b]$ ed é divergente positivamente (rispett. negativamente) per $x \to a$.
Sussiste inoltre la seguente

Proposizione 4.3. *Se f è definita e continua nell' intervallo $X = [a, +\infty[$ o $X =]-\infty, b]$ ed esiste*

$$l_\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad (\textit{rispettiv.}\quad l_\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)),$$

allora:

a) $l_\infty > 0$, *(in particolare $l_\infty = +\infty$),* $\Longrightarrow$ $\int_X f(x)\,dx = +\infty$,
b) $l_\infty < 0$, *(in particolare $l_\infty = -\infty$),* $\Longrightarrow$ $\int_X f(x)\,dx = -\infty$,
c) *f integrabile in senso improprio tra a e $+\infty$, o tra $-\infty$ e b,* $\Longrightarrow$ $l_\infty = 0$.

Per fissare le idee supponiamo che f sia continua nell' intervallo $[a, +\infty[$.

Dim. di a). Innanzitutto osserviamo che esistono $K > 0$ e $c \in [a, +\infty[$ tali che

$$f(x) \geq K \qquad \text{per ogni } x \in [c, +\infty[. \tag{4.2}$$

Infatti, se $l_\infty = +\infty$, basta applicare la definizione di funzione divergente positivamente e si otterrà la tesi per $K > 0$ arbitrario; nel caso invece in cui è $l_\infty \in \mathbf{R}$, basta applicare la definizione di limite prendendo $\varepsilon = l_\infty/2$ e si otterrà la tesi per $K = l_\infty - \varepsilon = l_\infty/2$.
Ora, da (4.2) segue che per ogni $x > c$ si ha:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt \geq \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x K\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + K(x-c);$$

Per $x \to +\infty$ l' ultimo membro della precedente diseguaglianza tende chiaramente a $+\infty$, e quindi, per il Test di divergenza, anche il primo membro tende a $+\infty$. Pertanto l'integrale improprio di f diverge positivamente, come volevasi.

Dim. di b). Si può ragionare in maniera analoga, oppure si può applicare la a) alla funzione $-f$; se ne deduce che $-f$ ha integrale improprio divergente positivamente, e quindi che f ha integrale improprio divergente negativamente.

Dim. di c). Se fosse $l_\infty \neq 0$, sarebbe $l_\infty > 0$ o $l_\infty < 0$ e quindi f avrebbe un integrale improprio divergente positivamente o negativamente.

Ossservazione 4.4. - La precedente Proposizione costituisce una condizione necessaria per l' integrabilità in senso improprio di una funzione:

perchè f sia integrabile il limite di f per $x \to \pm\infty$ (se esiste) deve essere uguale a 0.

Naturalmenmte tale condizione non è sufficiente. Sappiamo infatti che le funzioni $1/|x|^p$ ed $1/(x|\log|x||^p)$ tendono a 0 per $x \to \pm\infty$ per ogni $p > 0$, ma sono integrabili in un intorno di $\pm\infty$ solo se $p > 1$.
In un certo senso, per essere integrabile in senso improprio, f deve tendere a 0 "abbastanza rapidamente", come verrà chiarito ulteriormente in seguito.

Il teorema che segue fornisce una semplice e comoda condizione sufficiente perchè l' integrale improprio di una funzione sia convergente o divergente.

Teorema 4.5 - (Criterio di confronto).
Siano f, g due funzioni reali continue in $X = [a, b[$, (rispettivamente in $X =]a, b]$), e supponiamo che esista $c \in]a, b[$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \textit{per ogni } x \in [c, b[, \qquad (\textit{rispettivamente per ogni } x \in]a, c]). \tag{4.3}$$

Allora

(I) *se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$, si ha anche $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$;*

(II) *se g è integrabile in senso improprio tra a e b, anche f è integrabile in senso improprio.*

Dim. di (I). Per fissare le idee supponiamo che sia $X = [a, b[$. Allora, per la (4.3), per ogni $x \in [c, b[$ si ha
$$\int_c^x g(t)\,dt \geq \int_c^x f(t)\,dt,$$
e quindi
$$\int_a^x g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^x g(t)\,dt \geq \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt.$$
Ora, se $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = +\infty$, allora l' ultimo membro della precedente diseguaglianza tende a $+\infty$, e quindi, per il criterio di divergenza, anche il primo membro tende a $+\infty$, cioè $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.

Dim. di (II). Per la (4.3) e la Proposizione 4.1, l' integrale improprio di f tra a e b è convergente o divergente positivamente.
Ebbene, se g è integrabile in senso improprio tra a e b, allora anche f deve essere integrabile in senso improprio, perchè in caso contrario f avrebbe un integrale improprio divergente positivamente e quindi, per quanto appena visto, anche g avrebbe un integrale improprio divergente positivamente, contraddicendo l' ipotesi.

Corollario 4.6. *Se $|f|$ è integrabile in senso improprio tra a e b, allora anche f è integrabile in senso improprio.*

Dim.. Posto $f^+(x) = \sup(0, f(x))$ ed $f^-(x) = \sup(0, -f(x))$ per ogni $x \in X$, si ha:
$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|, \qquad \text{per ogni } x \in X.$$
Di qui per il precedente criterio del confronto segue che f^+ ed f^- sono integrabili in senso improprio. D' altra parte, essendo evidentemente $f = f^+ - f^-$, per le Osservazioni 3.2 e 3.3 si ha che anche f è integrabile in senso improprio.

Dal criterio di confronto segue pure il seguente utilissimo

Corollario 4.7 - (Criterio di confronto asintotico).

(I) *Se* $\quad f << g \quad$ *per $x \to b$ (rispettiv. per $x \to a$), allora:*
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b |g(x)|\,dx = +\infty$$
$$\int_a^b |g(x)|\,dx \in \mathbf{R} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b |f(x)|\,dx \in \mathbf{R}$$

(II) *Se* $\quad f \simeq g \quad$ *per $x \to b$ (rispettiv. per $x \to a$), allora l' integrale improprio di $|f|$ e l' integrale improprio di $|g|$ hanno lo stesso* **carattere***, nel senso che uno è convergente se e solo se è convergente l'altro e viceversa uno è divergente positivamente se e solo se tale è l' altro.*

Per fissare le idee supponiamo che sia $X = [a, b[$.
Dim. di (I). Essendo
$$f << g \quad \text{per } x \to b, \qquad \text{cioè} \quad \lim_{x\to b} |f(x)|/|g(x)| = 0,$$

in corrispondenza di $\varepsilon = 1$ esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$|f(x)/g(x)| < 1 \quad \text{o equivalentemente} \quad |f(x)| < |g(x)| \quad \text{per ogni } x \in [c, b[.$$

Per il criterio del confronto, si ha allora che se l' integrale improprio di $|f|$ è divergente positivamente, tale è anche l' integrale improprio di $|g|$, mentre se l' integrale improprio di $|g|$ è convergente, tale è anche l' integrale improprio di $|f|$.

Dim. di (II). Se $f \simeq g$ per $x \to b$, cioè se $f(x)/g(x) \to 1$ per $x \to b$, allora, in corrispondenza di $\varepsilon = 1/2$, esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$1 - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \varepsilon, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2}|g(x)| < |f(x)| < \frac{3}{2}|g(x)| \quad \text{per ogni } x \in [c, b[.$$

Ora, per il criterio del confronto, si ha che:

a) se l' integrale improprio di $|f|$ è divergente positivamente, tale è anche l' integrale improprio di $(3/2)|g|$ e quindi di $|g|$; viceversa se l' integrale improprio di $|g|$ è divergente positivamente, tale è anche l' integrale improprio di $|g|/2$ e quindi anche $|f|$ ha un integrale improprio divergente.

b) se $|f|$ è integrabile in senso improprio tra a e b, tale è anche $|g|/2$, e quindi anche $|g|$ è integrabile in senso improprio; viceversa, se $|g|$ è integrabile in senso improprio, tale è anche $3|g|/2$, e quindi anche $|f|$ è integrabile in senso improprio tra a e b.

Osservazione 4.8. - Si noti che se $f \simeq g$ per $x \to b$, (rispettiv. $x \to a$), e risulta $g(x) \geq 0$ in un intorno di b, (rispettiv. di a), lo stesso accade per $f(x)$. Di conseguenza il Criterio di confronto asintotico può essere ulteriormente precisato nel senso che l' integrale improprio di f e l' integrale improprio di g hanno lo stesso carattere.
Ovviamente a questo stesso risultato si giunge se risulta $g(x) \leq 0$ in un intorno di b o di a.

Osservazione 4.9 - Il criterio di confronto asintotico insieme con il principio di sostituzione consente di semplificare lo studio dell' integrabilità in senso improprio di una funzione f. Infatti adoperando il principio di sostituzione si trasforma la funzione f in una funzione g equivalente ad f che di solito è molto più semplice da studiare.

Ad esempio, volendo stabilire se una funzione f ha un integrale improprio convergente o divergente in un intorno sinistro o destro di un numero reale x_0 si puó procedere come segue.

(1) Mediante il principio di sostituzione trasformiamo f in una funzione g equivalente ad f per $x \to x_0^+$ o per $x \to x_0^-$;

(2) se g é del tipo $c/|x - x_0|^\alpha$ con $c \in \mathbf{R}$, allora l'integrale improprio di g e quindi di f sará convergente se é $\alpha < 1$, mentre sará divergente, (positivamente o negativamente a seconda del segno di c), se é $\alpha \geq 1$;

(3) se g non é del tipo $c/|x - x_0|^\alpha$, allora si calcola il limite $\lim_{x \to x_0^\pm} |x - x_0| \cdot g(x)$;
se tale limite é uguale a $\pm\infty$, vuol dire che la funzione $h(x) = 1/(x - x_0)$ é trascurabile rispetto a g e quindi, in un intorno sinistro o destro di x_0, l' integrale improprio di f e di g é divergente al pari dell'integrale improprio di h;

(4) se il precedente limite non esiste o é uguale a 0, allora si calcola il limite

$$l_\alpha = \lim_{x \to x_0^\pm} g(x) \cdot |x - x_0|^\alpha;$$

se esiste $\alpha < 1$ tale che $l_\alpha = 0$, vuol dire che g é trascurabile rispetto ad $h(x) = 1/|x - x_0|^\alpha$, e quindi g ed f sono (al pari di h) integrabili in senso improprio in un intorno sinistro o destro di x_0.

In maniera analoga si puó affrontare il problema di stabilire se l'integrale improprio di una funzione f in un intorno di $+\infty$ o $-\infty$ é convergente o divergente.

(1) Mediante il principio di sostituzione trasformiamo f in una funzione g equivalente ad f per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$;

(2) se g é del tipo $c/|x|^\alpha$ oppure $c/|x| \cdot |\log |x||^\alpha$ con $c \in \mathbf{R}$, allora l'integrale improprio di g e quindi di f sará convergente se é $\alpha > 1$, mentre sará divergente (positivamente o negativamente a seconda del segno di c) se é $\alpha \leq 1$;

(3) se g non é del tipo suddetto, allora si calcola il limite $l_0 = \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$; se tale limite é diverso da 0, (eventualmente $\pm\infty$), allora l'integrale improprio di f e di g é divergente positivamente o negativamente a seconda del segno di l_0;

(4) se $l_0 = 0$, si calcola il limite $l_1 = \lim_{x \to \pm\infty} |x \cdot g(x)|$; se tale limite é uguale a $+\infty$, vuol dire che la funzione $h(x) = 1/x$ é trascurabile rispetto a g e quindi l' integrale improprio di $|f|$ e di $|g|$ é divergente al pari dell'integrale improprio di h;

(5) se il precedente limite l_1 non esiste o é uguale a 0, allora si calcola il limite $L_1 = \lim_{x \to \pm\infty} |x \cdot \log |x| \cdot g(x)|$),; se tale limite é uguale a $+\infty$, vuol dire che la funzione $h(x) = 1/(x \log |x|)$ é trascurabile rispetto a g e quindi l' integrale improprio di $|f|$ e di $|g|$ é divergente al pari dell'integrale improprio di h;

(6) se l_1 ed L_1 non esistono o sono uguali a 0, allora si calcola il limite $l_\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) \cdot |x|^\alpha$; se esiste $\alpha > 1$ tale che $l_\alpha = 0$, vuol dire che g é trascurabile rispetto ad $h(x) = 1/|x|^\alpha$, e quindi g ed f sono (al pari di h) integrabili in senso improprio in un intorno di $\pm\infty$.

(7) se risulta $l_\alpha = +\infty$ per ogni $\alpha > 1$, allora si calcola il limte $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) \cdot x |\log |x||^\alpha$; se esiste $\alpha > 1$ tale che $l_\alpha = 0$, vuol dire che g é trascurabile rispetto ad $h(x) = 1/(x|\log |x||^\alpha)$, e quindi g ed f sono (al pari di h) integrabili in senso improprio in un intorno di $\pm\infty$.

Nel paragrafo seguente vengono forniti alcuni esercizi sull' uso del criterio di confronto asintotico.

n. 5 - Esercizi

Esempio 5.1. - Essendo

$$f(x) = \frac{a_k x^k + \ldots\ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots\ldots + b_1 x + b_0} \simeq \frac{a_k}{b_n x^{n-k}},$$

si ha che f è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ o $-\infty$ se e solo se è $n - k > 1$. Se invece è $n - k \leq 1$, allora l'integrale improprio di f in un qualunque intorno di $+\infty$ o $-\infty$ sarà divergente positivamente o negativamente a seconda del segno di a_k, b_n ed x^{n-k}.

Si ha ad esempio

$$f(x) = \frac{-x^2 + x - 5}{2x^3 + x^2 - 4} \simeq -\frac{1}{2x}, \qquad g(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^4 - 3x^3 - 2x + 1} \simeq \frac{2}{x^2}, \qquad \text{per} \quad x \to \pm\infty.$$

Pertanto g è, al pari di $2/x^2$, integrabile in senso improprio in ogni intorno di $\pm\infty$. Invece f ha, al pari $-1/(2x)$, un integrale improprio divergente positivamente in ogni intorno di $-\infty$ ed un integrale improprio divergente negativamente in ogni intorno di $+\infty$.

Esempio 5.2. - Consideriamo la funzione

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{(x-2)|x|^{1/2}|x-1|^{1/2}}\qquad \text{per ogni } x\in]-\infty,0[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[;$$

si ha evidentemente

$$f(x)\simeq\frac{-1/2}{|x|^{1/2}}\quad \text{per } x\to 0^-,\qquad f(x)\simeq\frac{-1}{|x-1|^{1/2}}\quad \text{per } x\to 1^+,$$
$$f(x)\simeq\frac{1/\sqrt{2}}{x-2}\quad \text{per } x\to 2,\qquad f(x)\simeq\frac{1}{x|x|}=\pm\frac{1}{x^2},\quad \text{per } x\to\pm\infty.$$

Ne segue che f ha:
al pari di $1/x^2$ un integrale improprio convergente negli intervalli $]-\infty,-1]$ e $[3,+\infty[$,
al pari di $1/|x|^{1/2}$ un integrale improprio convergente nell' intervallo $[-1,0[$,
al pari di $1/|x-1|^{1/2}$ un integrale improprio convergente nell' intervallo $]1,3/2]$,
al pari di $1/(x-2)$ un integrale improprio divergente negativamente nell' intervallo $[3/2,\ 2[$ ed un integrale improprio divergente positivamente nell' intervallo $]2,3]$.
Di conseguenza f ha un integrale improprio convergente nell'intervallo $]-\infty,0[$, un integrale improprio divergente negativamente nell'intervallo $]1,2[$, ed un integrale improprio divergente positivamente nell'intervallo $]2,+\infty[$. Invece l' integrale improprio tra 0 e $+\infty$ non esiste perchè sarebbe una forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$.

Esempio 5.3. - Come ulteriore esempio consideriamo la funzione

$$f(x)=\frac{x+2+|x|^\alpha\sqrt{x^2+1}}{(x^2-x+1)\sqrt[3]{2x^2+x-3}},\qquad \text{con } \alpha>0.$$

Per $x\to\pm\infty$ si ha

$$x+2+|x|^\alpha\sqrt{x^2+1}\simeq|x|^{\alpha+1}\qquad \text{e quindi}\qquad f(x)\simeq\frac{|x|^{\alpha+1}}{x^2\cdot\sqrt[3]{2x^2}}=\frac{2^{-1/3}}{|x|^{5/3-\alpha}}.$$

Pertanto per ogni $\alpha>0$, si ha che l' integrale improprio di f ha lo stesso carattere dell' integrale improprio della funzione $1/|x|^{5/3-\alpha}$. Conseguentemente l' integrale improprio di f in un qualunque intorno di $\pm\infty$ è convergente se e solo se $5/3-\alpha>1$, (cioè se e solo se risulta $0<\alpha<2/3$), ed è divergente positivamente se e solo se $5/3-\alpha\le 1$, (cioè se e solo se $\alpha\ge 2/3$).

Esempio 5.4. - Essendo

$$f(x)=\frac{x^2+x\log(x^2+1)}{(x^3-3x+9)\sqrt{\log^3(x^2-x+1)}}\simeq\frac{x^2}{x^3\sqrt{8\log^3|x|}}=\frac{\sqrt{2}/4}{x|\log|x||^{3/2}},\qquad \text{per}\quad x\to\pm\infty,$$

si ha che l' integrale improprio di f in un qualunque intorno di $\pm\infty$ ha lo stesso carattere dell' integrale di $1/(x|\log|x||^{3/2})$.
Essendo $3/2>1$ tale funzione è integrabile in senso improprio in un qualunque intorno di $\pm\infty$, e quindi anche f è integrabile in senso improprio.

Esempio 5.5. - Sia $\quad f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{\operatorname{arctg}^2 x \log^2 x}$ per ogni $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
Ebbene, per $x \to 0$ si ha che

$$f(x) \simeq \frac{x}{x^2 \log^2 x} = \frac{1}{x \log^2 x};$$

dal momento che la funzione $1/x\log^2 x$ è integrabile in senso improprio nell' intervallo $]0,1/2]$, (cfr. Esempio 3.14), tale è anche la f.
Inoltre, essendo $\log x = \log(1+(x-1)) \simeq (x-1)$ per $x \to 1$, si ha che

$$f(x) \simeq \frac{16\log 2/\pi^2}{(x-1)^2} \qquad \text{per } \; x \to 1,$$

e quindi l' integrale improprio di f in ogni intorno destro o sinistro di 1 è divergente positivamente.
Infine risulta

$$f(x) \simeq \frac{\log x}{(\pi^2/4)\log^2 x} = \frac{4/\pi^2}{\log x} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Ebbene, per $x \to +\infty$ si ha che $g(x) \to 0$, ma $x \cdot g(x) \to +\infty$; ne segue che l'integrale improprio di g e di f in un intorno di $+\infty$ é divergente positivamente.
In definitiva, per ogni $a \in]0,1[$ e per ogni $b > 1$, l'integrale improprio di f tra 0 ed a é convergente, mentre gli integrali impropri di f tra a ed 1, tra 1 e b e tra b e $+\infty$ sono divergenti positivamente. Ne segue che anche gli integrali impropri tra a e b, tra 0 e 1, tra 1 e $+\infty$, tra a e $+\infty$ e tra 0 e $+\infty$ sono divergenti positivamente.

Esempio 5.6. - Evidentemente si ha

$$f(x) = \frac{x^3 + x\sqrt{x^2-1}}{2^x - 3x^4 + x^2 - 2} \simeq \begin{cases} g_1(x) = \dfrac{x^3}{-3x^4} = -\dfrac{1/3}{x} & \text{per } x \to -\infty, \\ g_2(x) = \dfrac{x^3}{2^x} & \text{per } x \to +\infty. \end{cases}$$

Ne segue che in un intorno di $-\infty$ l' integrale improprio di f ha lo stesso carattere della funzione $-1/x$ e quindi è divergente positivamente.
Invece in un intorno di $+\infty$, l' integrale improprio di f ha lo stesso carattere della funzione $g_2(x) = x^3/2^x$. Ebbene, per $x \to +\infty$, si ha chiaramente che

$$g_2(x) \to 0, \qquad x \cdot g_2(x) \to 0, \qquad x^\alpha g_2(x) \to 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 1.$$

Ne segue che l'integrale improprio di g_2 e di f in un qualunque intorno di $+\infty$ é convergente.

Esempio 5.7. - Evidentemente si ha:

$$f(x) = \frac{3^x + x^2 + x\log(x^2+1)}{x \cdot 2^{-x} - 3x^4 + x^2 - 2} \simeq \begin{cases} \dfrac{x^2}{x2^{-x}} = x \cdot 2^x & \text{per } x \to -\infty. \\ \dfrac{3^x}{-3x^4} & \text{per } x \to +\infty, \end{cases}$$

e quindi in ogni intorno di $-\infty$, (rispettiv. $+\infty$), l' integrale improprio di f ha lo stesso carattere dell' integrale improprio di $g_1(x) = x2^x$, (rispettiv. $g_2(x) = -3^x/x^4$).

Ebbene, per $x \to +\infty$ risulta $g_2(x) \to -\infty$ e quindi l'integrale improprio di g_2 e di f é divergente negativamente in un qualunque intorno di $+\infty$.
Invece, per $x \to -\infty$ si ha che $g_1(x) \to 0$, $x \cdot g_1(x) \to 0$, $|x|^\alpha g_1(x) \to 0$ per ogni $\alpha > 1$. Ne segue che, in un qualunque intorno di $-\infty$, l'integrale improprio di g_1 e di f é convergente.

Esempio 5.8. - Evidentemente per $x \to +\infty$ si ha:

$$f(x) = \frac{x + 2 + x\log^2(x^3 + x - 1)}{x\sqrt{x+1} + x^\alpha \log(x^2+1)} \simeq \begin{cases} \dfrac{9x\log^2 x}{x^{3/2}} = \dfrac{9\log^2 x}{x^{1/2}} = g_1(x) & \text{se } \alpha < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{9x\log^2 x}{2x^\alpha \log x} = \dfrac{9\log x}{2x^{\alpha-1}} = g_2(x) & \text{se } \alpha \ge \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Pertanto se è $\alpha < 3/2$, allora per $x \to +\infty$ si ha chiaramente che $g_1(x) \to 0$, mentre $x \cdot g_2(x) \to +\infty$; questo prova che l'integrale improprio di g_1 e di f é divergente positivamente.
Invece, nel caso $3/2 \le \alpha \le 2$, allora per $x \to +\infty$ si ha che $g_2(x) \to 0$ e $x \cdot g_2(x) \to +\infty$ e quindi l' integrale improprio di f in ogni intorno di $+\infty$ è ancora divergente positivamente.
Infine se $\alpha > 2$, allora per $x \to +\infty$ si ha che $g_2(x) \to 0$, $x \cdot g_2(x) \to 0$ e $x^\beta g_2(x) \to 0$ per ogni $\beta \in]1, \alpha - 1[$. Ne segue che g_2 ed f sono integrabili in senso improprio in ogni intorno di $+\infty$.
In conclusione l' integrale improprio di f è convergente se $\alpha > 2$ ed è divergente positivamente se è $\alpha \le 2$.

Esempio 5.9. - Considerata la funzione $f :]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1 + \log^2|x|}{\sqrt{x + x^2}\log|1+x|} = \frac{1 + \log^2|x|}{|x|^{1/2}|x+1|^{1/2}(\log|x+1|)},$$

si ha evidentemente:

$$f(x) \simeq \begin{cases} \dfrac{\log^2|x|}{|x|\log|x|} = \dfrac{\log|x|}{|x|} = g_1(x) & \text{per } x \to \pm\infty, \\ \dfrac{\log^2 x}{x^{3/2}} = g_2x) & \text{per } x \to 0^+, \\ \dfrac{1}{|x+1|^{1/2}\log|x+1|} = g_3(x) & \text{per } x \to -1^-. \end{cases}$$

Ebbene, per $x \to \pm\infty$ si ha che $g_1(x) \to 0$ e che $|x \cdot g_1(x)| \to +\infty$; ne segue che l'integrale improprio di g_1 e di f é divergente positivamente in ogni intorno di $\pm\infty$.
Analogamente, per $x \to 0^+$ si ha che $x \cdot g_2(x) \to +\infty$, e quindi l'integrale improprio di g_2 e di f in ogni intorno destro di 0 é divergente positivamente.
Infine, per $x \to -1^-$ si ha che $|x+1| \cdot g_2(x) \to 0$, ma $|x+1|^\alpha \cdot g_2(x) \to 0$ per ogni $\alpha > 1/2$. Ne segue che per ogni $\alpha \in]1/2, 1[$, le funzioni g_2 ed f sono trascurabili rispetto ad $!/|x+1|^\alpha$ e quest'ultima funzione é integrabile in senso improprio in un intorno sinistro di -1. Pertanto anche g_2 ed f sono integrabili in senso improprio in un intorno sinistro di -1.
In conclusione, f é integrabile in senso improprio in ogni intorno sinistro di -1, ma gli integrali impropri di f tra $-\infty$ e -1 e tra 0 e $+\infty$ sono divergenti positivamente.

Esempio 5.10. - Consideriamo la funzione $f(x) = a^{-x^2}$ con $a > 1$: per $x \to \pm\infty$, si ha chiaramente che $x^\alpha \cdot a^{-x^2} \to 0$ per ogni $\alpha > 0$. Ne segue che l'integrale improprio di f in ogni intorno di $\pm\infty$ é convergente, e quindi f è integrabile in senso improprio in $\mathbf{R}$.

SERIE NUMERICHE

In questo capitolo vogliamo dare significato alla "*somma di infiniti numeri.*" Per introdurre l' argomento consideriamo un famoso paradosso di Zenone, filosofo greco del V secolo a. C.: la corsa tra un leone e una tartaruga.

Supponiamo dunque di avere un leone che sfida una tartaruga in una gara di corsa e naturalmente, sicuro di sè, le concede un vantaggio iniziale. Zenone argomenta che, contrariamente al senso comune, il leone non potrà mai raggiungere la tartaruga.

Infatti, supponendo che il moto avvenga su una retta, fissiamo su tale retta un riferimento cartesiano in modo che l' origine sia fissata nella posizione iniziale del leone ed $x_1 > 0$ sia la posizione iniziale della tartaruga. Allora il leone impiegherà un tempo t_1 per raggiungere la posizione x_1 occupata inizialemnte dalla tartaruga; nel frattempo questa si è spostata nella posizione x_2 e il leone impiegherà un tempo ulteriore t_2 per raggiungere la posizione x_2. Ma nel frattempo la tartaruga ha raggiunto la posizione x_3 e dunque il leone impiegherà un tempo t_3 per giungere in x_3, e così via.

Il tempo necessario al leone per raggiungere la tartaruga sarà quindi la somma degli infiniti tempi parziali

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots$$

necessari al leone per raggiungere le posizioni $x_1, x_2, x_3, \ldots$ occupate successivamente dalla tartaruga.

Trattandosi della somma di infinite quantità strettamente positive, Zenone argomenta che tale somma debba essere infinita, e dunque è richiesto un tempo infinitamente lungo perchè il leone possa raggiungere la tartaruga; in altri termini, il leone non raggiungerà mai la tartaruga, per quanto piccolo possa essere il vantaggio iniziale concesso x_1. Zenone si serve di questo e di altri simili paradossi, per dimostrare che il movimento non esiste, che è tutta una apparenza, ecc.....

La causa del paradosso consiste nel dare per scontato che *la somma di infinite quantità strettamente positive sia necessariamente infinitamente grande.* In realtà se supponiamo che il leone e la tartaruga si muovano di moto rettilineo uniforme ed indichiamo con v la velocità della tartaruga e V la velocità del leone, allora le leggi orarie del moto del leone e della tartaruga saranno rispettivamente

$$x = Vt \qquad \text{e} \qquad x = x_1 + vt,$$

e quindi il leone raggiunge la tartaruga quando $Vt = x_1 + vt$, cioè dopo un tempo $T = x_1/(V - v)$. Il paradosso svanisce se si da una definizione di somma degli infiniti termini di una successione numerica che sia coerente con il fatto che nel caso descritto sopra la somma degli infiniti tempi parziali $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ sia $x_1/(V - v)$. Torneremo tra breve su questo aspetto; introduciamo ora il concetto di serie.

n. 1 - Serie numeriche Sia data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali e per ogni $n \in \mathbf{N}$ denotiamo S_n la somma dei primi n termini di tale successione, cioè

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

S_n dicesi **somma parziale n-esima** o anche **ridotta n-esima** della successione $(a_n)_n$.

Dicesi **serie di termine generale** a_n la successione delle somme parziali dei termini della successione $(a_n)_n$, cioè la successione

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)_n \qquad \text{o equivalentemente} \qquad ((\sum_{k=1}^{n} a_k)_n).$$

Per questo motivo la serie di termine generale a_n viene anche denotata con i simboli

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\ldots \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{o semplicemente } \sum_n a_n.$$

Siamo ora in grado di dare la seguente

Definizione 1.1. *Si dice che la serie di termine generale a_n è:*

oscillante *o* **non regolare** *se non esiste il limite della successione $(S_n)_n$ delle somme parziali,*
regolare *se il $\lim_{n\to\infty} S_n$ esiste in $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,*
divergente positivamente *se risulta $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$,*
divergente negativamente *se risulta $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$,*
convergente *se il $\lim_{n\to\infty} S_n$ esiste ed appartiene ad $\mathbf{R}$.*

Se la serie $\sum_n a_n$ è convergente, il limite della successione delle somme parziali dicesi **somma** *della serie e viene indicato con il simbolo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.*

La somma di una serie convergente, cioè il limite della successione delle somme parziali, rappresenta ciò che intuitivamente è la somma degli infiniti termini della serie. Si noti come lo stesso simbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

stia ad indicare sia la successione delle somme parziali sia il suo limite; in genere si deduce dal contesto in cui il simbolo viene usato, se esso rappresenta una serie, (cioè una successione di numeri), oppure un numero reale, (la somma della serie).

Esempio 1 - Sia $a_n = (-1)^{n-1}$ per ogni n; ne segue che

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 - 1 + 1 - \ldots\ldots = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Pertanto la serie $\sum_n a_n$ è oscillante.

Esempio 2 - Sia $a_n =$ costante $= \alpha$ per ogni n; ne segue che $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\alpha$ per ogni n e quindi la serie $\sum_n a_n$ è convergente (ed ha somma 0) se è $\alpha = 0$, mentre è divergente positivamente (rispett. negativamente) se è $\alpha > 0$ (rispett. $\alpha < 0$).

Esempio 3 - *Serie di Mengoli o telescopica* Consideriamo la serie di termine generale

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

si ha allora

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

e quindi la serie è convergente e la sua somma è 1.

n. 2 - Serie geometriche

Dicesi **serie geometrica** una serie di numeri reali diversi da zero in cui è costante il rapporto tra ciascun termine ed il precedente; in altri termini, la serie $\sum_n a_n$ è una serie geometrica se esiste una costante q (detta ragione) tale che $a_{n+1} = a_n q$ per ogni n.

Si avrà quindi $a_2 = a_1 q$, $\quad a_3 = a_2 q = a_1 q^2$, $\quad a_4 = a_3 q = a_1 q^3, \dots$, in generale $a_n = a_1 q^{n-1}$. Pertanto una serie geometrica è completamente determinata se si conosce il primo termine a_1 e la ragione q. La serie geometrica di primo termine a_1 e di ragione q è la serie di termine generale $a_1 q^{n-1}$.

Riguardo alle serie geometriche sussiste il seguente fondamentale

Teorema 2.1. *La serie geometrica* $\sum_n a_1 q^{n-1}$ *di primo termine* a_1 *e di ragione* q *è*

a) *convergente se* $-1 < q < 1$*,*
b) *divergente positivamente (rispett. negativamente) se* $q \geq 1$ *ed* $a_1 > 0$*, (rispett.* $a_1 < 0$*),*
c) *oscillante se* $q \leq -1$*.*

Se la serie é convergente, la sua somma é $S = a_1/(1-q)$*.*

Dim. Infatti se $q = 1$, allora è $a_n = a_1$ per ogni n e quindi, (per quanto visto nell' esempio 1.2), la serie diverge positivamente o negativamente a seconda che sia $a_1 > 0$ oppure $a_1 < 0$.

Invece se è $q \neq 1$ allora si ha per ogni n:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1},$$
$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n;$$

se ne deduce che $qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1$ e quindi che

(*) $$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ciò premesso, consideriamo i diversi casi.

I caso : $q > 1$. Si ha allora $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ e quindi da (*) segue che

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \quad \text{se } a_1 > 0, \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad \text{se } a_1 < 0.$$

II caso : $-1 < q < 1$. Si ha allora $|q| < 1$ e quindi $\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$; d' altra parte è

$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n \qquad \text{per ogni } n,$$

e quindi (per il Teorema dei Carabinieri) si ha che $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Ne segue per (*) che $\lim_{n\to\infty} S_n = a_1/(1-q)$, cioé che la serie è convergente ed ha per somma $a_1/(1-q)$.

III caso : $q = -1$. In questo caso non esiste il limite della successione $(q^n =_n= ((-1)^n)_n$ e quindi per (*) non esiste il limite della successione $(S_n)_n$; la serie è quindi oscillante.

IV caso : $q < -1$. In quest' ultimo caso si ha $q^2 > 1$ e quindi

$$q^{2n} = (q^2)^n \to +\infty, \qquad \text{mentre} \qquad q^{2n-1} = (q^2)^n/q \to -\infty;$$

ne segue che il limite della successione $(q^n)_n$ non esiste e quindi per (*) non esiste neppure il limite della successione $(S_n)_n$. Pertanto la serie è oscillante .

Osservazione 2.2 - Nel paradosso del leone e della tartaruga descritto nell'introduzione si era proprio in presenza di una serie geometrica.

Infatti, dette V e v le velocità del leone e della tartaruga e dette $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ le posizioni via via occupate dalla tartaruga si avrà:

$$t_1 = x_1/V, \quad x_{n+1} = x_n + t_n v \quad \text{e} \quad t_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)/V = t_n v/V.$$

I tempi via via impiegati dal leone nella sua rincorsa della tartaruga sono dunque i termini della serie geometrica di primo termine $t_1 = x_1/V$ e di ragione $q = v/V$. Dal momento che la ragione $q = v/V$ è chiaramente minore di 1, tale serie è convergente ed ha per somma $T = t_1/(1-q) = x_1/(V-v)$.

Il paradosso di Zenone è dunque risolto: il leone raggiungerà la tartaruga esattamente in un tempo $T = x_1/(V-v)$ cosí come prevede la Fisica.

Osservazione 2.3 - Le serie geometriche intervengono in innumerevoli problemi pratici e teorici; uno di essi è per esempio la ricerca della *"frazione generatrice di un numero razionale"*.

Consideriamo ad esempio il numero razionale $x = 0,535353\ldots = 0,\overline{53}$; esso puó essere interpretato come la somma della serie

$$53 \cdot 10^{-2} + 53 \cdot 10^{-4} + 53 \cdot 10^{-6} + 53 \cdot 10^{-8} + \ldots\ldots ;$$

si tratta evidentemente di una serie geometrica di primo termine $x_1 = 53 \cdot 10^{-2}$ e di ragione $q = 10^{-2}$, e quindi la sua somma è

$$\frac{x_1}{1-q} = \frac{53 \cdot 10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{53}{100-1} = \frac{53}{99}.$$

Pertanto $53/99$ è la frazione generatrice del numero razionale $x = 0,535353\ldots = 0,\overline{53}$.

Conseguentemente la frazione generatrice del numero $3,21\overline{53}$ è data da:

$$3,21\overline{53} = \frac{321 + 0,\overline{53}}{100} = \frac{321 + (53/99)}{100} = \frac{321(100-1) + 53}{9900} = \frac{32153 - 321}{9900}.$$

In generale la frazione generatrice del numero razionale $0,\overline{c_1 c_2 \ldots c_r}$ ha per numeratore $c_1 c_2 \ldots c_r$ e per denominatore il numero formato da r cifre tutte uguali a 9.

Invece la frazione generatrice del numero razionale

$$a_1 a_2 \ldots a_k, b_1 b_2 \ldots b_h \overline{c_1 c_2 \ldots c_r} = 10^{-h} \cdot a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_h, \overline{c_1 c_2 \ldots c_r}$$

ha per numeratore

$$a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_h c_1 c_2 \ldots c_r - a_1 a_2 \ldots a_k, b_1 b_2 \ldots b_h$$

e per denominatore il numero formato da r cifre tutte uguali a 9 seguite da h cifre tutte uguali a 0.

n. 3. - Le principali proprietá

Innanzitutto osserviamo che dai teoremi sul limite della somma e del prodotto di due funzioni si deduce immediatamente la seguente:

Proposizione 3.1 -. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sono due serie numeriche convergenti o divergenti, allora risulta:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

purché non si presenti la forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0$*, si ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

con le consuete convenzioni sul prodotto di un numero reale diverso da 0 *per* $\pm\infty$*.*

D'altra parte dal teorema sul limite delle funzioni crescenti o decrescenti si deduce la seguente

Proposizione 3.2 -. *Se* $(a_n)_n$ *é una successione a termini "definitivamente positivi", cioé tale che*

$$\exists \overline{n} \in \mathbf{N} \quad \textit{tale che} \quad \forall n > \overline{n} \ : \ a_n \geq 0,$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente o divergente positivamente.*

Dim. In effetti, considerata la successione $(S_n)_n$ delle somme parziali, risulta

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \qquad \text{per ogni } n > \overline{n}.$$

Pertanto $(S_n)_{n>\overline{n}}$ é crescente e quindi tende al suo estremo superiore $S \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$; ne segue che $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende ad S, cioé che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente o divergente positivamente, come volevasi.

Proposizione 3.3 - (Condizione necessaria per la convergenza di una serie).
Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, allora il limite della successione* $(a_n)_n$ *esiste ed é uguale a* 0*.*

Dim. Infatti, detta S_n la somma parziale n-sima della serie ed S la sua somma, si ha:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0 \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Proposizione 3.4 -. *Se il limite per* $n \to \infty$ *della successione* $(a_n)_n$ *esiste ed é* > 0*, (in particolare* $+\infty$*), allora la serie* $\sum_n a_n$ *é divergente positivamente.*

Dim. In effetti, per il teorema di permanenza del segno, esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che risulti $a_n > 0$, per ogni $n > \overline{n}$. Ne segue, per la Prop. 3.2, che la serie é convergente o divergente positivammente; inoltre essa non puó essere convergente, (altrimenti la successione $(a_n)_n$ tenderebbe a 0). Pertanto la serie é divergente positivamente.

Osservazione 3.5 - Naturalmente dalla Prop. 3.4 e dal fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$, si deduce che se il limite per $n \to \infty$ della successione $(a_n)_n$ esiste ed é < 0, (in particolare $-\infty$), allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente negativamente.

Osservazione 3.6 - Il fatto che $(a_n)_n$ tenda a 0 per $n \to \infty$ é una condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Vedremo tra breve come esistano serie divergenti, anche se la successione dei suoi termini tende a 0. In sostanza, affinché la serie sia convergente i suoi termini devono tendere a 0 "abbastanza rapidamente".

n. 4. - Criteri di convergenza o divergenza

In questo paragrafo stabiliremo dei criteri che ci permetteranno di stabilire se una serie é convergente o divergente.

Cominciamo con l'osservare che le serie numeriche sono intimamente connesse al concetto di integrale improprio. Infatti, data la successione numerica $(a_n)_n$ e considerata la funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ tale che $f(x) = a_n$ per ogni $x \in [n-1, n[$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora si ha chiaramente:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \int_0^n f(x)\, dx \qquad \text{per ogni} \quad n \in \mathbf{N},$$

e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, divergente o oscillante se e solo se tale è l'integrale improprio di f tra 0 e $+\infty$. Ne segue che alle serie numeriche si potranno estendere tutte le proprietà degli integrali impropri, come si vedrà in seguito.

D' altra parte si dimostra la seguente fondamentale

Proposizione 4.1 - (Criterio di confronto con un integrale improprio).

Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ una funzione continua, decrescente e positiva; allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ è convergente o divergente positivamente se e solo se tale è l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

Dim. In primo luogo osserviamo che, dal momento che risulta $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 1$, sia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ sono convergenti o divergenti positivamente.

D' altra parte, dal momento che f è decrescente, per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) \quad \text{per ogni } x \in [k-1, k], \quad \text{e quindi} \quad f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq f(k-1).$$

Ne segue che, posto $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ per ogni n ed $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ per ogni x, si ha:

$$S_n - a_1 = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\, dx = F(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = S_{n-1} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Pertanto le successioni $(S_n)_n$ ed $(F(n))_n$ sono entrambe limitate (e quindi convergenti) o entrambe illimitate superiormente (e quindi divergenti positivamente); questo prova la tesi, poiché il limite di $(F(n))_n$ é proprio l'integrale improprio di f tra 1 e $+\infty$.

Esempio 4.2 - Ad esempio, per ogni $\alpha > 0$ la funzione $f(x) = 1/x^\alpha$ é continua, decrescente e positiva. Ne segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^\alpha)$ ha lo stesso carattere dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} (1/x^\alpha)\, dx$, e quindi é convergente se $\alpha > 1$, divergente positivamente se $\alpha \leq 1$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é una serie importante; essa prende il nome di **serie armonica**; in generale, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ prende il nome di **serie armonica generalizzata**.

Si noti che, (come anticipato nella Osserv. 3.6), la successione $(1/n^\alpha)_n$ tende a 0 per ogni $\alpha > 0$, ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ é convergente solo se $\alpha > 1$, cioé solo se il termine $n-$simo tende a 0 abbastanza rapidamente.

Esempio 4.3 - Analogamente la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ ha lo stesso carattere dell'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}\,dx$, e quindi é convergente se $\alpha > 1$, divergente positivamente se $\alpha \leq 1$.

La proposizione seguente fornisce un criterio per stabilire il carattere di una serie semplicemente confrontandola con una serie di cui si conosce il carattere.

Proposizione 4.4 - (Criterio di confronto).
Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *due serie numeriche e supponiamo che esiste* $\bar{n}$ *tale che*

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \textit{per ogni} \quad n > \bar{n}.$$

Allora si ha che

a) *se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente positivamente, anche* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente positivamente;*

b) *se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente, anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Dim. Posto $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, per ogni $n > \bar{n}$ si ha :

$$S_n = S_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} a_k \leq S_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} b_k = S_{\bar{n}} + T_n - T_{\bar{n}}.$$

Ne segue sia la a) che la b).
Infatti, se $(S_n)_n$ diverge positivamente, anche $(T_n)_n$ diverge positivamente, e questo prova la a). Viceversa, come vuole la b), se $(T_n)_n$ é convergente, allora anche $(S_n)_n$ deve essere convergente, perché in caso contrario dovrebbe essere divergente positivamente, ed allora anche $(T_n)_n$ sarebbe divergente positivamente.

Dal criterio di confronto discende immediatamente il seguente

Corollario 4.5 . *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *é convergente, allora anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Dim. Osserviamo che, posto $x^+ = \max(0, x)$, $\quad x^- = \max(0, -x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta

$$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad 0 \leq x^+ \leq |x|, \qquad 0 \leq x^- \leq |x|.$$

Si ha dunque che $\quad 0 \leq a_n^+ \leq |a_n|, \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n| \quad$ per ogni n e la serie $\sum_n |a_n|$ é convergente; se ne deduce, per il criterio di confronto, che anche le serie di termine generale a_n^+ ed a_n^- sono convergenti, e dunque (per la Prop. 3.1) che é convergente la serie di termine generale $a_n = a_n^+ - a_n^-$.

Osservazione 4.6 - Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **assolutamente convergente**; pertanto il precedente Corollario puó essere enunciato dicendo che
Ogni serie assolutamente convergente é convergente.

I successivi Criteri della radice e del rapporto consentono di studiare il carattere di una serie confrontandola implicitamente con una serie geometrica.

Proposizione 4.7 - (Criterio della radice). *Se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é una serie a termini* ≥ 0 *ed esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}, \tag{4.1}$$

allora la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se* $l < 1$*, divergente positivamente se* $l > 1$.

Invece, nel caso $l = 1$*, nulla si puó concludere sul carattere della serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dim. Supponiamo che sia $l \neq 1$ e sia q un numero reale compreso l ed 1.

Nel caso $l < 1$, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < q$ e quindi, per la variante del teorema di permanenza del segno, esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ risulta:

$$\sqrt[n]{a_n} < q, \qquad \text{e dunque} \qquad a_n < q^n.$$

Ebbene, la serie di termine generale q^n é una serie geometrica di ragione $q < 1$, e quindi é convergente; ne segue, per il criterio di confronto, che anche la serie di termine generale a_n é convergente.

Nel caso $l > 1$, il procedimento é esattamente lo stesso, sostituendo dappertutto $<$ con $>$; questa volta, peró, la serie geometrica di ragione $q > 1$ é divergente positivamente e quindi anche la serie di termine generale a_n é divergente positivamente.

Nel caso $l = 1$, si vede facilmente che la serie $\sum_n a_n$ potrebbe essere convergente o divergente. Ad esempio, nel caso $a_n = 1/n^\alpha$, si vede facilmente che risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{(\alpha/n)\log(1/n)} = e^0 = 1 \qquad \text{per ogni } \alpha > 0,$$

ma la serie di termine generale a_n é convergente se $\alpha > 1$ ed é divergente positivamente se $\alpha \leq 1$.

Proposizione 4.8 - (Criterio del rapporto). *Se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é una serie a termini* > 0 *ed esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}, \tag{4.2}$$

allora la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se* $l < 1$*, divergente positivamente se* $l > 1$.

Invece nel caso $l = 1$*, nulla si puó concludere sul carattere della serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dim. Supponiamo che sia $l \neq 1$ e sia q un numero reale compreso l ed 1.

Nel caso $l < 1$, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l < q$, e quindi, per la variante del teorema di permanenza del segno, esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ risulta

$$a_n < q \cdot a_{n-1}, \qquad \text{e quindi} \qquad a_n < q^{n-\bar{n}} \cdot a_{\bar{n}} = (a_{\bar{n}}/q^{\bar{n}}) \cdot q^n.$$

Come prima, la serie di termine generale $(a_{\bar{n}}/q^{\bar{n}}) \cdot q^n$ é una serie geometrica di ragione $q < 1$, e quindi é convergente; ne segue che anche la serie di termine generale a_n é convergente.

Nel caso $l > 1$ il ragionamento é simile, scambiando $<$ con $>$ ed osservando che ora la serie geometrica é divergente positivamente.

Anche ora, nel caso $l = 1$, non si puó concludere né che la serie é convergente e neppure che é divergente. Ad esempio, posto $a_n = 1/n^\alpha$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} [n/(n+1)]^\alpha = 1, \qquad \text{per ogni } \alpha > 0,$$

ma la serie di termine generale a_n é convergente se $\alpha > 1$ ed é divergente positivamente se $\alpha \leq 1$.

Osservazione 4.9 - Si noti che se il limite (4.1) (rispett. (4.2)) é maggiore di 1, allora non solo la serie $\sum_n a_n$ ma anche la successione $(a_n)_n$ é divergente positivamente.
Infatti in tal caso sé visto che esistono $q > 1$ ed $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tali che $a_n > q^n$ (rispett. $a_n > (a_{\bar{n}}/q^{\bar{n}}) \cdot q^n$) per ogni $n > \bar{n}$ e la successione $(q^n)_n$ é divergente positivamente.

Dal criterio di confronto consegue infine la seguente

Proposizione 4.10 - (Criterio di confronto asintotico).
Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ due serie numeriche a termini non nulli. Si ha allora che

a) *se $(a_n)_n$ é asintoticamente equivalente a $(b_n)_n$, allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hanno lo stesso carattere, cioé sono entrambe convergenti o entrambe divergenti positivamente;*

b) *se $(a_n)_n$ é asintoticamente trascurabile rispetto a $(b_n)_n$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente positivamente, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ é divergente positivamente;*

c) *se $(a_n)_n$ asintoticamente trascurabile rispetto a $(b_n)_n$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ é convergente, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.*

Dim.. Infatti, la tesi discende dal criterio di confronto e dal fatto che se $(a_n)_n$ é asintoticamente equivalente a $(b_n)_n$, (rispettivamente se $(a_n)_n$ é asintoticamente trascurabile rispetto a $(b_n)_n$), si ha

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|/|b_n| = 1, \qquad (\text{rispettiv. } = 0),$$

e quindi in corrispondenza di $\varepsilon = 1/2$, (rispettiv. $\varepsilon = 1$), esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{1}{2}|b_n| < |a_n| < \frac{3}{2}|b_n|, \qquad (\text{rispettiv. } \; 0 < |a_n| < |b_n|), \qquad \text{per ogni } n > \bar{n}.$$

Poiché le serie di termine generale $|b_n|$, $|b_n|/2$ e $3|b_n|/2$ hanno lo stesso carattere, la tesi discende chiaramente dal precedente criterio di confronto.

Osservazione 4.11. - Si noti che se $a_n \simeq b_n$ per $n \to \infty$, e risulta $b_n \geq 0$ in un intorno di $+\infty$, lo stesso accade per a_n. Di conseguenza il Criterio di confronto asintotico può essere ulteriormente precisato nel senso che le serie di termine generale a_n e b_n hanno lo stesso carattere.
Ovviamente a questo stesso risultato si giunge se risulta $b_n \leq 0$ in un intorno di $+\infty$.

Osservazione 4.12 - Il criterio di confronto asintotico insieme con il principio di sostituzione consente di semplificare lo studio del carattere di una serie. Infatti, per studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ possiamo procedere come segue.

(1) Mediante il principio di sostituzione trasformiamo la successione $(a_n)_n$ in una successione asintoticamente equivalente $(b_n)_n$ che in genere é molto piú "abbordabile";
(2) se $(b_n)_n$ é del tipo c/n^α oppure $c/[n \cdot (\log n)^\alpha]$ con $c \in \mathbf{R}$, allora le serie di termine generale b_n ed a_n saranno convergenti se é $\alpha > 1$, mentre saranno divergenti (positivamente o negativamente a seconda del segno di c) se é $\alpha \leq 1$;
(3) se la serie di termine generale b_n é una serie geometrica, cioé del tipo $b_n = cq^n$, allora le serie di termine generale b_n ed a_n saranno convergenti se é $|q| < 1$, mentre saranno divergenti (positivamente o negativamente a seconda del segno di c) se é $q \geq 1$;

(4) se $(b_n)_n$ non é dei tipi suddetti, allora si calcola il limite $\quad l_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$;

se tale limite é diverso da 0, (eventualmente $\pm\infty$), allora le serie di termine generale b_n ed a_n sono divergenti positivamente o negativamente a seconda del segno di l_0;

(5) se $l_0 = 0$, si calcola il limite $\quad l_1 = \lim_{n\to\infty} n \cdot b_n$; $\quad$ se tale limite é uguale a $\pm\infty$, vuol dire che la successione $(1/n)_n$ é trascurabile rispetto a $(b_n)_n$ e quindi le serie di termine generale $|b_n|$ e $|a_n|$ sono divergenti al pari della serie armonica;

(6) se il precedente limite l_1 non esiste o é uguale a 0, allora si calcola il limite $L_1 = \lim_{n\to\infty} n \cdot \log n \cdot b_n$;

se tale limite é uguale a $\pm\infty$, vuol dire che la successione $(1/(n \log n))_n$ é trascurabile rispetto a $(b_n)_n$ e quindi le serie di termine generale $|b_n|$ e $|a_n|$ sono divergenti al pari della serie di termine generale $(1/(n \log n))_n$;

(7) se l_1 ed L_1 non esistono o sono uguali a 0, allora si calcola il limite $l_\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot n^\alpha$;

se esiste $\alpha > 1$ tale che $l_\alpha = 0$, vuol dire che $(b_n)_n$ é trascurabile rispetto ad $1/n^\alpha$, e quindi le serie di termine generale b_n e a_n sono convergenti al pari della serie di termine generale $(1/n^\alpha))_n$;

(8) se risulta $l_\alpha = \pm\infty$ per ogni $\alpha > 1$, allora si calcola il limte $\quad L_\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot n(\log n)^\alpha$;

se esiste $\alpha > 1$ tale che $L_\alpha = 0$, vuol dire che $(b_n)_n$ é trascurabile rispetto ad $1/(n(\log n)^\alpha)$, e quindi le serie di termine generale b_n e a_n sono convergenti al pari della serie di termine generale $(1/n(\log n)^\alpha))_n$;

(9) se tutti i precedenti confronti sono falliti, si cerca di applicare alla serie $\sum_{n=1}^\infty |b_n|$, (anziché direttamente alla serie $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$), uno degli altri criteri di convergenza per le serie, quali il criterio del rapporto, della radice, del confronto con un integrale, ecc.

Esempio 4.13 - Ad esempio le serie di termine generale

$$a'_n = \sqrt{n+1}\sin\Big(\frac{1}{n^2+1}\Big), \qquad a''_n = \frac{n+\sqrt{n+1}}{(n^2+2)\log^2(n^2+n+1)}, \qquad a'''_n = \frac{1}{2^n - n^2 + 2n - 5}$$

sono convergenti essendo asintoticamente equivalenti rispettivamente alle serie di termine generale

$$b'_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}, \qquad b''_n = \frac{n}{4n^2\log^2 n} = \frac{1/4}{n\log^2 n}, \qquad b'''_n = \frac{1}{2^n} = (1/2)^n.$$

Invece le serie di termine generale

$$a'_n = (n^2 - 3n + 5)\log\Big(1 + \frac{2n}{n^4 - 2}\Big), \qquad a''_n = \frac{n+1}{(n^2+1)\sqrt{\log(n^2+1)}}, \qquad a'''_n = \frac{3^n + n\sqrt{n}}{n^3 + 2^n}$$

sono divergenti positivamente essendo evidentemente

$$a'_n \simeq n^2 \cdot \frac{2n}{n^4-2} \simeq \frac{2}{n}, \qquad a''_n \simeq \frac{1}{n\sqrt{2\log n}}, \qquad a'''_n \simeq \frac{3^n}{2^n} = (3/2)^n.$$

Esempio 4.14 - Se la serie $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ viene trasformata nella serie $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{c|\log n|^\beta}{n^\alpha}$, $\quad$ allora essa sará convergente se é $\alpha > 1$, mentre sará divergente (positivamente o negativamente a seconda del segno di c) se é $\alpha \le 1$.

Infatti se $\alpha \le 1$ si ha chiaramente

$$\lim_{n\to\infty} n\,\frac{|\log n|^\beta}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}|\log n|^\beta = +\infty;$$

invece se $\alpha > 1$, allora scelto $\gamma \in]1, \alpha[$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \frac{|\log n|^\beta}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\log n|^\beta}{n^{\alpha-\gamma}} = 0.$$

Ad esempio essendo

$$\begin{aligned}
a'_n &= \frac{(n+1)\log^2(n^3 - 2n^2 + 3n - 1)}{n^2\sqrt{n+2} + n\log(n+1)} \simeq \frac{9n\log^2 n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{9\log^2 n}{n^{3/2}}, \\
a''_n &= \frac{(n+1)\sqrt[3]{n^2+1}}{n^3\log^2(n^2+2)} \simeq \frac{n\cdot n^{2/3}}{4n^3\log^2 n} = \frac{1/4}{n^{4/3}\log^2 n}, \\
a'''_n &= \frac{(n^2+1)\log^3(2n^2+3n-1)}{n\sqrt{n^3+2} + n\log(n+1)} \simeq \frac{8n^2\log^3 n}{n^{5/2}} = \frac{8\log^3 n}{n^{1/2}},
\end{aligned}$$

si ha che le serie di termine generale a'_n ed a''_n sono convergenti, mentre la serie di termine generale a'''_n é divergente positivamente.

Esempio 4.15 - Consideriamo la serie di termine generale

$$a_n = \frac{3^n + n^3 - n\sqrt{n2 - 2n + 5}}{2^{n^2} + n^4 + 2n^3\log^2(n^2 + n - 1)}$$

Essa é chiaramente asintoticamente equivalente alla serie di termine generale $b_n = 3^n/2^{n^2}$. Applicando ora il criterio della radice alla serie di termine generale b_n si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2^n} = 0 < 1,$$

e quindi che essa é convergente. Ne segue che anche la serie di termine generale a_n é convergente. (Si noti che l' applicazione del criterio della radice direttamente alla serie di termine generale a_n sarebbe stata molto piú complessa).

Come ulteriore esempio consideriamo la serie di termine generale

$$a_n = \frac{n! + n^3 - n\sqrt{n^2+1}}{n2^n + 3^n + \log n};$$

chiaramente essa é asintoticamente equivalente alla serie di termine generale $b_n = n!/3^n$, poich risulta $n\sqrt{n^2+1} << n^3 << n!$ e $\log n << n2^n << 3^n$.
Applicando a tale serie il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty > 1,$$

e quindi la serie di termine generale b_n é divergente positivamente. Di conseguenza anche la serie di termine generale a_n é divergente positivamente.

n. 5 - Serie a termini di segno alterno

Sappiamo che se una serie $\sum_n a_n$ é a termini positivi, (o perlomeno positivi da un certo indice $\bar{n}$ in poi), allora la serie é convergente o divergente positivamente e possiamo applicare uno dei criteri (del confronto asintotico, della radice o del rapporto) per sapere se é convergente o divergente.

Se la serie $\sum_n a_n$non é a termini positivi, possiamo applicare uno dei criteri suddetti alla serie a temini positivi $\sum_n |a_n|$. Se tale serie é convergente, sará convergente anche la serie $\sum_n a_n$; se invece essa é divergente, allora la serie $\sum a_n$ potrebbe essere convergente, divergente o anche oscillante.

La situazione é particolarmente interessante se i termini della serie sono alternativamente positivi e negativi. In tal caso sussiste la seguente

Proposizione 5.1 - (Criterio di Leibnitz per le serie a a termini di segno alterno.
Sia $\sum\limits_n a_n$ *una serie a termini di segno alterno, cioé tale che* $\quad a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$.
Se la successione $(|a_n|)_n$ *é decrescente e infinitesima, allora la serie* $\sum_n a_n$ *é convergente e risulta*

$$(*)\qquad \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; - \; \sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \leq |a_{n+1}| \qquad \textit{per ogni } n \in \mathbf{N}\ .$$

Dim. Per fissare le idee, supponiamo che sia $a_n > 0$ per ogni n dispari ed $a_n < 0$ per ogni n pari e sia S_n la somma parziale n-sima della serie. Si dimostra allora che

a) la successione $(S_{2n})_n$ delle somme parziali di indice pari é crescente e quindi tende al suo estremo superiore $S' \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,
b) la successione $(S_{2n-1})_n$ delle somme parziali di indice dispari é decrescente e quindi tende al suo estremo inferiore $S'' \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$,
c) risulta che $S' = S'' \in \mathbf{R}$
d) posto $S = S' = S''$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta $\quad 0 \leq S - S_{2n} \leq |a_{2n+1}|, \quad 0 \leq S_{2n-1} - S \leq |a_{2n}|$,
e) $|S_n - S| \leq |a_{n+1}|$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi $S_n \longrightarrow S$ per $n \to \infty$.

Dim. di a) e b) . Infatti, per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ e quindi:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} + a_{2n+2} = |a_{2n+1}| - |a_{2n+2}| \geq 0,$$
$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} = |a_{2n+1}| - |a_{2n}| \leq 0.$$

Dim. di c). Da a) e b) segue che

$$S' - S'' = \lim_n S_{2n} - \lim_n S_{2n-1} = \lim_n \ S_{2n} - S_{2n-1} \ = \lim_n \ a_{2n} = \lim_n \ -|a_{2n}| = 0,$$

e quindi che $S' = S'' \in \mathbf{R}$.

Dim. di d). Essendo $S = \sup_n S_{2n} = \inf_n S_{2n-1}$, per ogni n si ha: $\quad S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1}, \quad$ e quindi:

$$0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} = |a_{2n+1}| \quad \text{ e } \quad 0 \leq S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = -a_{2n} = |a_{2n}|.$$

Dim. di e). Da d) segue la diseguaglianza $|S - S_n| \leq |a_{n+1}|$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi che

$$S - |a_{n+1}| \leq S_n \leq S + |a_{n+1}| \qquad \text{per ogni } n;$$

se ne deduce che $(S_n)_n$ tende ad S, in virtú del teorema dei carabinieri.

Esempio 5.2 - Consideriano la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots , \qquad \text{(detta \textbf{serie armonica alternata});}$$

evidentemente si tratta di una serie a segni alterni e la successione dei valori assoluti dei termini della serie é la successione $(1/n)_n$, che é chiaramente decrescente e infinitesima; ne segue che tale serie é convergente.
Analogamente le serie di termine generale $(-1)^n \sin(1/n)$ e $(-1)^n \mathrm{tg}(1/n)$ sono convergenti.

Osservazione 5.3 - Ovviamente, la Prop. 5.1 sussiste ancora se la successione $(|a_n|)_n$ é decrescente da un certo indice $\bar{n}$ in poi. Naturalmente in tal caso la (*) vale per ogni $n > \bar{n}$.

Osservazione 5.4 - E' altrettanto evidente che se esiste una funzione derivabile $f : [1, +\infty[\mapsto \mathbf{R}$ tale che $f(n) = |a_n|$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora per verificare che la successione $(|a_n|)_n$ é decrescente, (perlomeno da un certo indice in poi), basta dimostrare che f é decrescente, (perlomeno da un certo punto $\bar{x}$ in poi), e quindi che risulta $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \geq 1$ (o perlomeno per ogni $x > \bar{x}$).
Ad esempio consideriamo la serie di termine generale

$$a_n = (-1)^{n-1}\Big(\frac{2^n + n + 1}{n2^n + 1}\Big).$$

Evidentemente si tratta di una serie a termini di segno alterno e la successione $(|a_n|)_n$ é asintoticamente equivalente alla successione $(1/n)_n$, e quindi é infinitesima per $n \to \infty$.
Per vedere se la successione $(|a_n|_n)$ é decrescente oppure no, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2^x + x + 1}{x2^x + 1} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R};$$

si ha evidentemente che f é derivabile, che $f(n) = |a_n|$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e con semplici calcoli si trova che risulta

$$f'(x) = -\frac{4^x + (x^2 + x - 1)2^x \log 2 + 2^x - 1}{(x2^x + 1)^2} < 0 \quad \text{ per ogni } x \geq 1.$$

Pertanto f é strettamente decrescente nell'intervallo $[1, +\infty[$ e quindi la successione $(|a_n|)_n$ é strettamente decrescente. Ne segue che la serie di termine generale a_n é convergente.

Osservazione 5.5 - Se una serie é convergente, allora la somma parziale $n-$sima é un'approssimazione della somma della serie, con un errore che é tanto piú piccolo quanto piú é grande é n.
Nel caso di una serie a segni alterni, la (*) fornisce una stima dell'errore dell'approssimazione; volendo approssimare la somma S della serie con un errore minore di un fissato margine di tolleranza ε, basta scandire i valori assoluti dei termini della serie fino ad incontrare il primo termine il cui valore assoluto é minore di ε; la somma dei termini precedenti approssima S con un errore minore di ε.

6 - Serie di potenze (cenni)

Consideriamo una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ o meglio del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$.
Per ovvi motivi una serie siffatta dicesi **serie di potenze** e i numeri $a_0, a_1, a_2, \ldots .a_n, \ldots$ diconsi i **coefficienti** della serie di potenze.
Per ogni n la somma parziale $n-$sima della serie é un polinomio di grado $\leq n$, e quindi la serie puó essere interpretata come una successione di polinomi. E' interessante capire per quali valori di x tale successione di polinomi é convergente, divergente o oscillante. Questo equivale a chiedersi per quali valori di x la serie é convergente, divergente o oscillante.
A titolo di esempio consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{con} \quad a_n = \frac{n^3 + 1}{3^n + 1}$$

e chiediamoci per quali valori di x la serie é convergente, divergente o oscillante.

Per $x = 0$, ogni somma parziale coincide con $a_0 = 1/2$ e quindi la serie é convergente; possiamo perció supporre $x \neq 0$ ed applicare il criterio del rapporto alla serie di termine generale $|a_n x^n| > 0$.

Si ha allora che

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{(n+1)^3+1}{3^{n+1}+1} \cdot \frac{3^n+1}{n^3+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x| \cdot \frac{(n+1)^3+1}{n^3+1} \cdot \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1} \longrightarrow |x| \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{|x|}{3}.$$

Dal criterio del rapporto si deduce allora che la serie $\sum_n |a_n x^n|$ é convergente se risulta $|x|/3 < 1$, ed é divergente positivamente se $|x|/3 > 1$.

Pertanto, per ogni $x \in]-3,3[$ la serie $\sum_n a_n x^n$ é assolutamente convergente e quindi convergente. Invece, per ogni $x \notin]-3,3[$ la serie di termine generale $a_n x^n$ non é convergente, perché altrimenti dovrebbe aversi che $a_n x^n \longrightarrow 0$ e quindi che $|a_n x^n| = a_n |x|^n \longrightarrow 0$, ed invece si ha chiaramente

$$a_n |x|^n \simeq n^3 \cdot (|x|/3)^n \longrightarrow +\infty.$$

In particolare la serie é divergente positivamente per ogni $x \geq 3$, (perché la serie é a termini positivi e non é convergente), mentre nel caso $x \leq -3$ la serie é oscillante.

La situazione incontrata nell'esempio precedente é tipica delle serie di potenze. In effetti, si dimostra che

Teorema 6.1 - (sul raggio di convergenza).

Per una qualunque serie di potenze $\sum_n a_n x^n$ sussiste una delle seguenti alternative:

a) *la serie é assolutamente convergente (e quindi convergente) per ogni $x \in \mathbf{R}$,*

b) *la serie converge (assolutamente) solo per $x = 0$,*

c) *esiste $r > 0$ tale che la serie é assolutamente convergente (e quindi convergente) per ogni $x \in]-r,r[$, e non converge in nessun punto x esterno all'intervallo $]-r,r[$.*

Nel caso c), il numero $r > 0$ soddisfacente la tesi é unico e dicesi **raggio di convergenza** *della serie; l'intervallo $]-r,r[$ dicesi* **intervallo di convergenza** .

Nel caso a) o b) l'intervallo di convergenza é $]-\infty,+\infty[$ e $\{0\}$ rispettivamente; per questo motivo si dice che il raggio di convergenza della serie é $r = +\infty$ nel caso a) ed $r = 0$ nel caso b).

Dim. L'unicitá del numero r soddisfacente la c), é ovvia perché se esistessero due numeri distinti r_1 ed r_2 soddisfacenti la c), nel punto medio del segmento di estremi r_1 ed r_2 la serie dovrebbe essere contemporaneamente convergente e non convergente.

Per quanto riguarda la dimostrazione delle rimanenti parti della tesi, ci limiteremo a considerare il caso particolare (ma significativo) in cui esiste il

$$\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = r \in [0,+\infty]. \tag{6.1}$$

Dimostreremo che r é proprio il raggio di convergenza della serie.

Infatti, tenuto conto del fatto che la serie di termine generale $a_n x^n$ é sicuramente (assolutamente) convergente per $x = 0$, limitiamoci a cercare i numeri $x \neq 0$ per cui la serie é assolutamente convergente. A tal fine, per ogni $x \neq 0$, applichiamo il criterio del rapporto alla serie di termine generale $|a_n x^n|$; si ha allora che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a_{n+1}/a_n\right| = \begin{cases} 0 & \text{nel caso } r = +\infty, \\ +\infty & \text{nel caso } r = 0, \\ |x|/r & \text{nel caso } r \in]0,+\infty[. \end{cases}$$

Ne segue che nel caso $r = +\infty$ la serie di termine generale $|a_n x^n|$ é convergente per ogni $x \neq 0$, e dunque la serie di termine generale $a_n x^n$ é assolutamente convergente (e quindi convergente) per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Invece, nel caso $r = 0$, per la Osservazione 4.9, si ha che per ogni $x \neq 0$ la serie e la successione di termine generale $|a_n x^n|$ sono divergenti positivamente e quindi la serie $\sum_n a_n x^n$ non é convergente, (altrimenti dovrebbe aversi che $a_n x^n \longrightarrow 0$).

Infine nel caso $r \in]0, +\infty[$ si ha che la serie $\sum_n a_n x^n$ é assolutamente convergente (e quindi convergente) se $|x|/r < 1$ cioé se $|x| < r$; invece, se $|x| > r$, (e quindi $|x|/r > 1|$), per la Osservazione 4.9, si ha che la serie e la successione di termine generale $|a_n x^n|$ sono divergenti positivamente, e quindi la serie $\sum_n a_n x^n$ non é convergente.

Pertanto si ha il caso a) se $r = +\infty$, il caso b) se $r = 0$; infine, se $r \in]0, +\infty[$, allora r soddisfa la c).

Osservazione 6.2 - Adoperando il criterio della radice invece che il criterio del rapporto, si puó dimostrare in maniera analoga che se esiste

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = r \in [0, +\infty], \tag{6.2}$$

allora r é il raggio di convergenza della serie.

Pertanto abbiamo due metodi alternativi per calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze. Ovviamente, se i limiti (6.1) e (6.2) esistono entrambi, devono coincidere.

Osservazione 6.3 - Il comportamento di una serie negli estremi dell'intervallo di convergenza va studiato caso per caso, poiché ci sono serie convergenti in entrambi gli estremi, in uno solo di essi o in nessuno dei due. Ad esempio, adoperando la (6.1), si vede facilmente che le serie

$$\sum_n x^n, \qquad \sum_n x^n/n, \qquad \sum_n x^n/n^2$$

hanno lo stesso raggio di convergenza $r = 1$, peró la prima non converge in nessuno degli estremi dell'intervallo $]-1, 1[$, la seconda converge per $x = -1$ e diverge positivamente per $x = 1$, l'ultima converge sia per $x = -1$ che per $x = 1$.

Osservazione 6.4 - Data la serie di potenze

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{6.3}$$

consideriamo la serie delle derivate e la serie delle primitive:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{6.4}$$

$$a_0 x + (a_1/2)x^2 + (a_2/3)x^3 + \ldots + (a_n/(n+1))x^{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/(n+1))x^{n+1}; \tag{6.5}$$

evidentemente sono anch'esse serie di potenze, e quindi hanno anch'esse un loro raggio di convergenza. Ebbene si puó dimostrare che tali serie hanno lo stesso raggio di convergenza r della serie (6.3).

Questa affermazione é pressocché evidente se esiste il limite (6.1), perché in tal caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r \in [0, +\infty],$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n/(n+1)}{a_{n+1}/(n+2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r \in [0, +\infty],$$

e quindi le serie (6.4) e (6.5) hanno lo stesso raggio di convergenza della serie (6.3).

La tesi é vera anche se il limite (6.1) non esiste, ma i dettagli della dimostrazione sono omessi per semplicitá.

Osservazione 6.5 - Se r é il raggio di convergenza della serie di potenze (6.3), allora la funzione f che ad ogni $x \in]-r, r[$ associa la somma della serie $\sum_n a_n x^n$ dicesi **funzione somma** della serie di potenze.
Ad esempio, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$é una serie geometrica di primo termine 1 e ragione x, e quindi converge verso $1/(1-x)$ per ogni $x \in]-1,1[$; pertanto la funzione somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é la funzione $f(x) = 1/(1-x)$ nell'intervallo $]-1,1[$.
Analogamente, per ogni $x \in]-1,1[$ risulta

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \qquad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

e quindi le funzioni $1/(1+x)$ ed $1/(1+x^2)$ sono le funzioni somma (nell'intervallo $]-1,1[$) delle serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ rispettivamente.

Sulla funzione somma di una serie di potenze sussiste allora il seguente teorema di cui si omette la dimostrazione per semplicitá.

Teorema 6.6 - (Teorema di derivazione ed integrazione termine a termine).
La funzione f, funzione somma della serie $\sum_n a_n x^n$, é derivabile (e quindi continua) nell'intervallo $]-r, r[$ e per ogni $x \in]-r, r[$ risulta:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty}(n a_n) x^{n-1}, \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n/(n+1))x^{n+1}.$$

Ne segue che f é derivabile infinite volte nell'intervallo $]-r, r[$.

Ad esempio risulta

$$\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^2 = D\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = D(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} D(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1},$$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1},$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n})\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

per ogni $x \in]-1,1[$.

CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

In questo capitolo vogliamo estendere la nozione di integrale di una funzione, in modo da poter calcolare il volume di un solido dello spazio tridimensionale, (ad esempio la regione compresa tra il piano xy e il grafico di una funzione continua di due variabili $z = f(x, y)$), e diverse altre nozioni alla cui formulazione si può pervenire con un procedimento simile.

A tal fine é opportuno premettere alcune considerazioni sul concetto di area di una regione piana, volume di un solido tridimensionale, in generale di **misura** di un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^n$.

n. 1 - Misurabilitá secondo Peano Jordan; esempi e proprietá.

Definizione 1.1. *Dicesi* **intervallo in $\mathbf{R}^n$** *un sottoinsieme Q di $\mathbf{R}^n$ del tipo*

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

dove $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots , [a_n, b_n]$ *sono intervalli non vuoti di* $\mathbf{R}$ *. In tal caso, dicesi* **misura** *di Q il numero reale*

$$m(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Se $n = 2$, (rispettiv. $n = 3$), l'insieme $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, (rispettiv. $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$), dicesi anche rettangolo (rispettiv. parallelepipedo) e la sua misura dicesi anche area, (rispettiv. volume), di Q .

L'insieme vuoto $\emptyset$ é considerato un intervallo in $\mathbf{R}^n$ per ogni n, e la sua misura é uguale a 0.

Definizione 1.2. *Un insieme limitato $P \subseteq \mathbf{R}^n$ dicesi plurintervallo di $\mathbf{R}^n$ se si puó decomporre in un numero finito di intervalli a due a due senza punti interni comuni, cioé se esiste un numero finito di intervalli $Q_1, Q_2, \ldots Q_r$ tali che $P = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_r$ e $Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.*

In tal caso si dimostra che il numero reale

$$m(P) = m(Q_1) + m(Q_2) + \ldots + m(Q_r)$$

non dipende dalla particolare decomposizione di P in intervalli $Q_1, Q_2, \ldots Q_r$ e dicesi **misura di P.**

Nel caso $n = 2$ o $n = 3$ un plurintervallo dicesi anche plurirettangolo o pluriparallelepipedo.

E' evidente che graficamente un plurirettangolo puó essere interpretato come un poligono con i lati paralleli alternativamente all'asse x o all'asse y; analogamente, un pluriparallelepipedo puó essere interpretato come un poliedro con le facce rettangolari parallele ai piani coordinati (x, y), (x, z) e (y, z).

Inoltre, si vede facilmente che se P' e P'' sono plurintervalli di $\mathbf{R}^n$ e $P' \subseteq P''$, si ha: $m(P') \leq m(P'')$.

Di conseguenza, se X é un insieme limitato di $\mathbf{R}^n$, la misura di un plurintervallo contenuto in X é minore o uguale alla misura di un qualunque plurintervallo contenente X; in altri termini, l' insieme delle misure dei plurintervalli contenuti in X e l' insieme delle misure dei plurintervalli contenenti X sono separati. Questo giustifica la seguente

Definizione 1.3. *Un insieme limitato $X \subseteq \mathbf{R}^n$ dicesi* **misurabile secondo Peano Jordan** *se l' insieme delle misure dei plurintervalli contenuti in X e l' insieme delle misure dei plurintervalli contenenti X sono contigui, cioé hanno un unico elemento separatore, che prende il nome di* **misura** *di X e si denota $m(X)$.*

In particolare, se $n = 2$, (rispettiv. $n = 3$), la misura di un insieme misurabile X dicesi anche area, (rispettiv. volume), di X e si denota anche con il simbolo $a(X)$, (rispettiv. $v(X)$).

In generale, se X é un insieme limitato di $\mathbf{R}^n$, l'estremo superiore dell'insieme delle misure dei plurintervalli contenuti in X dicesi **misura interna** di X, mentre l'estremo inferiore dell'insieme delle misure dei plurintervalli contenenti X dicesi **misura esterna** di X. Si ha allora chiaramente che

Proposizione 1.4. *Se X é un insieme limitato di $\mathbf{R}^n$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *X é misurabile secondo Peano Jordan,*
b) *la misura interna di X coincide con la misura esterna di X,*
c) *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due plurintervalli P' e P'' in $\mathbf{R}^n$ tali che*

$$P' \subseteq X \subseteq P'' \quad e \quad m(P'') - m(P') < \varepsilon.$$

Inoltre, se X é misurabile, allora la misura di X coincide con la misura interna e con la misura esterna di X, e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due plurintervalli P' e P'' in $\mathbf{R}^n$ tali che

$$P' \subseteq X \subseteq P'', \quad m(P'') - m(X) < \varepsilon \quad e \quad m(X) - m(P') < \varepsilon.$$

In particolare un insieme X é misurabile ed ha misura nulla se e solo se la sua misura esterna é uguale a 0, e quindi se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un plurintervallo P contenente X tale che $m(P) < \varepsilon$.

E' evidente che gli intervalli e i plurintervalli sono misurabili secondo Peano Jordan e la loro misura nel senso di Peano Jordan coincide con la loro misura come intervalli o plurintervalli.

Le principali proprietá degli insiemi misurabili sono contenute nella seguente proposizione di cui si omette la dimostrazione.

Proposizione 1.5.

(1) *$m(X) \geq 0$ per ogni insieme misurabile X;*
(2) *l'insieme vuoto $\emptyset$ é misurabile e risulta $m(\emptyset) = 0$;*
(3) *se $X \subseteq Y$ ed $m(Y) = 0$, allora $m(X) = 0$;*
(4) *se X ed Y sono misurabili, allora anche $X \cup Y$, $X \cap Y$, ed $X - Y$ sono misurabili e risulta:*

$$m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y), \quad m(X - Y) = m(X) - m(X \cap Y);$$

(5) *se X ed Y sono insiemi misurabili e $Y \subseteq X$, allora $m(X - Y) = m(X) - m(Y)$ e quindi $m(Y) \leq m(X)$;*
(6) *X é misurabile se e solo se la sua frontiera $\partial(X)$ ha misura nulla;*
(7) *se X é misurabile, l'interno e la chiusura di X sono misurabili e la loro misura coincide con la misura di X;*
(8) *se X ed Y sono misurabili senza punti interni comuni, allora $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$; piú in generale, se $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sono insiemi misurabili a due a due senza punti interni comuni, allora $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r$ é misurabile e risulta*

$$m(X) = m(X_1) + m(X_2) + \ldots m(X_r).$$

(9) *se $X \subseteq \mathbf{R}^n$ é limitato e γ é una traslazione di $\mathbf{R}^n$, (cioé una funzione del tipo $\gamma(x) = x + c$ per ogni x), allora X é misurabile se e solo se $\gamma(X)$ é misurabile e risulta $m(X) = m(\gamma(X))$;*

Esempio 1.6 - Se $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ é una funzione continua e positiva, allora il rettangoloide associato ad f, cioé l'insieme

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

é misurabile in $\mathbf{R}^2$ e risulta

$$a(R_f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Infatti, per ogni decomposizione D di $[a, b]$, la somma inferiore e la somma superiore di f relativa a D rappresentano le aree di un plurirettangolo contenuto e di un plurirettangolo contenente R_f .

Ció posto, essendo f integrabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione D di $[a,b]$ tale che $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$, e quindi esistono un plurirettangolo contenuto in R_f, ed un plurirettangolo contenente R_f, le cui misure differiscono meno di ε; questo prova che R_f é misurabile.

Inoltre l'area é l'unico separatore tra gli insiemi delle aree dei plurirettangoli contenuti e dei plurirettangoli contenenti R_f, e quindi é un separatore tra gli insiemi delle somme inferiori e superiori di f. Di conseguenza essa coincide con l'integrale di f, che é l'unico separatore tra l'insieme delle somme inferiori e l'insieme delle somme superiori di f.

Esempio 1.7 - Il grafico $\mathcal{G}(f)$ di una funzione continua $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ é un insieme di misura nulla.

Infatti se f é positiva, allora il rettangoloide R_f associato ad f é misurabile e quindi la sua frontiera ha misura nulla; ne segue che $\mathcal{G}(f)$ ha misura nulla, poiché é contenuto nella frontiera di R_f.

Se f non é positiva, detto m il minimo valore di f in $[a,b]$, si ha che la funzione $f^*(x) = f(x) - m$ é continua e positiva e quindi il suo grafico $\mathcal{G}(f^*)$ é un insieme di misura nulla. Ne segue che il grafico $\mathcal{G}(f)$ di f é un insieme di misura nulla, dal momento che risulta $\mathcal{G}(f) = \gamma(\mathcal{G}(f^*))$, dove γ é la traslazione $\gamma(x,y) = (x, y+m)$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Esempio 1.8 - Con gli stessi ragionamenti fatti sopra si vede che se $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ é una funzione continua e positiva, allora:

(1) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | a \le y \le b,\ 0 \le x \le f(y)\}$ é misurabile e la sua misura é data dall'integrale di f;
(2) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | a \le y \le b,\ x = f(y)\}$ é misurabile e ha misura nulla.

Esempio 1.9 - Se $f, g : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ sono funzioni continue tali che $f(x) \le g(x)$ per ogni x, il dominio normale all'asse x,

$$X_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\},$$

é misurabile in R^2 e risulta

$$a(X_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

Infatti, se f é positiva, (e quindi anche g é positiva), allora i rettangoloidi associati ad f e a g sono insiemi misurabili; inoltre il grafico $\mathcal{G}(f)$ é misurabile e ha misura nulla. D'altra parte, si ha chiaramente $X_{f,g} = (R_g - R_f) \cup \mathcal{G}(f)$; ne segue che $X_{f,g}$ é misurabile e che

$$a(X_{f,g}) = a(R_g - R_f) + a(\mathcal{G}(f)) = a(R_g) - a(R_f) = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Se f non é positiva, detto m il minimo valore di f in $[a,b]$, e posto

$$f^*(x) = f(x) - m, \quad \text{e} \quad g^*(x) = g(x) - m \quad \text{per ogni } x,$$

si ha che f^* e g^* sono funzioni continue e positive e tali che $f^* \le g^*$. Ne segue che l'insieme

$$X_{f^*,g^*} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | a \le x \le b,\ f(x) - m = f^*(x) \le y \le g^*(x) = g(x) - m\}$$

é misurabile in $\mathbf{R}^2$ e risulta

$$a(X_{f^*,g^*}) = \int_a^b [g^*(x) - f^*(x)]\, dx = \int_a^b [g(x) - m - f(x) + m]\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

Di qui discende la tesi perché $X_{f,g}$ é l'immagine di X_{f^*,g^*} mediante la traslazione $\gamma(x,y) = (x, y+m)$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Esempio 1.10 - Con lo stesso ragionamento precedente si vede che se $f, g : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ sono funzioni continue tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni x, il dominio normale all'asse y,

$$Y_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | a \leq y \leq b,\ f(y) \leq x \leq g(y)\}$$

é misurabile in R^2 e risulta $a(Y_{f,g}) = \int_a^b [g(y) - f(y)]\, dy$.

Esempio 1.11 - Un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ che sia scomponibile in un numero finito di domini normali all'asse x e/o all'asse y, a due a due senza punti interni comuni, é misurabile e la sua misura é la somma delle misure dei domini normali che lo compongono, e quindi puó essere ottenuta mediante il calcolo dei relativi integrali.

Esempio 1.12 - Se X é un insieme misurabile di $\mathbf{R}^2$ ed c é un numero reale positivo, allora l'insieme $T = X \times [0, c]$ dicesi **cilindro di base** X e altezza c. Si vede facilmente che T é misurabile in $\mathbf{R}^3$ e risulta

$$v(T) = a(X) \cdot c.$$

La tesi é evidente se X é un rettangolo o un plurirettangolo. Nel caso generale, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un plurirettangolo P' contenuto in X ed un plurirettangolo P'' contenente X tali che

$$a(P'') - a(P') < \varepsilon / c.$$

Ne segue che $P' \times [0, c]$ e $P'' \times [0, c]$ sono plurintervalli in $\mathbf{R}^3$, rispettivamente contenuto e contenente T e risulta:

$$v(P'' \times [0, c]) - v(P' \times [0, c]) = (a(P'') - a(P')) \cdot c < \varepsilon,$$

il che prova che T é misurabile in $\mathbf{R}^3$.

D'altra parte, ogni pluriintervallo contenuto in T é contenuto in un plurintervallo del tipo $P' \times [0, c]$, con P' plurirettangolo contenuto in X. Il volume di tale pluriintervallo é quindi minore o uguale al volume di $P' \times [0, c]$, cioé $a(P') \cdot c$, ed é quindi minore o uguale ad $a(X) \cdot c$.

Viceversa, ogni pluriintervallo contenente T contiene un plurintervallo del tipo $P'' \times [0, c]$, con P'' plurirettangolo contenente X. Il volume di tale pluriintervallo é quindi maggiore o uguale al volume di $P'' \times [0, c]$, cioé $a(P'') \cdot c$, ed é quindi maggiore o uguale ad $a(X) \cdot c$.

Pertanto $a(X) \cdot c$ é (l'unico) separatore tra gli insiemi dei volumi dei plurintervalli contenuti e contenenti T, cioé il volume di T.

Esempio 1.13 - Se $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sono insiemi misurabili a due a due senza punti interni comuni, e $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sono numeri reali positivi, allora l'insieme

$$T = (X_1 \times [0, c_1]) \cup (X_2 \times [0, c_2]) \cup \ldots \cup (X_r \times [0, c_r])$$

dicesi pluricilindro. Esso é un insieme misurabile in $\mathbf{R}^3$; il suo volume é

$$v(T) = c_1 \cdot a(X_1) + c_2 \cdot a(X_2) + \ldots + c_r \cdot a(X_r).$$

La tesi discende da quanto visto nell'esempio precedente e dal fatto che T é chiaramente l'unione di un numero finito di cilindri a due a due senza punti interni comuni.

n. 2 - Integrabilitá secondo Riemann di funzioni di due variabili

Consideriamo ora una funzione limitata e positiva di due variabili, f, definita in un sottoinsieme misurabile X di $\mathbf{R}^2$, e consideriamo l'insieme dello spazio tridimensionale compreso tra il sottoinsieme X del piano xy, il grafico di f e le infinite rette parallele all'asse z passanti per i punti della frontiera di X, cioé l'insieme :

$$T_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | (x, y) \in X,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Tale insieme viene detto **cilindroide di base X associato ad f** .

Vogliamo trovare delle condizioni che garantiscono che T é misurabile e imparare a calcolare la sua misura; a tal fine occorrerebbe approssimare T_f per difetto e per eccesso con plurintervalli contenuti e contenenti T_f; possiamo peró ottenere lo stesso risultato in maniera piú semplice ed efficace, con un procedimento simile a quello che ci ha consentito di provare che il rettangoloide associato ad una funzione di una variabile é misurabile e la sua area é l'integrale di tale funzione.

A tal fine osserviamo che se decomponiamo X in un numero finito $X_1, X_2, \dots, X_r$ di insiemi misurabili a due a due senza punti interni comuni, e, per ogni $i = 1, 2, \dots, r$, poniamo

$$m_i = \inf f(X_i), \qquad M_i = \sup f(X_i),$$

allora gli insiemi

$$(X_1 \times [0, m_1]) \cup (X_2 \times [0, m_2]) \cup \ldots \cup (X_r \times [0, m_r]) \quad \text{e} \quad (X_1 \times [0, M_1]) \cup (X_2 \times [0, M_2]) \cup \ldots \cup (X_r \times [0, M_r])$$

sono chiaramente un pluricilindro contenuto in T_f e un pluricilindro contenente T_f. Per quanto visto nell'esempio 1.13, essi sono insiemi misurabili e le loro misure sono date rispettivamente dai numeri

$$m_1 \cdot a(X_1) + m_2 \cdot a(X_2) + \ldots + m_r \cdot a(X_r) \tag{2.1}$$

$$M_1 \cdot a(X_1) + M_2 \cdot a(X_2) + \ldots + M_r \cdot a(X_r). \tag{2.2}$$

Pertanto il volume di T_f, (se T_f é misurabile), sará un separatore tra l'insieme dei numeri del tipo (2.1) e l'insieme dei numeri del tipo (2.2).

Queste considerazioni suggeriscono la strada da seguire per introdurre un concetto utile a stabilire la misurabilitá di un cilindroide e a calcolarne il volume, e nello stesso tempo per definire altri concetti cui si possa pervenire con un ragionamento simile.

Sia dunque X un insieme misurabile di $\mathbf{R}^2$, sia f una funzione reale definita in X e supponiamo che f sia limitata, ma non necessariamente positiva. Si danno allora le seguenti definizioni.

Definizione 2.1. *Dicesi decomposizione di X un insieme finito $\mathcal{D} = \{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ di insiemi misurabili a due a due senza punti interni comuni, la cui unione é X.*

Definizione 2.2. *Se $\mathcal{D} = \{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ é una decomposizione di X, posto*

$$m_i = \inf f(X_i), \quad M_i = \sup f(X_i) \qquad \textit{per ogni } i = 1, 2, \dots, r\ ,$$

i numeri reali

$$s(f, \mathcal{D}) = m_1 \cdot a(X_1) + m_2 \cdot a(X_2) + \ldots + m_r \cdot a(X_r),$$
$$S(f, \mathcal{D}) = M_1 \cdot a(X_1) + M_2 \cdot a(X_2) + \ldots + M_r \cdot a(X_r)$$

diconsi rispettivamente somma inferiore e somma superiore di f relativa a $\mathcal{D}$.

Chiaramente qualunque somma inferiore $s(f, \mathcal{D})$ é minore o uguale della corrispondente somma superiore $S(f, \mathcal{D})$; si vede anzi che qualunque somma inferiore é minore o uguale di tutte le possibili somme superiori, e quindi che gli insiemi delle somme inferiori e delle somme superiori di f sono separati.

Definizione 2.3. *Si dice che f é integrabile secondo Riemann, se l'insieme delle somme inferiori di f e l'insieme delle somme superiori di f sono contigui; l'unico elemento separatore di tali insiemi dicesi integrale di f e si denota con il simbolo*

$$I(f) \qquad o \qquad \iint_X f(x,y)\,dxdy, \quad \textit{(per un motivo che sará piú chiaro in seguito)} .$$

Esempio 2.4 - Una funzione costante (di valore costante c) é integrabile in ogni insieme misurabile X di $\mathbf{R}^2$ e il suo integrale é uguale a $c \cdot a(X)$.

Infatti, qualunque somma inferiore e qualunque somma superiore é uguale a $c \cdot a(X)$; pertanto $c \cdot a(X)$ é l'unico separatore tra l'insieme delle somme inferiori $\{c \cdot a(X)\}$ e l'insieme delle somme superiori $\{c \cdot a(X)\}$.

Esempio 2.5 - Se $f : X \mapsto \mathbf{R}$ é limitata ed X ha misura nulla, allora f é integrabile e il suo integrale é uguale a 0.

Infatti, qualunque sottoinsieme di X ha misura nulla e quindi qualunque somma inferiore o superiore é uguale a 0. Pertanto 0 é l'unico separatore tra l'insieme delle somme inferiori $\{0\}$ e l'insieme delle somme superiori $\{0\}$.

Esempio 2.6 - La funzione $f : Q = [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbf{R}$ tale che

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é irrazionale,} \\ 1 & \text{se } x \text{ é razionale,} \end{cases}$$

non é integrabile.

Infatti, ogni insieme misurabile $X \subseteq Q$ con $m(X) > 0$ ha almeno un punto interno e quindi contiene sia punti (x,y) con x razionale che punti (x,y) con x irrazionale: ne segue che si ha $\min f(X) = 0$ e $\max f(X) = 1$. Di conseguenza ogni somma inferiore di f sará uguale a 0 ed ogni somma superiore sará uguale a $m(Q) = 1$; l'insieme delle somme inferiori é quindi $\{0\}$, mentre l'insieme delle somme superiori é $\{1\}$; tra tali insiemi esistono infiniti separatori, (precisamente tutti i numeri compresi tra 0 ed 1), e quindi f non é integrabile.

Dalla Def. 2.3 discende chiaramente il seguente criterio di integrabilitá.

Proposizione 2.7. *Una funzione limitata $f : X \subset \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ é integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione $\mathcal{D}$ di X tale che $S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon$.*

Siamo ora in grado di stabilire sotto quali condizioni il cilindroide associato ad f é misurabile e di calcolare la sua misura.

Proposizione 2.8. *Se X é un insieme misurabile di $\mathbf{R}^2$ ed $f : X \mapsto \mathbf{R}$ é integrabile e positiva, allora il cilindroide T_f associato ad f é misurabile e la sua misura coincide con l'integrale di f.*

Dim. Per dimostrare che T_f é misurabile, basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due plurintervalli P' e P'' tali che $P' \subseteq T_f \subseteq P''$ e $m(P'') - m(P') < \varepsilon$.

Ebbene, fissato $\varepsilon > 0$, esistono due decomposizioni $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}''$ di X tali che $S(f,\mathcal{D}'') - s(f,\mathcal{D}') < \varepsilon/3$. Ora $s(f,\mathcal{D}')$ ed $S(f,\mathcal{D}'')$ sono rispettivamente la misura di un pluricilindro T' contenuto in T_f e la misura di un pluricilindro T'' contenente T_f. Dalla misurabilitá di T' e T'' discende allora che esistono un plurintervallo $P' \subseteq T'$ ed un plurintervallo $P'' \supseteq T''$ tali che

$$m(T') - m(P') < \varepsilon/3 \qquad \text{e} \qquad m(P'') - m(T'') < \varepsilon/3.$$

Ne segue che $P' \subseteq T' \subseteq T_f \subseteq T'' \subseteq P''$ e

$$m(P'') - m(P') < m(P'') - m(T'') + m(T'') - m(T') + m(T') - m(P') < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Dunque T_f é misurabile; d'altra parte, per ogni decomposizione $\mathcal{D}$ di X si ha che $s(f, \mathcal{D})$ ed $S(f, \mathcal{D})$ sono rispettivamente la misura di un pluricilindro contenuto in T_f e la misura di un pluricilindro contenente T_f; ne segue che risulta:

$$s(f, \mathcal{D}) \leq m(T_f) \leq S(f, \mathcal{D}).$$

Pertanto $m(T)$ é un separatore tra l'insieme delle somme inferiori e l'insieme delle somme superiori di f, e quindi coincide con l'integrale di f che é l'unico separatore tra i suddetti insiemi.

Il teorema seguente (di cui si omette la dimostrazione) fornisce una vasta classe di funzioni integrabili.

Teorema 2.9. *Se $X \subset \mathbf{R}^2$ é misurabile, $f : X \mapsto \mathbf{R}$ é una funzione limitata e l'insieme S dei punti di discontinuitá di f ha misura nulla, allora f é integrabile.*

Corollario 2.10. *Una funzione $f : X \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ é integrabile se é soddisfatta una delle seguenti condizioni:*
(1) *X é misurabile ed f é continua e limitata (in X),*
(2) *X é chiuso e misurabile ed f é continua in X,*
(3) *X é un dominio normale all'asse x o all'asse y ed f é continua in X.*

Dim. La tesi discende banalmente dal precedente Teorema 2.9; infatti, nel caso (1), l'insieme dei punti di discontinuitá di f é l'insieme vuoto e quindi un insieme di misura nulla.

Il caso (2) é un caso particolare del caso (1), perché, per il Terema di Weierstrass, una funzione continua in un insieme chiuso e limitato é dotata di minimo e massimo valore e quindi é limitata.

Infine il caso (3) é chiaramente un caso particolare del caso (2).

n. 3 - L'integrale come limite di somme di Cauchy

Per calcolare l'integrale di una funzione di due variabili occorrerebbe trovare l'unico elemento separatore tra l'insieme delle somme superiori e l'insieme delle somme inferiori. In generale la ricerca di tale unico separatore non é semplice, e quindi puó essere utile seguire un approccio diverso.

A tal fine sia X un insieme misurabile di $\mathbf{R}^2$ e sia $f : X \mapsto \mathbf{R}$ una funzione continua e positiva; detta $\mathcal{D} = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ una decomposizione di X, scegliamo in maniera arbitraria un punto (x_j, y_j) in ciascun X_j e calcoliamo il numero reale

$$f(x_1, y_1) \cdot a(X_1) + f(x_2, y_2) \cdot a(X_2) + \ldots + f(x_r, y_r) \cdot a(X_r). \tag{3.1}$$

Evidentemente, tale numero rappresenta la misura di un pluricilindro che approssima la misura del cilindroide associato ad f, senza poter dire se la approssima per difetto o per eccesso.

Naturalmente, se X é stato diviso in poche parti, il numero descritto nella (3.1) dipenderá fortemente dai punti scelti e l'errore dell'approssimazione sará grande. Se invece X é stato suddiviso in un numero sufficientemente elevato di parti, e ciascuna parte é sufficientemente piccola, allora f assumerá pressocché lo stesso valore su ciascuna di queste parti, e quindi il suddetto numero sará pressocché indipendente dai punti scelti e l'errore dell'approssimazione sará piccolo. Dunque, intuitivamente, la misura del cilindroide associato ad f, cioé l'integrale di f, puó essere pensato come il numero a cui tendono i numeri del tipo (3.1) man mano che le parti in cui é stato suddiviso X diventano progressivamente sempre piú piccole.

Questo legame tra il concetto di integrale e quello di limite puó essere formalizzato come segue.

Definizione 3.1. *Ricordiamo che se X é un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}^n$, dicesi* **diametro** *di X il numero reale* $\text{diam}\,(X) = \sup\{||x-y|| : x, y \in X\}$.
Se X é un insieme misurabile in $\mathbf{R}^2$ e $\mathcal{D} = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ é una decomposizione di X, dicesi **diametro** *di $\mathcal{D}$ il numero reale*

$$\text{diam}\,(\mathcal{D}) = \max\{\text{diam}\,(X_1), \text{diam}\,(X_2), \ldots, \text{diam}\,(X_r)\}.$$

Definizione 3.2. *Se $\mathcal{D} = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ é una decomposizione di X, dicesi* **scelta** *relativa a $\mathcal{D}$ un insieme finito $T = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_r, y_r)\}$ di punti di X tali che $(x_j, y_j) \in X_j$ per ogni j.*

Definizione 3.3. *Dicesi* **somma di Cauchy** *di f relativa alla decomposizione $\mathcal{D} = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ e alla scelta $T = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_r, y_r)\}$ il numero reale*

$$\sigma(f, \mathcal{D}, T) = f(x_1, y_1) \cdot a(X_1) + f(x_2, y_2) \cdot a(X_2) + \ldots + f(x_r, y_r) \cdot a(X_r).$$

In effetti si dimostra che

Teorema 3.4. *Una funzione $f : X \mapsto \mathbf{R}$ é integrabile se e solo se esiste $l \in \mathbf{R}$ tale che*

$$l = \lim_{\text{diam}(\mathcal{D}) \to 0} \sigma(f, \mathcal{D}, T),$$

nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni decomposizione $\mathcal{D}$ con $\text{diam}(\mathcal{D}) < \delta$ e per ogni scelta T relativa a $\mathcal{D}$ si ha $|\sigma(f, \mathcal{D}, T) - l| < \varepsilon$.
Inoltre il limite l a cui tendono le somme di Cauchy é proprio l'integrale di f.
In particolare se $(\mathcal{D}_n)_n$ é una successione di decomposizioni di X il cui diametro tende a 0, e T_n é una qualunque scelta relativa a $\mathcal{D}_n$ per ogni n, allora si ha che

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} \sigma(f, \mathcal{D}_n, T_n).$$

Ad esempio l'integrale di f puó essere calcolato come limite di una successione di somme di Cauchy nel modo seguente. Si considera un rettangolo $Q = [a, b] \times [c, d]$ contenente X e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si divide Q in n^2 sottorettangoli $Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, dove

$$x_i = a + (i/n)(b-a), \quad y_i = c + (i/n)(d-c) \qquad \text{per ogni } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Di tali rettangoli si prendono in considerazione solo quelli che intersecano X; le loro intersezioni con X formano una decomposizione $\mathcal{D}_n$, il cui diametro é minore o uguale della lunghezza della diagonale di ciascun rettangolo $Q_{i,j}$, cioé

$$\sqrt{[(b-a)/n]^2 + [(d-c)/n]^2} = (1/n)\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}.$$

Pertanto si ha che $\text{diam}(\mathcal{D}_n) \to 0$ per $n \to \infty$ e quindi $I(f) = \lim_{n \to \infty} \sigma(f, \mathcal{D}_n, T_n)$, dove T_n é una qualunque scelta relativa a $\mathcal{D}_n$ per ogni n.

n. 4 - Proprietá dell'integrale

Passiamo ora a dare le principali proprietá delle funzioni integrabili e dell' integrale.

Proposizione 4.1. *Se f e g sono due funzioni integrabili di $X \subset \mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$, allora*

a) $f \geq g \implies I(f) \geq I(g)$;

b) $f+g$ *è integrabile e risulta* $I(f+g) = I(f) + I(g)$;

c) $c \cdot f$ *è integrabile per ogni $c \in \mathbf{R}$ e risulta:* $I(c \cdot f) = c \cdot I(f)$.

Dim. La dimostrazione puó essere ottenuta facilmente, utilizzando la definizione di integrale come limite di somme di Cauchy e le proprietá dei limiti.
Infatti, per ogni decomposizione $\mathcal{D}$ di X e per ogni scelta T relativa a $\mathcal{D}$, si ha:

$$f \geq g \implies \sigma(f, \mathcal{D}, T) \geq \sigma(g, \mathcal{D}, T),$$
$$\sigma(f+g, \mathcal{D}, T) = \sigma(f, \mathcal{D}, T) + \sigma(g, \mathcal{D}, T),$$
$$\sigma(c \cdot f, \mathcal{D}, T) = c \cdot \sigma(f, \mathcal{D}, T).$$

Passando al limite per $\operatorname{diam}(\mathcal{D}) \to 0$ si ha la tesi , in virtú del teorema di prolungamento delle diseguaglianze e del teorema sul limite della somma e del prodotto.

Sussiste infine la seguente

Proposizione 4.2 - (Proprietá additiva dell'integrale).
Sia X un insieme misurabile di $\mathbf{R}^2$, siano $X_1, X_2, \ldots X_r$ insiemi misurabili a due a due senza punti interni comuni la cui unione è X e sia $f : X \mapsto \mathbf{R}$ una funzione limitata.
Si ha allora che f è integrabile se e solo se è integrabile la restrizione di f agli insiemi $X_1, X_2, \ldots X_r$; risulta inoltre

$$I(f) = \sum_{i=1}^{r} I(f|_{X_i}).$$

n. 5 - Formule di riduzione

Il teorema che segue é di fondamentale importanza, poiché trasforma il problema di calcolare l'integrale di una funzione di due variabili nel problema di calcolare due successivi integrali di una funzione di una variabile, e dunque riduce il problema alla ricerca di opportune primitive.

Teorema 5.1. *Se α, β sono funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$ tali che $\alpha \leq \beta$, e X è il dominio normale all' asse x, (rispettiv y), limitato dai grafici delle funzioni α e β, allora per ogni funzione f continua in X si ha:*

$$(5.1) \qquad I(f) = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx, \qquad (\textit{rispettiv.}\ \ I(f) = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\Big)\,dy).$$

Dim. Supponiamo che X sia normale all'asse x, (la dimostrazione é analoga nel caso in cui X dovesse essere normale all'asse y).

In primo luogo osserviamo che per ogni $x \in [a,b]$ la funzione $y \in [\alpha(x), \beta(x)] \mapsto f(x,y)$ é continua e quindi integrabile; ha senso dunque considerare la funzione

$$F : [a,b] \mapsto \mathbf{R} \quad \text{tale che} \quad F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \quad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

Ebbene, si prova che F é continua in $[a,b]$ e quindi integrabile. (I dettagli sono omessi per semplicitá).

Rimane dunque da provare che $\quad I(f)=\int_a^b F(x)\,dx.$

A tal fine, per ogni $n\in\mathbf{N}$ decomponiamo il dominio normale X in n^2 sottodomini normali a due a due senza punti interni comuni, nella maniera seguente.

Per ogni $n\in\mathbf{N}$ poniamo

$$x_i=a+(i/n)(b-a),\quad \phi_i(x)=\alpha(x)+(i/n)(\beta(x)-\alpha(x))\quad \text{per ogni } i=0,1,\dots,n$$

$$X_{i,j}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x_{i-1}\le x\le x_i,\quad \phi_{j-1}(x)\le y\le\phi_j(x)\}\quad \text{per ogni } i,j=1,2,\dots,n.$$

Evidentemente, l'insieme $\quad \mathcal{D}_n=\{X_{i,j}:i,j=1,2,\dots,n\}\quad$ é una decomposizione di X.

Inoltre, per ogni $i,j=1,2,\dots n$ si ha che $X_{i,j}$ é chiuso e limitato ed f é continua; ne segue, per il Teorema di Weierstrass, che f é dotata di minimo e massimo valore in ogni $X_{i,j}$. Conseguentemente la somma inferiore $s(f,\mathcal{D}_n)$ e la somma superiore $S(f,\mathcal{D}_n)$ di f relativa alla decomposizione $\mathcal{D}_n$ coincidono con le somme di Cauchy di f relative alla dcomposizione $\mathcal{D}_n$ e alle scelte T'_n e T''_n, costituite rispettivamente dai punti di minimo e dai punti di massimo (assoluto) di f nei sottodomini $X_{i,j}$.

D'altra parte, si dimostra che il diametro di $\mathcal{D}_n$ tende a 0 per $n\to\infty$, (i dettagli sono omessi per semplicitá), e quindi si ha che

$$(5.2)\qquad I(f)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\mathcal{D}_n,T'_n)=\lim_{n\to\infty}s(f,\mathcal{D}_n),\qquad I(f)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\mathcal{D}_n,T''_n)=\lim_{n\to\infty}S(f,\mathcal{D}_n).$$

Se ora dimostriamo che

$$(5.3)\qquad s(f,\mathcal{D}_n)\le\int_a^b F(x)\,dx\le S(f,\mathcal{D}_n)\quad \text{per ogni } n,$$

per la (5.2) e il teorema di prolungamento delle diseguaglianze, avremo che

$$I(f)=\lim_{n\to\infty}s(f,\mathcal{D}_n)\le\int_a^b F(x)\,dx\le\lim_{n\to\infty}S(f,\mathcal{D}_n)=I(f),$$

e quindi che $I(f)=\int_a^b F(x)\,dx$, come volevasi.

Rimane dunque da dimostrare la (5.3). A tal fine, osserviamo che risulta

$$\int_a^b F(x)\,dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}F(x)\,dx;$$

inoltre, per ogni $i=1,2,\dots,n$ e per ogni $x\in[x_{i-1},x_i]$, si ha:

$$F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)\,dy=\int_{\phi_0(x)}^{\phi_n(x)}f(x,y)\,dy=\sum_{j=1}^n\int_{\phi_{j-1}(x)}^{\phi_j(x)}f(x,y)\,dy.$$

Ne segue che risulta

$$(5.4)\qquad \int_a^b F(x)\,dx=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\int_{\phi_{j-1}(x)}^{\phi_j(x)}f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

D'altra parte, sappiamo che per ogni i e per ogni j si ha

$$a(X_{i,j})=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(\phi_j(x)-\phi_{j-1}(x)\big)\,dx,$$

e quindi, (posto $m_{i,j} = \min f(X_{i,j})$ ed $M_{i,j} = \max f(X_{i,j})$ per ogni i e per ogni j), si ha:

$$s(f,\mathcal{D}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} a(X_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_{i,j}\big(\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)\big)\,dx, \tag{5.5}$$

$$S(f,\mathcal{D}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} a(X_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} M_{i,j}\big(\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)\big)\,dx. \tag{5.6}$$

Da (5.4) , (5.5) e (5.6) segue che, per provare la (5.3), basta provare che per ogni i e per ogni j e per ogni $x \in [x_{i-1}, x_i]$ risulta:

$$m_{i,j}\big(\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)\big) \le \int_{\phi_{j-1}(x)}^{\phi_j(x)} f(x,y)\,dy \le M_{i,j}\big(\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)\big).$$

Ebbene, fissati i e j e fissato $x \in [x_{i-1}, x_i]$, per ogni $y \in [\phi_{j-1}(x), \phi_j(x)]$ si ha che $(x,y) \in X_{i,j}$ e quindi che $m_{i,j} \le f(x,y) \le M_{i,j}$; ne segue che

$$m_{i,j}(\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)) = \int_{\phi_{j-1}(x)}^{\phi_j(x)} m_{i,j}\,dy \le \int_{\phi_{j-1}(x)}^{\phi_j(x)} f(x,y)\,dy \le \int_{\phi_{j-1}(x)}^{\phi_j(x)} M_{i,j}\,dy = M_{i,j}(\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x))$$

come volevasi.

Osservazione 5.2 - Il teorema 5.1 afferma dunque che se X é un dominio normale ed f é una funzione continua in X, allora l'integrale di f puó essere calcolato attraverso due successive integrazioni; per questo motivo l' integrale di una funzione di due variabili viene detto **integrale doppio** e viene denotato con il simbolo $\iint_X f(x,y)\,dxdy$

Oservazione 5.3 - Se X é un dominio normale sia all' asse x che all'asse y, cioé se esistono due funzioni continue $\alpha,\ \beta : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ con $\alpha \le \beta$, e due funzioni continue $\gamma,\ \delta : [c,d] \mapsto \mathbf{R}$ con $\gamma \le \delta$, tali che:

$$X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | a \le x \le b, \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x)\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | c \le y \le d, \quad \gamma(y) \le x \le \delta(y)\},$$

allora per calcolare l'integrale di una funzione continua $f : X \mapsto \mathbf{R}$ potremo usare entrambe le formule

$$I(f) = \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy)\ dx \qquad \text{ed} \qquad I(f) = \int_c^d (\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx)\ dy.$$

In particolare, se f é una funzione continua in un rettangolo $Q = [a,b] \times [c,d]$, allora si ha

$$I(f) = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\,dy)\ dx \qquad \text{ed} \qquad I(f) = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\,dx)\ dy).$$

In particolare si hanno le uguaglianze

$$\int_a^b (\int_c^d f(x,y)\,dy)\ dx = I(f) = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\,dx)\ dy,$$

$$\int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy)\ dx = I(f) = \int_c^d (\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx)\ dy),$$

che possono essere interpretate come *formule di invertibilitá dell'ordine di integrazione* .

Oservazione 5.4 - Naturalmente nel calcolo dell'integrale di una funzione continua su un dominio rettangolare, (o normale ad entrambi gli assi), si sceglierá quella delle due formule di riduzione che si presenti piú conveniente, cioé quella per cui il calcolo dei due successivi integrali risulta piú facile.

Ad esempio la regione X compresa tra i semiassi positivi delle x e delle y e la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 é un dominio normale ad entrambi gli assi, poiché risulta

$$X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\,\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}.$$

Perció, volendo calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x,y) = x/(y+1)$ su X, potremo applicare entrambe le formule

$$I(f) = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{y+1} dy) dx = \int_0^1 \big[x \log(y+1)\big]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^1 x \log(1+\sqrt{1-x^2})\, dx = \ldots$$

$$I(f) = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{y+1} dx) dy = \int_0^1 \Big[\frac{x^2}{2(y+1)}\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} \, dy = \int_0^1 \frac{1-y^2}{2(y+1)}\, dy = \ldots\ldots$$

ed é chiaro che il secondo procedimento é di gran lunga piú semplice del primo.

Osservazione 5.5 - Se X puó essere decomposto in un numero finito $X_1, X_2, \ldots X_n$ di domini normali all'asse x e/o all'asse y a due a due senza punti interni comuni, allora l'integrale di una funzione f continua in X sará la somma degli integrali delle restrizioni di f ai sottoinsiemi $X_1, X_2, \ldots X_n$, e ciascuno di questi integrali potrá essere calcolato con la relativa formula di riduzione.

Se X puó essere decomposto sia in un numero finito di domini normali all'asse x che in un numero finito di domini normali all'asse y (a due a due senza punti interni comuni), sceglieremo quella delle due decomposizioni per cui é piu semplice il calcolo dei relativi integrali doppi.

Osservazione 5.6 - Le formule di riduzione (5.1) valgono ancora se X non é chiuso, ma f é continua e limitata in un insieme $X \subset \mathbf{R}^2$ la cui chiusura é un dominio normale all'asse x o y.

Naturalmente se capita di dover calcolare l'integrale definito di una funzione di una variabile su un intervallo aperto o semiaperto, occorrerá calcolarlo come differenza tra i limiti di una primitiva per x (o y) che tende agli estremi dell'intervallo, e quindi come se fosse un integrale improprio.

Ad esempio consideriamo la funzione $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$; evidentemente f é continua in $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ ed é limitata, poiché risulta

$$|f(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \le 1, \qquad \text{per ogni } (x,y) \neq (0,0).$$

Di conseguenza f é integrabile in $X = [0,1] \times [0,1] - \{(0,0)\}$, la cui chiusura é il quadrato $[0,1] \times [0,1]$. L'integrale di f esteso ad X é allora dato da

$$\iint_X \frac{xy}{x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2}\, dy\big) dx = \int_0^1 \big((x/2)\log(1+x^2) - (x/2)\log x^2\big)\, dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale si é condotti a calcolare l'integrale $\int_0^1 x \log x \, dx$; la funzione integranda non é definita in 0, anche se tende a 0 per $x \to 0^+$; una primitiva della funzione $g(x) = x \log x$ é $G(x) = x^2(2\log x - 1)/4$ e quindi si ha:

$$\int_0^1 x \log x \, dx = G(1) - \lim_{x \to 0^+} G(x) = -1/4 - 0 = -1/4.$$

n. 6 - Cambio di Variabili negli Integrali Doppi

Talvolta i punti di un dominio piano possono essere descritti piú facilmente mediante un cambio di variabili, (ad esempio mediante le coordinate polari) e questo puó semplificare il calcolo dell'integrale.

Ad esempio, sia D la corona circolare con centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2. Per calcolare l'integrale doppio di una funzione f continua in D, occorrerebbe suddividere D in quattro domini normali all'asse x o in quattro domini normali all'asse y, e calcolare gli integrali della restrizione di f a tali domini mediante le relative formule di riduzione.

Se invece ci riferiamo alle coordinate polari, i punti della suddetta corona circolare sono semplicemente descritti dicendo che sono tutti e soli i punti del piano che hanno una distanza dall'origine ρ compresa tra 1 ed 2 ed anomalia θ compresa tra 0 e 2π. In altri termini la rappresentazione di D in coordiante polari, cioé l'insieme

$$T = \{(\rho,\theta) \in \mathbf{R}^2 \mid \rho \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi],\ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in D\}$$

non é altro che il rettangolo $T = [1,2] \times [0,2\pi]$, e questo consente di semplificare notevolmente il calcolo dell'integrale doppio di f su D.

Il seguente teorema descrive come cambiare le variabili in un integrale doppio.

Teorema 6.1 -. *Siano U e V due insiemi aperti di $\mathbf{R}^2$ tali che $\partial U \cap X$ e $\partial V \cap X$ sono insiemi di misura nulla per ogni insieme limitato $X \subset \mathbf{R}^2$. Sia poi $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ una funzione continua di $\overline{U}$ in $\overline{V}$ tale che:*

(1) *φ é una bigezione tra U e V ,*
(2) *φ é di classe C^1 in U , cioé le funzioni $x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$ sono dotate di derivate parziali continue rispetto alle variabili u e v in ogni punto di U,*
(3) *la matrice Jacobiana $J_\varphi(u,v)$ della trasformazione φ, (cioé la matrice delle derivate parziali di φ_1 e φ_2 rispetto alle variabili u e v), ha determinante diverso da 0 in ogni punto di U.*

Siano poi D e T insiemi misurabili di $\mathbf{R}^2$ tali che

$$D \subseteq \overline{V}, \qquad T \subseteq \overline{U}, \qquad T = \varphi^{-1}(D) = \{(u,v) \in \overline{U} \mid \varphi(u,v) \in D\}.$$

Allora, per ogni funzione $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ continua e limitata, si ha:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_T f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \cdot |\det(J_\varphi(u,v))|\,du\,dv.$$

Ad esempio, sia

$$U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[, \qquad V = \mathbf{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid\ x \geq 0,\ y = 0\}$$

e siano φ_1, φ_2 le funzioni definite ponendo

$$x = \varphi_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta, \qquad y = \varphi_2(\rho,\theta) = \rho\sin\theta \quad \text{per ogni } (\rho,\theta) \in \overline{U} = [0,+\infty[\times[0,2\pi].$$

Evidentemente U e V sono insiemi aperti tali che $\partial U \cap X$ e $\partial V \cap X$ sono insiemi di misura nulla per ogni insieme limitato $X \subset \mathbf{R}^2$. Inoltre, le funzioni φ_1 e φ_2 sono continue in $\overline{U}$, derivabili parzialmente rispetto ad entrambe le variabili (ρ,θ) in ogni punto di U; tali derivate parziali sono funzioni continue in U ed un semplice calcolo prova che il determinante della matrice Jacobiana di $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ é uguale a $\rho > 0$ in ogni punto di U. Infine, si vede facilmente che $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ é una bigezione tra U e V.

Se ne deduce, per il teorema precedente, il seguente teorema che permette di calcolare un integrale doppio mediante la trasformazione in coordinate polari.

Teorema 6.2 -. *Sia $f : D \subset \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ una funzione continua e limitata e sia*

$$T = \{(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi],\ (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \in D\}$$

la rappresentazione in coordinate polari di D.
Se D e T sono insiemi misurabili, allora risulta:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_T f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \cdot \rho\ d\rho d\theta.$$

Ad esempio, sia D la corona circolare con centro $(0, 0)$ e raggi 1 e 2 e consideriamo la funzione f definita da

$$f(x, y) = \frac{x + 1}{x^2 + y^2} \quad \text{per ogni} (x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

La rappresentazione di D in coordinate polari é il rettangolo $T = [1, 2] \times [0, 2\pi]$. Ne segue che si ha

$$\iint_X \frac{x + 1}{x^2 + y^2}\, dxdy = \iint_T \frac{\rho\cos\theta + 1}{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta} \cdot \rho\ d\rho d\theta = \int_1^2 \Big(\int_0^{2\pi} (\cos\theta + 1/\rho)\, d\theta \Big) d\rho =$$
$$= \int_1^2 (\sin 2\pi - \sin 0 + 2\pi/\rho) d\rho = \big[2\pi \log\rho\big]_1^2 = 2\pi \log 2.$$

LIMITI E CONTINUITA' PER FUNZIONI DI n VARIABILI

Vettori di $\mathbf{R}^n$; somma di due vettori, prodotto di un vettore per uno scalare, prodotto scalare di due vettori; proprietá. Diseguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Norma e distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$; proprietá.

Sfere aperte, sfere chiuse, superfici sferiche con centro $a \in \mathbf{R}^n$; intorni di un punto a di $\mathbf{R}^n$.

Punti interni, punti esterni, punti di frontiera, punti di accumulazione per una parte X di $\mathbf{R}^n$.

Insiemi limitati, insiemi aperti e insiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$: esempi e proprietá.

Funzioni di una variabile a valori in $\mathbf{R}^n$;

Funzioni reali di due variabili reali. Grafico, linee coordinate e linee di livello.
Funzioni reali di n variabili.

Convergenza e continuitá per funzioni reali di n variabili.

Teoremi sui limiti per funzioni di n variabili a valori in R e in $\mathbf{R}^k$.

Esempi di funzioni continue: funzioni costanti, funzioni proiezione, polinomi in n variabili, funzioni "elementari".

Esempi di insiemi aperti o chiusi descritti da disequazioni o equazioni del tipo

$$f(x) < 0, \quad f(x) \leq 0 \quad fx) = 0.$$

Teorema di Weierstrass: Ogni funzione reale continua su un sottoinsieme chiuso e limitato X di $\mathbf{R}^n$ dotata di minimo e massimo valore, nel senso che esistono due punti $\underline{x} \in X$ e $\overline{x} \in X$ tali che $f(\underline{x}) = \min f(X)$, $f(\overline{x}) = \max f(X)$ e quindi tali che $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$ per ogni $x \in X$.

Insiemi connessi per archi; esempi.

Teorema di Bolzano: Se $X \subset \mathbf{R}^n$ connesso per archi ed $f : X \mapsto \mathbf{R}^k$ continua in X, allora anche $f(X)$ connesso per archi. In particolare, se $k = 1$, allora $f(X)$ un intervallo di $\mathbf{R}$.

Teorema degli zeri: Se $X \subset \mathbf{R}^n$ connesso per archi, $f : X \mapsto \mathbf{R}$ continua in X ed esistono $a, b \in X$ tali che $f(a) < 0 < f(b)$, allora esiste $c \in X$ tale che $f(x) = 0$.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI n VARIABILI

Vettore derivata di una funzione di $I \subseteq \mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^n$.
Derivate parziali e derivate direzionali per funzioni reali di due variabili; significato geometrico.

Derivate parziali, derivate direzionali, gradiente e differenziale per una funzione reale di n variabili.

Differenziabilitá in un punto per una funzione reale di due o n variabili.

Condizione necessaria per la differenziabilitá:
Se $f : X \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ é differenziabile in un punto $\mathbf{x}^0$ interno ad X, allora

a) f é continua in $\mathbf{x}^0$,
b) per ogni direzione $\mathbf{u}$ esiste la derivata di f in $\mathbf{x}^0$ nella direzione $\mathbf{u}$ e risulta

$$f'(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}^0)}{t} = \text{grad} f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0).$$

Condizione sufficiente per la differenziabilitá : *(senza dimostrazione).*
Se $X \subset \mathbf{R}^n$ é aperto, $f : X \mapsto \mathbf{R}$ é derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili in ogni punto di X e le funzioni derivate parziali di f sono continue in un punto $\mathbf{x}^0$ di X, allora f é differenziabile in $\mathbf{x}^0$.

Derivata della funzione composta : regola della catena.

Linee di livello, superfici di livello, insiemi di livello.

Proprietá del gradiente di una funzione in un punto $\mathbf{x}^0$:

a) $\text{grad} f(\mathbf{x}^0)$ é perpendicolare all'insieme di livello passante per $\mathbf{x}^0$,
b) $\text{grad} f(\mathbf{x}^0)$ rappresenta la direzione in cui f cresce il pi rapidamente possibile.

Equazione del piano tangente alla superficie di livello $f(x, y, z) = costante = f(x_0, y_0, z_0)$ nel punto (x_0, y_0, z_0):

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Equazione del piano tangente alla superficie grafico di $g = g(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0)$:

$$z = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Equazione della retta normale alla superficie di livello $f(x, y, z) = costante = f(x_0, y_0, z_0)$ nel punto (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + t f_x(x_0, y_0, z_0), \\ y = y_0 + t f_y(x_0, y_0, z_0), \\ z = z_0 + t f_z(x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Derivate parziali di ordine superiore; invertibilitá dell' ordine di derivazione *(senza dimostrazione).*

Matrice hessiana di una funzione f di n variabili in un punto $\mathbf{x}^0$ interno all'insieme di definizione di f:

$$H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1,x_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_1,x_n}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2,x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2,x_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_2,x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n,x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_n,x_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_n,x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

Polinomio di Taylor del secondo ordine di centro $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$ per una funzione f di n variabili .

$$p_2(x) = f(\mathbf{x}^0) + \text{grad } f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + (1/2)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

MASSIMI e MINIMI

Forma quadratica associata ad una matrice quadrata simmetrica A di ordine n:

$$\varphi_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_i x_j.$$

Definizione di forma quadratica definita positiva, definita negativa, semidefinita (positiva o negativa), indefinita.

Proprietá delle forme quadratiche:

Se φ_A é la forma quadratica associata alla matrice A, cioé $\varphi_A(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T A\mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, allora:

a) $\varphi_A(t\mathbf{u}) = t^2\varphi_A(\mathbf{u})$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$,

b) φ_A é un polinomio omogeneo di secondo grado e quindi é una funzione continua in $\mathbf{R}^n$;

c) se φ_A é definita positiva, (rispett. negativa), allora φ_A é illimitata superiormente (rispett. inferiormente) e dotata di minimo (rispett. massimo) valore; il valore minimo (rispett. massimo) di φ_A é uguale a $0 = \varphi_A(\mathbf{0})$; inoltre $\mathbf{0}$ é l'unico punto di minimo (rispett. massimo) per φ_A.

d) se φ_A é semidefinita positiva, (rispett. negativa), ed $\mathbf{u}$ é un vettore non nullo tale che $\varphi_A(\mathbf{u}) = 0$, allora 0 é ancora il valore minimo (rispett. massimo) di φ_A, ma tutti i punti della retta generata da $\mathbf{u}$ sono punti di minimo (rispett. massimo) per φ_A.

e) se φ_A é indefinita , allora φ_A é illimitata inferiormente e superiormente, il vettore nullo é punto di sella per φ_A; infatti, se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono vettori non nulli tali che $\varphi_A(\mathbf{u}) < 0 < \varphi_A(\mathbf{v})$, allora $\mathbf{0}$ é punto di massimo per la restrizione di φ_A alla retta generata da $\mathbf{u}$ ed é punto di minimo per la restrizione di φ_A alla retta generata da $\mathbf{v}$.

f) φ_A é definita positiva se e solo se esiste $m > 0$ tale che $\varphi_A(\mathbf{x}) \geq m||\mathbf{x}||^2$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$;
φ_A é definita negativa se e solo se esiste $m < 0$ tale che $\varphi_A(\mathbf{x}) \leq m||\mathbf{x}||^2$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Ricordiamo inoltre che il segno di una forma quadratica puó essere studiata con i seguenti criteri.

Criterio del segno degli autovalori: *(senza dimostrazione)*

La forma quadratica associata ad A é:

a) definita positiva se e solo se gli autovalori di A sono tutti > 0;

b) definita negativa se e solo se gli autovalori di A sono tutti < 0;

c) semidefinita positiva se e solo se 0 é il piú piccolo autovalore di A;

d) semidefinita negativa se e solo se 0 é il piú grande autovalore di A;

e) indefinita se e solo se A ha almeno un autovalore > 0 ed almeno un autovalore < 0.

Criterio del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico: *(senza dimostrazione)*

La forma quadratica associata ad A é:

a) definita positiva se e solo se i coefficienti del polinomio caratteristico di A sono alternati in segno;

b) definita negativa se e solo se i coefficienti del polinomio caratteristico di A hanno lo stesso segno;

c) semidefinita positiva se e solo se i primi k coefficienti del polinomio caratteristico di A sono alternati in segno e i restanti $n + 1 - k$ coefficienti sono nulli;

d) semidefinita negativa se e solo se i primi k coefficienti del polinomio caratteristico di A hanno lo stesso segno e i restanti $n + 1 - k$ coefficienti sono nulli;

e) indefinita nei restanti casi .

Criterio di Sylvester: *(senza dimostrazione)*

La forma quadratica associata ad A é:

a) definita positiva se e solo se i minori principali di A sono tutti > 0;
b) definita negativa se e solo se i minori principali di A sono alternativamente > 0 e < 0 e il primo di essi é < 0;
c) indefinita se A ha un minore principale di ordine pari che é < 0 oppure ha due diversi minori principali di ordine dispari che sono discordi.

In particolare se A é una matrice di ordine 2, allora La forma quadratica associata ad A é:

a) definita positiva se e solo risulta $a_{11} > 0, \det A > 0$,
b) definita negativa se e solo se risulta $a_{11} < 0, \det A > 0$,
c) indefinita se e solo se risulta $\det A < 0$.

Punti di minimo e massimo relativo. Punti di sella.

Teorema di Fermat. Se $\mathbf{x}^0$ é punto di minimo o massimo relativo per $f : X \subset \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, se $\mathbf{x}^0$ é interno ad X ed f é derivabile parzialmente in $\mathbf{x}^0$ rispetto a tutte le variabili, allora risulta:

$$\text{grad}\, f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \quad \text{cioé} \quad f_{x_i}(\mathbf{x}^0) = 0 \text{ per ogni } i = 1, 2, \dots n.$$

Condizioni sufficienti perché un punto sia punto di minimo o massimo relativo.

Se f é una funzione di classe C^2 in un aperto X di $\mathbf{R}^n$ ed $\mathbf{x}^0 \in X$, allora $\mathbf{x}^0$ é un punto di minimo (rispettiv. massimo) relativo per f se grad $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ ed é soddisfatta una delle seguenti condizioni:

(1) la matrice hessiana di f in $\mathbf{x}^0$ é definita positiva (rispettiv. negativa),
(2) gli autovalori della matrice hessiana di f in $\mathbf{x}^0$ sono tutti > 0, (rispettiv. < 0),
(3) i minori principali della matrice hessiana di f in $\mathbf{x}^0$ sono tutti > 0, (rispettiv. alternati in segno e iol primo é < 0).

Invece $\mathbf{x}^0$ é punto di sella per f se grad $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ ed é soddisfatta una delle seguenti condizioni equivalenti:

(1) la matrice hessiana di f in $\mathbf{x}^0$ é indefinita
(2) la matrice hessiana di f in $\mathbf{x}^0$ ha almeno un autovalore > 0 ed almeno un autovalore < 0,
(3) la matrice hessiana di f in $\mathbf{x}^0$ ha un minore principale di ordine pari che é < 0 oppure ha due diversi minori principali di ordine dispari che sono discordi.

Condizioni sufficienti per funzioni di 2 variabili:

Se f é una funzione di classe C^2 in un aperto A di $\mathbf{R}^2$ ed $(x_0, y_0) \in A$, allora

(1) (x_0, y_0) é punto di minimo relativo per f se risulta

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \qquad f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ e } \det H_f(x_0, y_0) > 0,$$

(2) (x_0, y_0) é punto di massimo relativo per f se risulta

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \qquad f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ e } \det H_f(x_0, y_0) > 0,$$

(3) (x_0, y_0) é punto di sella per f se risulta

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad \text{e } \det H_f(x_0, y_0) < 0,$$

Funzioni (strettamente) convesse o concave; esempi e proprietá.

Caratterizzazione delle funzioni convesse, concave, ecc. : Se X é un sottoinsieme aperto e convesso di $\mathbf{R}^n$ ed f é una funzione di classe C^1 in X, allora le seguenti proprietá sono equivalenti:

a) f é convessa in X,
b) per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ si ha: $\big(\text{grad } f(\mathbf{x}) - \text{ grad } f(\mathbf{y})\big) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$,
c) per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{x}^0 \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ si ha: $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0) + \text{ grad } f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$.

Viceversa f é

- concava se e solo se nella b) o c) si sostituisce $\geq$ con $\leq$,
- strettamente convessa se e solo se nella b) o c) si sostituisce $\geq$ con $>$,
- strettamente concava se e solo se nella b) o c) si sostituisce $\geq$ con $<$.

Se poi f é di classe C^2, allora f é convessa (rispett. concava) se e solo se per ogni $\mathbf{x} \in X$ la matrice Hessiana di f in $\mathbf{x}$ é semidefinita positiva, (rispett. semidefinita negativa).

Invece f é strettamente convessa (rispett. strettamente concava) se per ogni $\mathbf{x} \in X$ la matrice Hessiana di f in $\mathbf{x}$ é definita positiva, (rispett. definita negativa).

Funzioni convesse ed ottimizzazione: Se X é un sottoinsieme aperto e convesso di $\mathbf{R}^n$ ed f é una funzione convessa (rispett. concava) di classe C^1 in X, allora:

(1) un punto di minimo (massimo) relativo per f é punto di minimo (massimo) assoluto;
(2) se f ha due punti di minimo (rispett. massimo) distinti, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, allora tutti i punti del segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono punti di minimo (massimo) di f;
(3) se f é strettamente convessa (rispett. strettamente concava), allora f ha al massimo un punto di minimo (rispett. massimo) relativo;
(4) grad $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}^0$ é un punto di minimo (rispett. massimo) assoluto di f .

Funzioni (scalari) definite implicitamente da una equazione.

Funzioni (vettoriali) definite implicitamente da un sistema di equazioni.

Teorema del DINI (scalare) - *(senza dimostrazione)*

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia $f = f(x, y)$ una funzione di classe C^1 di A in $\mathbf{R}$; se (x_0, y_0) è un punto di A tale che $f(x_0, y_0) = 0$ e $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora, in un opportuno intorno di (x_0, y_0), l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione.

Più precisamente, se risulta $f(x_0, y_0) = 0$ ed $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, allora esistono $r > 0, \rho > 0$ tali che per ogni $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ l'equazione $f(x, y) = 0$ ha una e una sola soluzione $y = \varphi(x)$ nell'intervallo $]y_0 - \rho, y_0 + \rho[$.

Inoltre la funzione $\varphi :]x_0 - r, x_0 + r[\mapsto]y_0 - \rho, y_0 + \rho[$ è derivabile e risulta

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \qquad \text{per ogni } x \in]x_0 - r, x_0 + r[.$$

In particolare si ha

$$\varphi(x_0) = y_0 \qquad \text{e} \qquad \varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Teorema del DINI (vettoriale) - *(senza dimostrazione)*

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$ e sia $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots f_k)$ una funzione di classe C^1 di A in $\mathbf{R}^k$ con $k < n$; se $\mathbf{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots z_n^0)$ è un punto di A tale che $\mathbf{f}(\mathbf{z}^0) = 0$ e la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{z}^0$ ha rango k, allora, in un opportuno intorno di $\mathbf{z}^0$, il sistema di equazioni

$$f_i(\mathbf{z}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

definisce implicitamente una funzione vettoriale.

Più precisamente, se è invertibile la sottomatrice della matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{z}^0$ formata dalle ultime k colonne, allora (denotato per ogni $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ rispettivamente con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ i sottovettori formati dalle prime $n-k$ e dalle ultime k componenti di $\mathbf{z}$), si ha che esistono $r > 0, \rho > 0$ tali che per ogni $\mathbf{x} \in B_{n-k}(\mathbf{x}^0, r) \subset \mathbf{R}^{n-k}$ il sistema di equazioni

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ha una e una sola soluzione $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ in $B_k(\mathbf{y}^0, \rho) \subset \mathbf{R}^k$.

Inoltre la funzione $\varphi : B_{n-k}(\mathbf{x}^0, r) \quad \mapsto \quad B_k(\mathbf{y}^0, r)$ è differenziabile e risulta

$$\varphi_x(\mathbf{x}) = -\big(\mathbf{f}_y(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))\big)^{-1} \mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in B_{n-k}(\mathbf{x}^0, r),$$

dove φ_x denota la matrice jacobiana delle derivate parziali delle componenti di φ rispetto alle variabili $x_1 = z_1,\ x_2 = z_2,\ \dots\dots x_{n-k} = z_{n-k}$, e analogamente $\mathbf{f}_x$ ed $\mathbf{f}_y$ denotano le sottomatrici delle derivate parziali delle componenti di $\mathbf{f}$ rispetto alle prime $n-k$ e alle ultime k variabili) .

In particolare si ha

$$\varphi(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0 \quad \text{ e } \varphi_x(\mathbf{x}^0) = -\big(\mathbf{f}_y(\mathbf{z}^0)\big)^{-1} \mathbf{f}_x(\mathbf{z}^0).$$

Punti di minimo e massimo vincolato: moltiplicatori di Lagrange e di Kuhn Tucker.

Se f e $g_1, g_2, \dots g_k$ sono funzioni di classe C^1 da un aperto A di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, allora i punti di minimo o massimo relativo per f sull'insieme $X = \{x \in A | g_i(x) = 0 \ \text{ per } i = 1, 2, \dots k\}$, si trovano risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} \lambda_0 \nabla f(x) - \lambda_1 \nabla g_1(x) - \dots\dots - \lambda_k \nabla g_k(x) = \mathbf{0} \\ g_i(x) = 0 \qquad \text{per } i = 1, 2, \dots k, \\ \lambda_0 \in \{0, 1\},\ (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \dots \lambda_k) \neq (0, 0, \dots\dots 0). \end{cases}$$

Invece i punti di minimo (rispett. massimo) relativo per f sull'insieme

$$X = \{x \in A | g_i(x) \leq 0 \qquad \text{per } i = 1, 2, \dots k\}$$

si trovano risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} \lambda_0 \nabla f(x) - \lambda_1 \nabla g_1(x) - \dots\dots - \lambda_k \nabla g_k(x) = \mathbf{0} \\ \lambda_i g_i(x) = 0 \qquad \text{per } i = 1, 2, \dots k, \\ \lambda_0 \in \{0, 1\},\ (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \dots \lambda_k) \neq (0, 0, \dots\dots 0), \\ g_i(x) \leq 0, \quad \lambda_i \leq 0, \quad (\text{rispett. } \lambda_i \geq 0), \qquad \text{per } i = 1, 2, \dots k, \end{cases}$$

Lagrangiana e lagrangiana generalizzata.

Significato economico dei moltiplicatori di Lagrange o di Kuhn Tucker.