CONOSCENZE DI ANALISI MATEMATICA E MICROECONOMIA DI BASE

SCIENZA DELLE FINANZE

LAUREE TRIENNALI

Indice

1 INTRODUZIONE

La microeconomia cerca di spiegare fenomeni economici utilizzando *modelli*, per lo più scritti con linguaggio matematico.
Nelle seguenti note[1] verranno accennati i concetti e gli strumenti necessari per affrontare un corso base di microeconomia[2].

2 SIGNIFICATO GENERALE DI FUNZIONE

Date due variabili, x e y, si dice che y è funzione di x, e si scrive $y = f(x)$, se si assume che esista una regola matematica che, dato qualsiasi valore di x, ci consenta di ottenere il corrispondente valore di y.

Esempio: $y = 8 - 2x$ se $x = 2$ $y = 4$

$y = f(x)$ esprime il nesso funzionale:

- x = variabile indipendente
- y = variabile dipendente

Noi avremo a che fare, ad esempio, con le *funzioni di domanda* secondo le quali la quantità domandata di un certo bene dipende dal prezzo del bene medesimo: $Q = D(P)$

Con la notazione appena utilizzata abbiamo definito la forma esplicita della funzione.
Quando invece non è specificato quale delle due variabili sia la variabile dipendente si parla di forma implicita della funzione: $f(x, y) = 0$.

Per rappresentare graficamente una funzione si utilizza un sistema di *assi cartesiani*:

- in ascisse: variabile indipendente
- in ordinate: variabile dipendente[3]

Esempi: Rappresentazioni grafiche

1. $y = 4 - 2x$
2. $y = x^2$

[1] Principalmente tratte da Giorgio Rodano(1993) "INTRODUZIONE ALLA MICROECONOMIA. Il consumo, la produzione, lo scambio", La Nuova Italia Scientifica, Roma.
[2] Errori e omissioni sono da attribuirsi interamente alla sottoscritta.
[3] E' bene ricordare che gli economisti spesso pongono in ascisse la variabile dipendente e in ordinate la variabile indipendente.

Figura 1. Retta: $y = 4 - 2x$

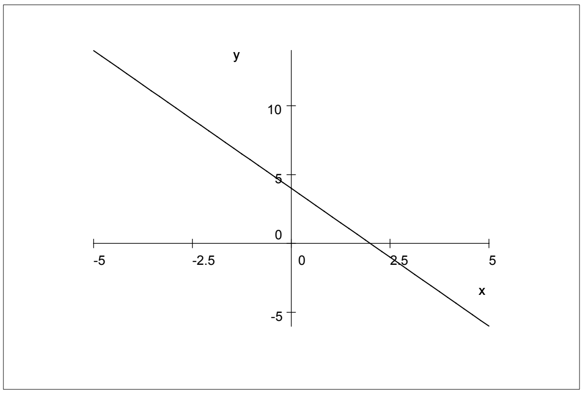
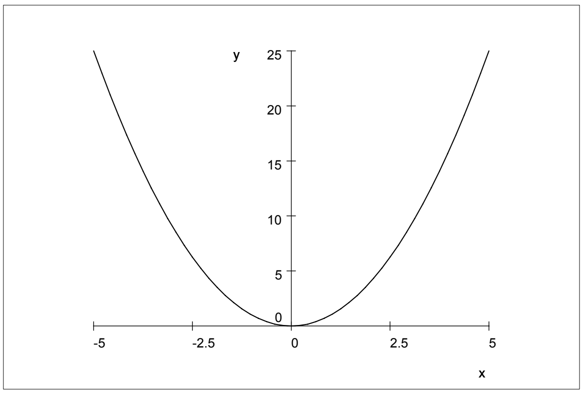


Figura 2. Parabola: $y = x^2$



2.1 Le Equazioni

Le equazioni descrivono le relazioni che compaiono all'interno di un modello. Con un'equazione si esprime uguaglianza tra due espressioni matematiche.
Nel risolvere un'equazione la domanda da porsi è:"Per quale/i valore/i dell'incognita vale l'uguaglianza?"

Esempi: Equazioni

1. $-5 = 4 - 2x$ quando $x = 9/2$
2. $x^2 = 25$ quando $x = \pm 5$

Le equazioni possono definire le funzioni:

Esempio: $2x + y = 4$ da cui si ottiene la funzione lineare: $y = 4 - 2x$

Un *sistema di equazioni* è costituito da più equazioni e dunque da più incognite. Vale la regola che un sistema di equazioni può essere risolto se il numero di incognite è uguale al numero di equazioni presenti nel sistema. Ossia: sistema di due equazioni in due incognite, di tre equazioni in tre incognite e così via. Quando il numero di incognite è *maggiore* del numero di equazioni presenti, il sistema non può essere risolto per tutte le incognite.
Quando ci sono più equazioni che incognite il sistema non ha generalmente soluzione.

Esempi: Sistemi di Equazioni

1. Il sistema composto dalle tre equazioni:
   $x + 3z = 2y + 5$
   $7x = z$
   $y = 3$
   ha soluzione per
   $x = 1/2$
   $y = 3$
   $z = 7/2$

2. Il sistema composto dalle tre equazioni:
   $7x + 6y = 5z + 6g$
   $x = 5$
   $y = 8z - 5$
   non può essere risolto per tutte e quattro le variabili x,y,z e g.

3. Il seguente sistema in due equazioni e in una sola incognita è impossibile:
   $x = 6$
   $x = 7 + 2x$

Diverse dalle equazioni, soddisfatte solo per particolari valori delle incognite, sono le IDENTITÀ, uguaglianze soddisfatte per qualunque valore assunto dalle incognite.
Un esempio è il *prodotto notevole*: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. *Prova!*

Qualunque modello economico, anche il più semplice, si compone di più equazioni e quindi di più variabili.
Si distingue tra:

- VARIABILI ENDOGENE: sono determinate dalla soluzione del modello/sistema;
- VARIABILI ESOGENE: hanno un valore definito, prefissato dall'esterno del sistema.

Esempio: variabili endogene ed esogene
Considera la funzione di domanda: $Q = D(P, R)$.La relazione che si vuole analizzare è quella tra prezzo P e quantità Q. Il reddito R si assume esogeno.

Oltre alle variabili, o incognite, nelle equazioni possono comparire:

- COSTANTI: sono precisi valori numerici all'interno dell'equazione;
- COEFFICIENTI: sono costanti che moltiplicano le variabili;
- PARAMETRI: coefficienti/costanti rappresentati da lettere.

3 LA FUNZIONE LINEARE

3.1 Espressione Generale

$y = n + mx$
x e y sono le variabili della funzione, n e m sono i parametri: a valori diversi dei parametri corrispondono rette diverse. Definiamo:

- n è il *termine noto* o *intercetta* della retta: è il valore di y quando $x = 0$. Quando $n = 0$ la retta passa per l'origine degli assi, il punto (0,0).

- m è il *coefficiente angolare*: misura l'inclinazione della retta. Abbiamo:

  – quando $m > 0$ la retta è crescente, inclinazione positiva;
  – quando $m < 0$ la retta è decrescente, inclinazione negativa;
  – quando $m = 0$ la retta è parallela all'asse delle ascisse, inclinazione nulla.

  Maggiore è il valore assoluto (altrimenti detto *modulo*) di m, maggiore è l'inclinazione della retta.

3.2 Rappresentazione Grafica

Qualunque retta, essendo una funzione, può essere rappresentata in un sistema di assi cartesiani. Annotazioni utili sono le seguenti:

1. per due punti passa una sola e una sola retta;
2. l'asse delle ascisse è definito da $y = 0$;
3. l'asse delle ordinate è definito da $x = 0$;
4. la retta bisettrice del I° e III° quadrante è $y = x$;
5. la retta bisettrice del II° e IV° quadrante è $y = -x$;
6. rette con lo stesso coefficiente angolare sono parallele;
7. dato un punto A (a,b) e un coefficiente angolare ml'equazione della retta può essere ricavata dalla formula:
   $y - b = m(x - a)$;
8. dati due punti A (a,b) e B(c,d) l'equazione della retta è:
   $\frac{y-d}{b-d} = \frac{x-c}{a-c}$;
9. due rette sono perpendicolari se il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1.

Figura 3. Rette parallele.

$$y = 1/3x$$

$$y = 2 + 1/3x$$

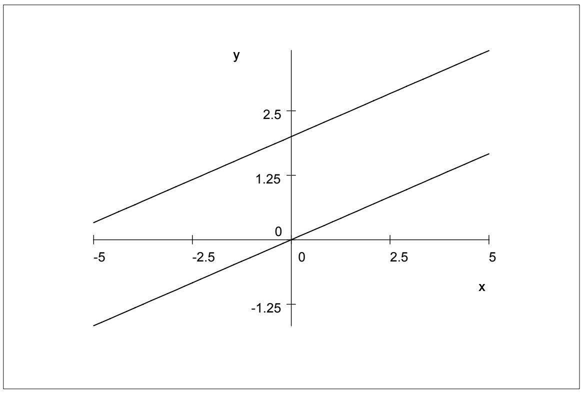
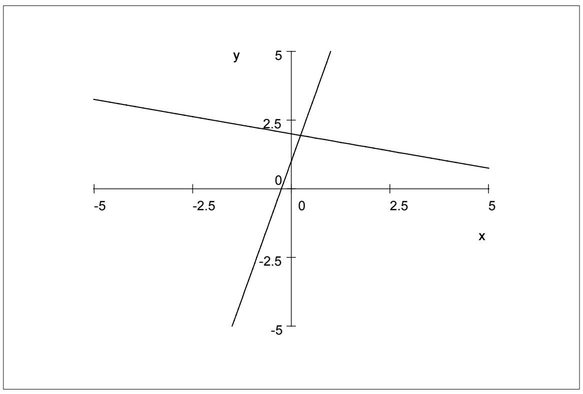


Figura 4. Rette perpendicolari

$$y = 2 + 4x$$

$$y = 2 - 1/4x$$



3.3 Forma implicita

Come qualunque funzione anche la retta può essere espressa in *forma implicita*: $f(x, y) = 0$
Esempio: data la forma implicita della retta $4x + 3y = 24$ è facile ricavarne la forma esplicita $y = 8 - 4/3x$.

3.4 Il vincolo di bilancio del consumatore

Il vincolo di bilancio del consumatore è un esempio di retta in forma implicita in cui compaiono più grandezze: $P_1y_1 + P_2y_2 = M$.
La relazione di interesse è tra y_1 e y_2. P_1, P_2 e M sono dei parametri.
La forma esplicita del vincolo diventa:

$$y_2 = M/P_2 - P_1/P_2y_1 \tag{1}$$

Intercetta= M/P_2
Coefficiente angolare= $-P_1/P_2$
Dalla (1) è possibile effettuare degli esercizi di *statica comparata*, con i quali si mira a rispondere alla domanda: "Cosa accade alla funzione di interesse (in questo caso il vincolo di bilancio) quando varia un parametro (qui P_1, P_2 o M), lasciando costante tutto il resto?"
Nel presente contesto, dunque possiamo avere tre diverse situazioni:

1. AUMENTA M: varia l'intercetta e il vincolo ha uno spostamento parallelo verso destra;
2. AUMENTA P_1: l'intersezione con l'asse delle ascisse (in questo caso di y_1)si sposta verso l'origine e la pendenza della retta aumenta;
3. AUMENTA P_2: l'intercetta si avvicina all'origine e la pendenza diminuisce.

Esempio: il vincolo di bilancio del consumatore
y_1 è il bene pomodoro
y_2 è il bene formaggio
$P_1 = 6$
$P_2 = 3$
$M = 12$
L'equazione in forma implicita è

$$6y_1 + 3y_2 = 12 \tag{2}$$

L'equazione in forma esplicità è

$$y_2 = 4 - 2y_1 \tag{3}$$

Figura 5. Il vincolo di Bilancio

$$y_2 = M/P_2 - P_1/P_2 y_1$$

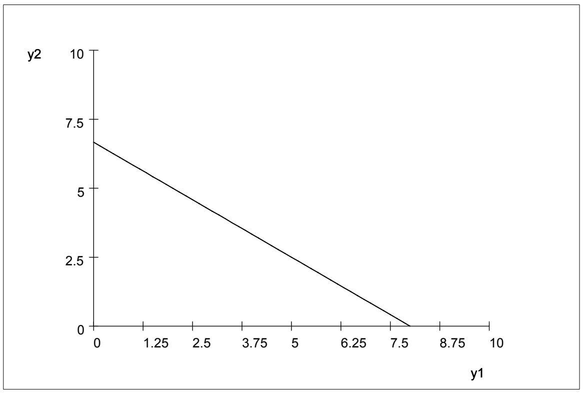


Figura 6. Aumento di reddito

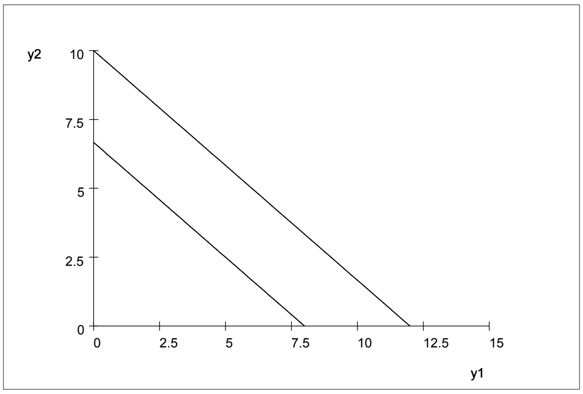


Figura 7. Aumento di P_1

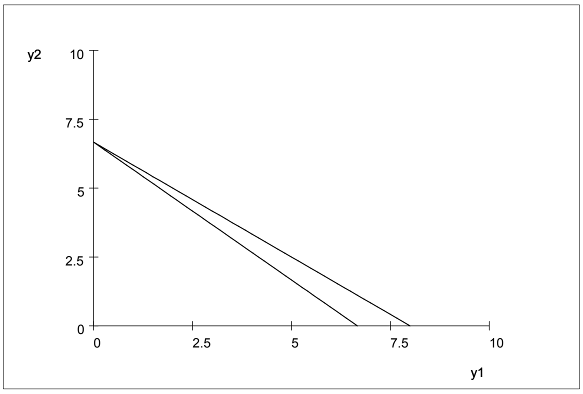


Figura 8. Aumento di P_2

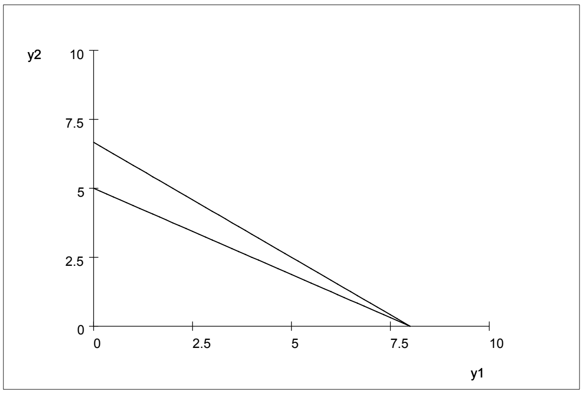
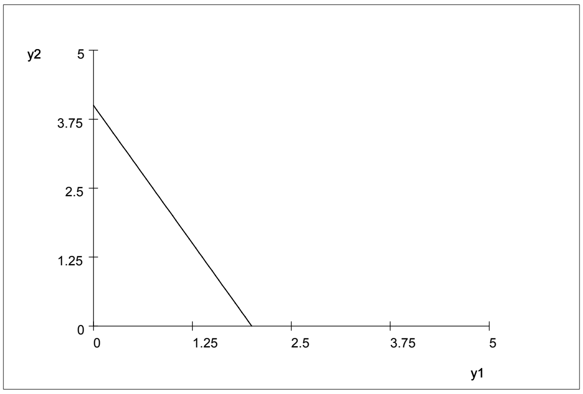


Figura 9. Vincolo di Bilancio: $y_2 = 4 - 2y_1$



3.5 Il coefficiente angolare

Come abbiamo visto, il coefficiente angolare (m) misura l'inclinazione della retta. Graficamente può essere ottenuto utilizzando il *metodo del triangolo.*
Dati due punti A(X_A,Y_A) e B(X_B,Y_B), sappiamo che[4]:
$m = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$
Osservando il grafico ciò equivale a dire:
$m = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_X}$
Con il simbolo Δ si rappresenta un incremento o una variazione della variabile a cui si riferisce. In questo caso abbiamo:

- $\Delta_X = X_B - X_A$;
- $\Delta_Y = Y_B - Y_A$.

La frazione $\frac{\Delta_Y}{\Delta_X}$ viene definita *rapporto incrementale* quando sulla retta si passa dal punto A al punto B.
Quando $\Delta_X = 1$ abbiamo che il coefficiente angolare misura l'incremento di Y a fronte di un aumento unitario di X. In simboli: $m = \Delta_Y$.

E' importante notare che nel caso della retta (vedremo come ciò non valga quando si considera una funzione non lineare) il rapporto incrementale è costante e non varia al variare della dimensione del triangolo preso a riferimento o dei punti presi. Un esempio chiarirà il concetto:

Esempio: rapporto incrementale
L'equazione della retta è $y = 5 + 3x$
Calcoliamo il rapporto incrementale per i seguenti tre casi:

1. Data l'ascissa $X_A = 4$, sostituendo nell'equazione della retta si ottiene l'ordinata $Y_A = 17$ da cui
   Punto A (4,17)
   Data l'ascissa $X_B = 5$ otteniamo l'ordinata $Y_B = 20$
   Punto B (5,20)
   $m = \frac{\Delta_Y}{\Delta_X} = 3$;
2. $X_C = 30$ da cui, sostituendo nell'equazione della retta, $Y_C = 95$
   Punto C (30,95)
   $X_D = 31$ e quindi $Y_D = 98$
   Punto D (31,98)
   $m = \frac{\Delta_Y}{\Delta_X} = 3$
   Confrontando il caso 1 con il caso 2 possiamo dire che *il rapporto incrementale non dipende dai punti presi.*
3. Consideriamo ancora il Punto A (4,17).
   Date le coordinate $X_E = 6$ e $Y_E = 23$ abbiamo il
   Punto E (6,23)
   $m = \frac{\Delta_Y}{\Delta_X} = 3$
   Paragonando il caso 3 al caso 1 si conclude che *il rapporto incrementale non dipende dall'ampiezza del triangolo.*

Ultimo accorgimento: è facile verificare che quando la retta è decrescente, il rapporto incrementale è negativo. (*Prova!*)

[4] In caso di dubbi vedere la sezione 3.2.

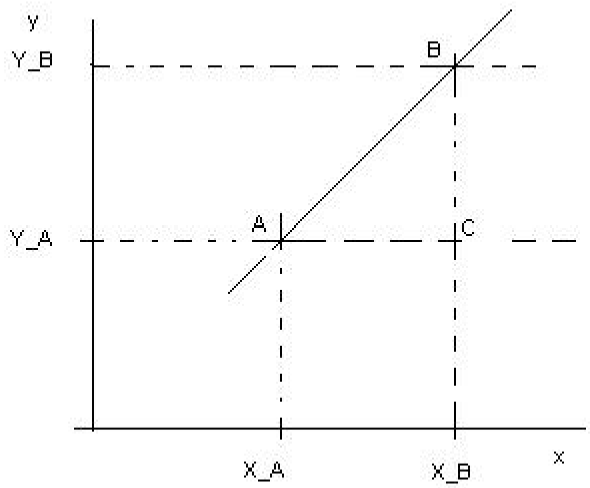


Figura 10. Il rapporto incrementale della retta.

4 CONCETTO DI DERIVATA

La domanda che ci poniamo ora è: "Cosa succede se si sceglie un valore di Δ_X molto piccolo?"

Effettuiamo il *passaggio al limite* ossia selezioniamo Δ_X tale che si discosti da zero per un valore trascurabile. Cambia la simbologia: non più Δ_X ma dx, non più Δ_Y ma dy. Considerando il nostro triangolo, i due punti presi a riferimento ora vengono a coincidere (B si avvicina sempre più ad A), il rapporto $\frac{dy}{dx}$ non si riferisce più ad un intervallo ma ad un punto.

La *derivata* di un punto è il limite del rapporto incrementale quando l'incremento della variabile indipendente a partire da quel punto tende a zero. A differenza dal rapporto incrementale, dunque, ora la variazione della x non è effettiva ma solo potenziale. La derivata ci dice se la funzione in quel punto è crescente o decrescente.

- $\frac{dy}{dx} > 0$ funzione crescente nel punto, inclinazione positiva;
- $\frac{dy}{dx} < 0$ funzione decrescente nel punto, inclinazione negativa.

Se calcoliamo la derivata per ogni punto della variabile indipendente otteniamo una funzione *derivata* dalla precedente.

In simboli la derivata di una funzione si indica con: $\frac{dy}{dx}$, y', $f'(x)$.

4.1 Derivata della retta

La derivata della retta in un punto è il valore di $\frac{\Delta_Y}{\Delta_X}$ quando Δ_X tende a zero. Sappiamo che il rapporto incrementale della retta, che coincide con il coefficiente angolare, è costante.
La derivata della retta è pari dunque al suo coefficiente angolare.

La definizione generale di derivata è:
$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta_X \to 0} \frac{\Delta_Y}{\Delta_X}$
La funzione lineare è:
$f(x) = n + mx$
La definizione di rapporto incrementale è:
$\frac{\Delta_Y}{\Delta_X} = \frac{f(x+\Delta_X)-f(x)}{\Delta_X}$
Nel caso della retta abbiamo:
$\frac{\Delta_Y}{\Delta_X} = \frac{n+m(x+\Delta_X)-n-mx}{\Delta_X} = m\frac{\Delta_X}{\Delta_X} = m$
Da cui la derivata:
$f'(x) = \lim_{\Delta_X \to 0} m = m$

Figura 11. Una retta

$$f(x) = -1 + 2x$$

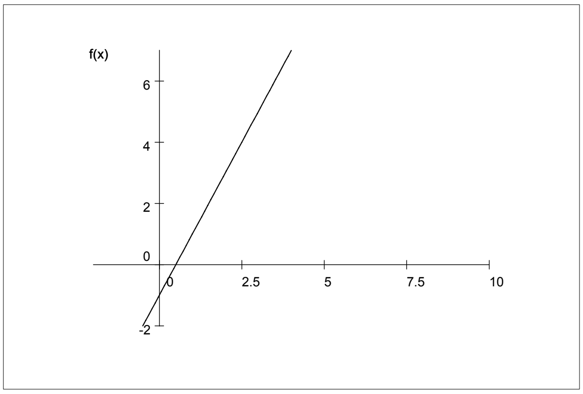
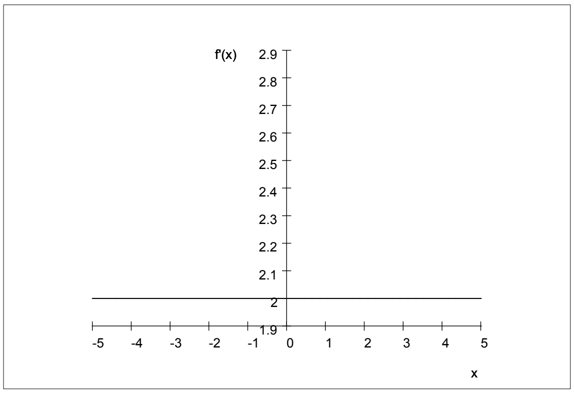


Figura 12. Derivata della retta

$$f'(x) = 2$$



4.2 Derivata di una funzione qualsiasi

Partiamo dal rapporto incrementale della Figura 13. Quando x passa da X_a a X_b, il rapporto incrementale è maggiore di uno: $\frac{BC}{AC} > 1$. Quando x passa da X'_a a X'_b, il rapporto incrementale è invece minore di uno: $\frac{B'C'}{A'C'} < 1$.

Per una funzione qualsiasi dunque il rapporto incrementale varia al variare dei punti presi e della dimensione del triangolo.

Poichè la derivata è definita come limite del rapporto incrementale, anch'essa assumerà a sua volta valori diversi a seconda che venga calcolata in A o A'.

Graficamente la derivata di una funzione si individua come segue. Consideriamo la Figura 14. Il rapporto incrementale corrispondente al passaggio dal punto X_A al punto X_B è pari a
$\frac{\Delta_Y}{\Delta_X} = \frac{BC}{AC}$
ossia al coefficiente angolare della retta secante s.

Man mano che X_B si avvicina a X_A, cambia il rapporto incrementale e si ottengono rette secanti con pendenze diverse. Quando B coincide con A, non si ha più una retta secante alla funzione bensì una retta tangente. La derivata della funzione nel punto A è il valore del coefficiente angolare della retta tangente t.

Ne seguono due definizioni equivalenti di DERIVATA della funzione in un punto:

1. limite del rapporto incrementale quando $\Delta_X \to 0$;
2. valore del coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto.

La prima definizione è utile quando si conosce la forma funzionale, la seconda quando si conosce il grafico della funzione. Vediamo un esempio di utilizzo di entrambe le definizioni.

Esempio: definizione 1
Si calcoli la derivata della *parabola* la cui funzione definita da $f(x) = x^2$.

Partiamo dal rapporto incrementale:
$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{\Delta_f(x)}{\Delta_x} = \frac{f(x+\Delta_x)-f(x)}{\Delta_x} =$
$= \frac{(x+\Delta_x)^2-x^2}{\Delta_x} = \frac{x^2+2x\Delta_x+(\Delta_x)^2-x^2}{\Delta_x} =$
$= \frac{\Delta_x(2x+\Delta_x)}{\Delta_x}$

Facendo il passaggio al limite otteniamo la derivata:
$f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} 2x + \Delta_x = 2x$

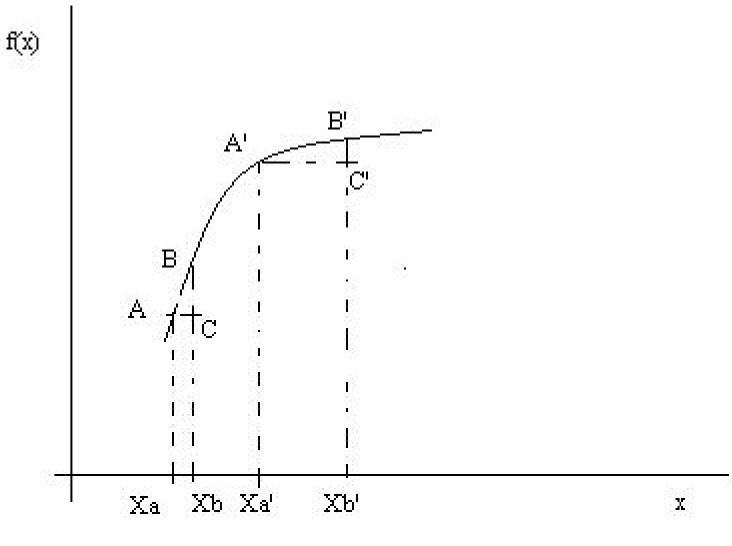


Figura 13. Rapporto incrementale di una funzione qualsiasi.

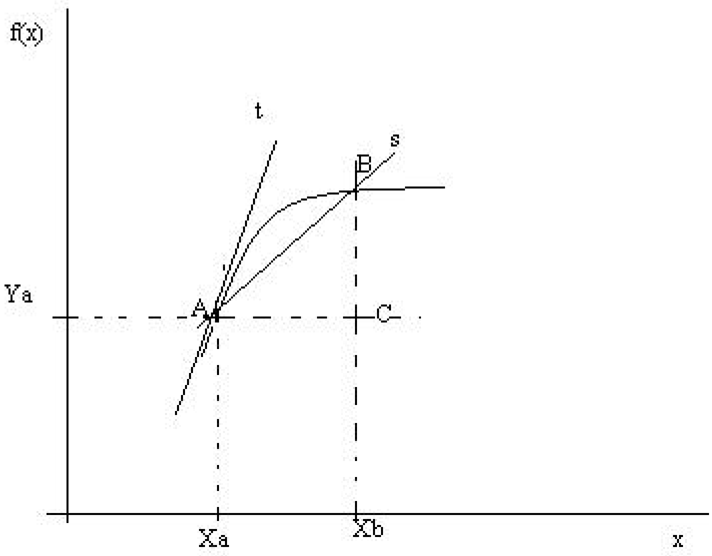


Figura 14. Derivata di una funziane qualsiasi.

4.3 Regole di Derivazione

Calcolando la derivata per tutti i punti della funzione si ottiene la funzione derivata. In questa sezione sono elencate le principali regole di derivazione.

1. La derivata di una costante è nulla:
   $f(x) = k \to f'(x) = 0;$
2. le costanti moltiplicative si conservano:
   $f(x) = ag(x) \to f'(x) = ag'(x);$
3. la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate:
   $f(x) = h(x) + g(x) \to f'(x) = h'(x) + g'(x);$
4. derivata di un prodotto:
   $f(x) = h(x)g(x) \to f'(x) = h(x)g'(x) + h'(x)g(x);$
5. derivata di una potenza:
   $f(x) = x^{\alpha} \to f'(x) = \alpha x^{\alpha-1};$
6. derivata di un quoziente:
   $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \to f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{\mathrm{h}^2(x)}$
7. derivata di una differenza:
   $f(x) = g(x) - h(x) \to f'(x) = g'(x) - h'(x)$
8. derivata del logaritmo:
   $f(x) = lnx \to f'(x) = \frac{1}{x}$
9. derivata di e^x:
   $f(x) = e^x \to f'(x) = e^x;$
10. derivata di una funzione composta:
    $y = f(z)ez = g(x) \to y = f[g(x)]$
    $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = f'(z)g'(x)$

Esercizio: calcolare le derivate delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = 3x^2$
2. $f(x) = x^2 + 3 + 4x$
3. $f(x) = x^{1/2}$
4. $f(x) = (2x + 1)^2$
5. $f(x) = (5x^3 - 4x^2 + 6x - 1)^3$
6. $f(x) = ln(1 + x^2)$

4.4 Derivate Seconde

Dato che la derivata di una funzione è a sua volta una funzione, anche essa può essere derivata. Si ottiene così la *derivata seconda* , in simboli: $f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}$.
La *derivata prima* dà indicazioni sulla pendenza della funzione:

- $f'(x) > 0 \rightarrow f(x) crescente$;
- $f'(x) < 0 \rightarrow f(x) decrescente$;
- $f'(x) = 0 \rightarrow f(x) costante$.

La *derivata seconda* dà informazioni sulla concavità o convessità della funzione[5]:

- $f''(x) > 0 \rightarrow f(x) convessa$;
- $f''(x) < 0 \rightarrow f(x) concava$.

Esercizio: data la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ studiarne crescenza e decrescenza (derivata prima), concavità e convessità (derivata seconda) e provare a tracciarne un grafico.

[5] Una funzione è *concava* se il segmeno secante giace tutto *sotto* la funzione; una funzione è *convessa* se il segmento secante giace *sopra* la funzione.

5 FUNZIONI IN PIù VARIABILI

Fin qui abbiamo analizzato funzioni in una sola variabile indipendente. Ora vedremo cosa succede quando le variabili indipendenti sono più di una.
Un tipico esempio è la *funzione di produzione* che lega la quantità prodotta di un bene (y) ai fattori produttivi, o *input* (x_i), impiegati.
$y = f(x_1, ..., x_n) \rightarrow n$ variabili indipendenti o input.
Il grafico di una funzione in più variabili necessita di più dimensioni, una per ogni variabile presente. Ciò rende difficile la rappresentazione grafica di queste funzioni.
Tuttavia quando le variabili indipendenti sono solo due è possibile rappresentare graficamente la funzione ricorrendo alle *curve di livello*.

5.1 Curve di Livello

Una curva di livello, o contorno, di una funzione è l'insieme delle combinazioni delle due variabili indipendenti tali che la variabile dipendente assuma sempre lo stesso valore.
Data la nostra funzione $y = f(x_1, x_2)$, fissiamo il valore di y, ossia poniamo $y = y_0$, y_0 noto. Otteniamo:
$y_0 = f(x_1, x_2)$ in cui le incognite sono due.
A questo punto possiamo esplicitare x_2:
$x_2 = g(y_0, x_1)$ e rappresentare la funzione in un sistema di assi cartesiani.

Esempi

1. La curva di livello per la funzione $y = 3x_1 + 2x_2$ e il valore $y = 6$ si ottiene come segue:
   $6 = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow x_2 = 3 - 3/2x_1$
   In generale: $x_2 = y/2 - 3/2x_1$. Vedi Figura 16.

2. Data la funzione $y = x_1x_2$ e $y = 1$ si ottiene come curva di livello l'iperbole equilatera:
   $x_2 = 1/x_1$
   In generale: $x_2 = y/x_1$. Vedi Figura 17.

3. Le *curve di indifferenza*, lungo le quali l'*utilità* è tenuta costante, sono curve di livello. Per ogni livello della funzione di utilità si ottiene una diversa curva di indifferenza.

Figura 15. Curve di livello lineari.

$$y = 3x_1 + 2x_2$$
$$x_2 = y/2 - 3/2x_1$$

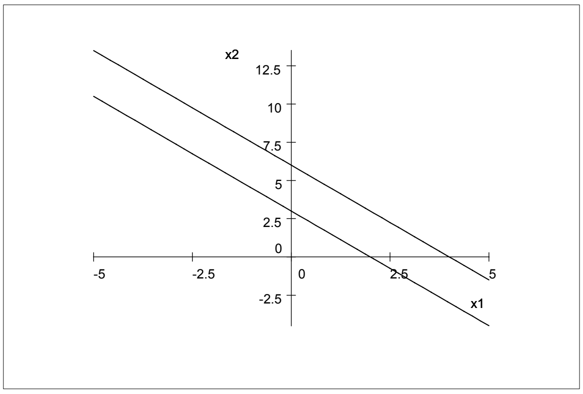
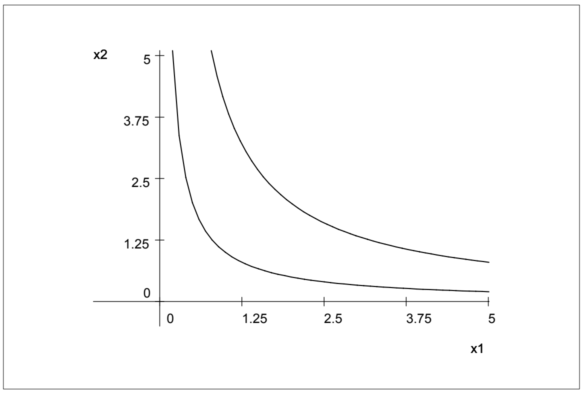


Figura 16. Curve di livello.

$$y = x_1 x_2$$
$$x_2 = y/x_1$$



5.2 Derivate Parziali

Nel caso di funzioni a più variabili il concetto di derivata muta leggermente: in questo caso si parla di *derivata parziale*, che misura la variazione della variabile dipendente dovuta all'incremento infinitesimale di una sola variabile indipendente, ferme restando le altre.
La derivata parziale di una funzione rispetto ad una variabile indipendente x_i si calcola derivando la funzione rispetto a x_i e tenendo ferme tutte le altre variabili indipendenti, che vengono considerate come delle costanti.

Esempio: derivate parziali 1
$y = 8x_1 + 2/3x_2$
La derivata parziale di y rispetto a x_1, in simboli $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ o f_1, è:
$f_1 = 8$
$f_2 = 2/3$

Valgono le stesse regole di derivazione già viste:

Esempio: derivate parziali 2
$y = 4(x_1)^2 + 2x_1x_2$
$f_1 = 8x_1 + 2x_2$
$f_2 = 2x_1$

E possiamo anche calcolare le *derivate parziali seconde*:

- *pure* $\rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial (x_i)^2} = f_{ii}$;
  $f_{11} = 8$
  $f_{22} = 0$

- *miste*$\rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$;
  $f_{12} = 2$
  $f_{21} = 2$

NOTA: $f_{ij} = f_{ji}$.

Esempio: utilità marginale
Considera la seguente *funzione di utilità*: $U = 5y_1 + 3y_2 + 2y_1y_2$
L'*utilità marginale* rispetto al bene y_1 è:
$U_1 = 5 + 2y_2$
L'*utilità marginale* rispetto al bene y_2 è:
$U_2 = 3 + 2y_1$

5.3 Differenziale Totale

Quando si vuole analizzare l'effetto sulla variabile dipendente della variazione di *tutte* le variabili indipendenti si calcola il *differenziale totale*.

Nel caso di una sola variabile indipendente abbiamo:

- $dx \rightarrow$ differenziale della variabile indipendente;

- $dy \rightarrow$ differenziale della variabile dipendente;

- $dy = f'(x)dx$ dalla definizione di derivata.

Il differenziale della funzione, dy , misura *l'aumento* della y quando la x aumenta di un ammontare pari a dx.

Quando le variabili indipendenti sono *due* il differenziale totale è pari a:
$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$

Quando le variabili indipendenti sono n il differenziale totale diventa:
$dy = f_1 dx_1 + ... + f_n dx_n = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$

Il differenziale totale di una funzione in *due* variabili indipendenti è utile per calcolare la derivata di una curva di livello:
$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{y=y_0}$
Siccome lungo una curva di livello il valore della variabile dipendente è tenuto fisso ($y = y_0$), abbiamo che $dy = 0$.
Sostituendo $dy = 0$ nel differenziale totale otteniamo:

$0 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \rightarrow \frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{y=y_0} = -\frac{f_1}{f_2}$
Ossia, l'inclinazione della curva di livello è pari al rapporto cambiato di segno delle due derivate parziali della funzione.

Esempio: saggio marginale di sostituzione
Calcolare la pendenza di *una curva di indifferenza* data la *funzione di utilità* $U = u(y_1, y_2)$.
Il *differenziale totale* è pari a
$dU = u_1 dy_1 + u_2 dy_2$
Lungo una *curva di indifferenza* il valore dell'utilità è tenuto fermo a un valore prefissato, quindi $dU = 0$.
Da cui la pendenza:
$\frac{dy_2}{dy_1}\Big|_{U=U_0} = -\frac{u_1}{u_2}$

Il valore assoluto dell'inclinazione della curva di indifferenza è definito *saggio marginale di sostituzione*(SMS).

$SMS_{21} = \frac{u_1}{u_2}$: il saggio marginale di sostituzione misura la quantità di y_2 cui il consumatore è disposto a rinunciare in cambio di un incremento marginale di y_1, restando indifferente (l'utilità non cambia) tra la sistuazione di partenza e quella di arrivo.

6 MASSIMI E MINIMI

Quando si studia una funzione si è interessati anche a quei punti in cui la funzione raggiunge valori *massimi* e valori *minimi.* Sia massimi che minimi possono essere *relativi*, ossia limitati a un intervallo della funzione, o *assoluti.* Sia massimi che minimi possono essere *liberi*, ossia risolvono un problema di massimizzazione libera, o *vincolati* quando nella massimizzazione compare un *vincolo.*
Tratteremo distintamente gli ultimi due casi.

6.1 Massimi e minimi liberi

A seconda che la funzione sia in un a sola variabile indipendente o in più variabili indipendenti, valgono le seguenti condizioni.

6.1.1 Funzioni in una variabile indipendente

- *condizione del primo ordine* $\Rightarrow$ nei punti di massimo e di minimo, detti anche punti critici della funzione, la derivata prima della funzione è nulla;

- *condizioni del secondo ordine* $\Rightarrow$ la derivata seconda determina se il punto critico sia un massimo o un minimo:

  – $f''(x) < 0 \rightarrow$ la funzione è concava e il punto critico è un massimo;
  – $f''(x) > 0 \rightarrow$ la funzione è convessa e il punto critico è un minimo.

Esempio: massimi e minimi
Data la funzione $f(x) = x^3+2x^2+7$ i punti critici si trovano ponendo la derivata prima uguale a zero:
$f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \rightarrow X_1 = 0; X_2 = -4/3$
Dal segno della derivata seconda in X_1 e X_2 possiamo dire se si tratta di massimo o minimo:
$f''(x) = 6x + 4$
$f''(0) = 4 \rightarrow$ funzione convessa, in $X = 0$ la funzione ha un minimo ($f(0) = 7$).
$f''(-4/3) = -4 \rightarrow$ funzione concava, in $X = -4/3$ la funzione ha un massimo ($f(-4/3) = 173/27$).
NOTA: sono due punti di massimo e di minimo *relativo*, prova a tracciare il grafico della funzione per convincerti.

Due eccezioni per le quali non valgono le condizioni sopra elencate sono:

- funzione monotona in un intervallo, per la quale si ha una soluzione d'angolo;

- funzione non derivabile in corrispondenza di un punto angoloso.

6.1.2 Funzioni in più variabili indipendenti

- *condizioni del primo ordine* $\Rightarrow$ perchè si abbia un massimo o un minimo tutte le derivate parziali prime devono essere uguali a zero;

- *condizioni del secondo ordine* $\Rightarrow$ sono più complicate e non saranno trattate in queste note. Per la soluzione dei nostri problemi le assumeremo sempre soddisfatte.

Esempio: funzione in due variabili
I punti critici di $f(x_1, x_2) = 3(x_1)^2 - 4x_1 + 2(x_2)^2$ sono:
$f_1 = 6x_1 - 4 = 0 \rightarrow X_1 = 2/3$
$f_2 = 4x_2 = 0 \rightarrow X_2 = 0$

6.2 Massimi e Minimi Vincolati

Il principale strumento matematico utilizzato durante un corso di microeconomia è inerente alla soluzione di problemi di massimo e minimo vincolato. La ragione di tale utilizzo può essere ricondotta all'ipotesi di RAZIONALITÀ alla base del comportamento degli agenti economici.[6]
Fin qui abbiamo supposto che la funzione fosse libera di assumere qualunque valore, senza nessuna "costrizione". Ora cambia lo scenario: la massimizzazione diventa *vincolata* nel senso che la funzione da massimizzare, che prende il nome di *funzione obiettivo*, è limitata nei valori che essa può avere perchè deve soddisfare anche le condizioni dettate da un'altra funzione che funge, appunto, da *vincolo*.
Il metodo utilizzato per risolvere i problemi di massimo vincolato è il seguente:

- si costruisce una funzione ausiliaria, detta *Lagrangiana*;
- si massimizza la funzione ausiliaria utilizzando le regole per la massimizzazione libera;
- la soluzione del problema ausiliario coincide con la soluzione del problema di massimo vincolato di partenza.

Analizziamo il procedimento nel caso di funzioni in una sola variabile indipendente, per poi passare alla sua generalizzazione.

6.2.1 Funzioni in una sola variabile indipendente

Vogliamo risolvere il problema: $\max f(x)$ subject to $g(x) = 0$
La funzione obiettivo è: $f(x)$
Il vincolo è: $g(x) = 0$
Costruiamo la Lagrangiana. Sommiamo alla $f(x)$ la $g(x)$ moltiplicata per la variabile ausiliaria λ, che prende il nome di *moltiplicatore di Lagrange*:

$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$

La funzione lagrangiana è una funzione in due variabili (x, λ). A questo punto

[6] Un agente economico è razionale se:

1. prende in considerazione tutte le alternative possibili;
2. tiene conto di ogni informazione disponibile;
3. ordina le alternative sulla base delle proprie preferenze;
4. sceglie l'alternativa più alta in graduatoria.

risolviamo in problema di massimo non vincolato utilizzando le condizioni del primo ordine:

(a) $L_x = f'(x) + \lambda g'(x) = 0$

(b) $L_\lambda = g(x) = 0$

Notiamo subito che:

- dalla (b) la massimizzazione della lagrangiana comporta che il vincolo è soddisfatto;

- poichè il vincolo è soddisfatto, considerando la (a), $\max L(x, \lambda) = \max f(x)$.

6.2.2 Funzioni in due variabili indipendenti

Il nuovo problema è: $\max f(x_1, x_2)$ subject to $g(x_1, x_2) = 0$
La Lagrangiana è:

$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$

Le condizioni del primo ordine si ottengono eguagliando a zero le tre derivate parziali:

(a) $L_1 = f_1 + \lambda g_1 = 0$

(b) $L_2 = f_2 + \lambda g_2 = 0$

(c) $L_\lambda = g(x_1, x_2) = 0$

Si risolve il sistema nelle tre incognite x_1, x_2 e λ, assumendo soddisfatte le condizioni del secondo ordine.
Dalla (a) e dalla (b), isolando λ, si ottiene: $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ che è un'equazione nelle due incognite x_1 e x_2 e che, messa a sistema con (c), ci dà x_1* e x_2*, soluzione del problema di massimo.
Vediamo subito delle applicazioni.

Esempio 1
$\max U = x_1 x_2 + 2x_1$
s.t. $4x_1 + 2x_2 = 60$

$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$

Le condizioni del primo ordine sono:

(a) $L_1 = x_2 + 2 - 4\lambda = 0$

(b) $L_2 = x_1 - 2\lambda = 0$

(c) $60 - 4x_1 - 2x_2 = 0$

Dalla (b) si ottiene $\lambda = \frac{x_1}{2}$ che, sostituito nella (a) implica $x_2 = 2x_1 - 2$.
Sostituendo in (c) troviamo $x_1* = 8$ e poi a ritroso $x_2* = 14$ e $\lambda = 4$.

Il massimo (vincolato) della funzione è:

$U = x_1 * x_2 * +2x_1* = 814 + 16 = 128$

Esempio 2
$\max Z = xy$
s.t. $x + y = 6$

$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(6 - x - y)$

Le condizioni del primo ordine sono:

(a) $L_1 = y - \lambda = 0$

(b) $L_2 = x - \lambda = 0$

(c) $6 - x - y = 0$

Dalla (a) e dalla (b) si ottiene $x = y = \lambda$. Dalla (c) $x* = y* = \lambda = 3$.

Il massimo vincolato della funzione è: $Z = 9$

Esempio 3
$\max Z = 7 + x^2 - y$
s.t. $x + y = 0$

$L(x, y, \lambda) = 7 + x^2 - y + \lambda(x + y)$

Le condizioni del primo ordine sono:

(a) $L_1 = 2x + \lambda = 0$

(b) $L_2 = -1 + \lambda = 0$

(c) $x + y = 0$

Dalla (b) e dalla (a) si ottengono: $\lambda = 1$ e $x* = -1/2$. Dalla (c) $y* = +1/2$.

Il massimo vincolato della funzione è: $Z = 27/4$

Esempio 4: la scelta ottima del consumatore
Il consumatore vuole massimizzare la sua utilità subordinatamente al vincolo di bilancio.

$\max U(y_1, y_2)$
s.t. $P_1y_1 + P_2y_2 = M$

$L(y_1, y_2, \lambda) = U(y_1, y_2) + \lambda(M - P_1y_1 - P_2y_2)$

Le condizioni del primo ordine sono:

(a) $L_1 = U_1 - \lambda P_1 = 0$

(b) $L_2 = U_2 - \lambda P_2 = 0$

(c) $P_1y_1 + P_2y_2 = M$

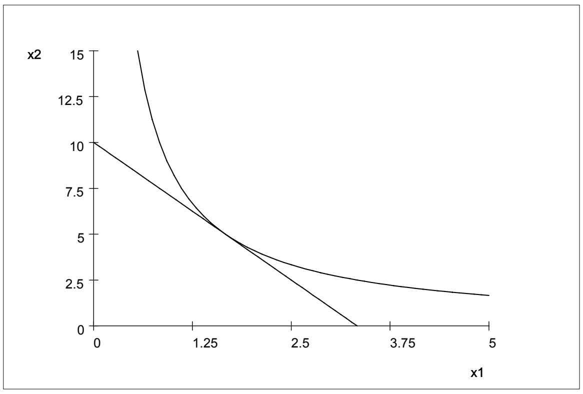
Dalla (a) e dalla (b) si ottiene $\frac{U_1}{P_1} = \lambda = \frac{U_2}{P_2}$
La condizione di equilibrio è dunque:
$\frac{U_1}{U_2} = \frac{P_1}{P_2}$

Graficamente la soluzione di un problema di massimo vincolato per le funzioni in due variabili si trova nel punto di *tangenza* tra la curva di livello per la funzione obiettivo e il vincolo.

Nel problema di massimo vincolato del consumatore (Esempio 4) la scelta ottima è caratterizzata dalla *tangenza tra curva di indifferenza e vincolo di bilancio.*
La condizione di equilibrio può essere espressa come:

$$\underbrace{SMS_{21}}_{Equivalenza Psicologica} = \underbrace{\frac{P_1}{P_2}}_{Equivalenza Economica}$$

Figura 17. Scelta ottima del consumatore.
Vincolo di Bilancio: $3x_1 + x_2 = 10$
Utilità: $U(x_1 x_2) = x_1 x_2$



6.2.3 Tre teoremi sui massimi vincolati

I seguenti teoremi vengono dati senza dimostrazioni. Per le definizioni dettagliate di funzione continua, funzione quasi-concava, insieme non vuoto, limitato, chiuso, convesso, si rimanda a manuali di matematica.

1. *Teorema di esistenza.*Condizione sufficiente perchè un problema di massimo (o minimo) vincolato abbia soluzione è che:

   a la funzione obiettivo sia continua;

   b l'insieme delle possibilità [7]sia non vuoto, limitato e chiuso.

2. *Teorema del massimo assoluto.* Condizione sufficiente perchè un massimo (o un minimo) sia assoluto è che:

   a la funzione obiettivo sia quasi-concava [8];

   b l'insieme delle possibilità sia convesso.

3. *Teorema di unicità.* Date le condizioni del Teorema 2, la soluzione trovata è unica se:

   a l'insieme delle possibilità è strettamente convesso;

   b la funzione obiettivo è strettamente quasi-concava.

[7]Insieme dei punti che soddisfano il vincolo.

[8]Una funzione in due variabili viene detta quasi concava se la sua curva di livello è convessa; viene detta strettamente quasi concava se la sua curva di livello è strettamente convessa.