Il modello di Solow

La teoria neoclassica della crescita economica

definizioni

- Per confrontare gli standard di vita tra diversi paesi nel corso del tempo dovremo distinguere tra :
- PIL aggregato Y
- PIL pro capite= Pil aggregato/popolazione
- PIL per lavoratore= Pil aggregato/forza lavoro
- Tasso di crescita del Pil= $Pil_t - Pil_{t-1}/Pil_{t-1}$
- Tasso di crescita del Pil procapite (o per lavoratore che useremo indifferentemente in quanto assumeremo che la FL cresce allo stesso tasso della popolazione):

$$\frac{\Delta(Y/N)}{Y/N} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta N}{N}$$

Fonti della crescita nel modello neoclassico

- **Accumulazione di capitale**
- **Miglioramenti nello stato della tecnologia**
- Può l'accumulazione del capitale sostenere la crescita perpetua dell'economia?
- No sulla base del modello di crescita tradizionale.
- Motivo:
- Data l'ipotesi di rendimenti marginali decrescenti del capitale, sarebbe necessaria una crescita continua del capitale e ciò richiederebbe risparmi sempre più elevati da parte degli agenti. Nonostante ciò, si arriverebbe al punto in cui la PMK $\rightarrow$ 0 e potrebbe diventare addirittura negativa (se non valesse la condizione di Inada per il capitale K-> $\propto$ la PMK->0). In tal caso la crescita si arresterebbe.

Fatti stilizzati di Kaldor

- Il fattore lavoro L misurato in termini di ore di lavoro cresce più lentamente del capitale (K) e del prodotto (Y)
- Nel lungo periodo il rapporto K/L è progressivamente aumentato
- Il rapporto K/Y non mostra alcun trend ascendente o discendente, ovvero i tassi di crescita del capitale e del prodotto seguono lo stesso andamento
- La remunerazione del capitale (tasso di interesse reale o tasso di profitto sul capitale) non mostra un trend significativo. I salari reali invece mostrano un trend ascendente.
- Le quote relative dei salari e dei profitti sul reddito nazionale sono state abbastanza stabili nel corso del tempo

Nuovi fatti stilizzati

- Per i paesi industrializzati il trend di crescita è positivo ma non è uniforme tra i periodi
- Crescita elevata in tutte le economie sviluppate (paesi OCSE) a partire dagli anni'50 (inclinazione della linea di trend molto elevata)
- Diminuzione dei tassi di crescita a partire dagli anni '70 (la linea di trend presenta una minore inclinazione)
- Convergenza dei livelli di reddito fra le economie OCSE ma non per le altre economie (convergenza significa che i paesi con un minor rapporto K/L crescono più velocemente dei paesi con un più alto K/L)
- La maggior parte dei paesi poveri appare incapace di uscire da trappole di povertà. I miracoli economici accadono ma riguardano solo alcuni paesi (attualmente Sud-Est Asiatico)
- I modelli teorici della crescita sono capaci di spiegare questi fatti?

Il ruolo dell'accumulazione

- Consente la crescita nel medio periodo
- Allorché si raggiunge lo stato stazionario la crescita è dovuta a fattori esogeni (**progresso tecnico**) e non all'accumulazione del capitale
- Nello stato stazionario un aumento dell'accumulazione (maggiore risparmio) può aumentare **il livello** del reddito e del capitale procapite ma non il tasso di crescita
- Tutto ciò può essere dimostrato sulla base del modello di Solow.

Modello di crescita standard: Robert Solow

Si parte dalla funzione di produzione aggregata :

$$Y = F(K, L)$$

Dove K è il capitale e L
è il lavoro.

Proprietà:

- Dall'ipotesi di rendimenti di scala costanti discende che la funzione è omogenea di primo grado: $\lambda Y=F(\lambda K,\lambda L)$
- Rendimenti decrescenti del capitale e del lavoro presi isolatamente (l'altro costante)
- Date le proprietà su esposte la F(.), ponendo $\lambda=1/L$, può essere scritta in forma intensiva:

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right)$$

Introduciamo il progresso tecnico E

- Nella funzione precedente introduciamo il fattore E= progresso tecnico

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, E\right)$$

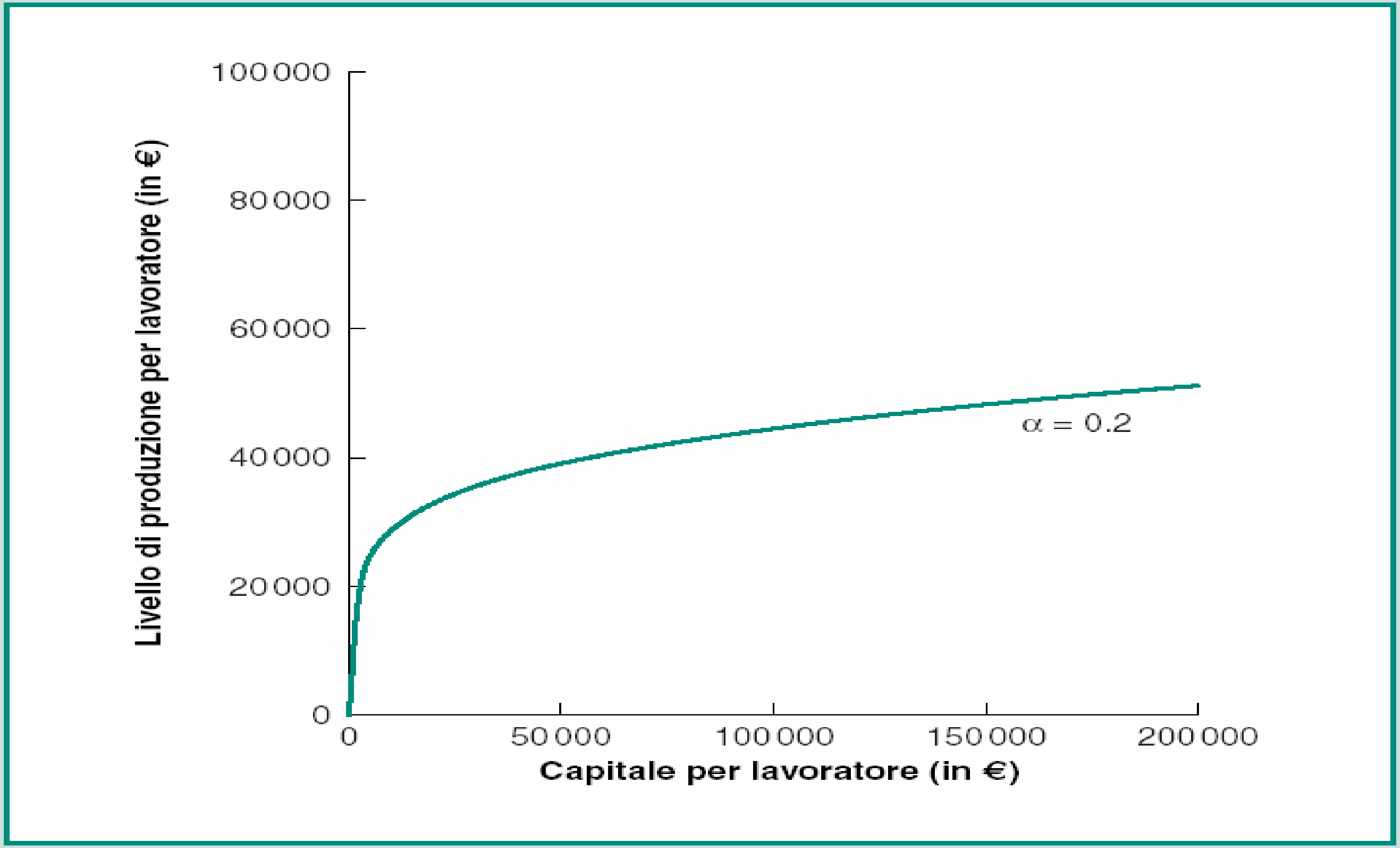
- Anche in questa forma la F() non è di alcuna utilità. Dobbiamo esplicitarla e utilizzeremo una funzione Cobb Douglas

$$\frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \times E^{1-\alpha}$$

proprietà

- I parametri del modello sono E e α. In particolare α è compreso tra 0 e1. Può essere interpretato come il parametro che indica la rapidità con la quale i rendimenti dell'investimento diventano decrescenti.
- Più precisamente indica l'elasticità dell'output per lavoratore rispetto allo stock di capitale per lavoratore
- Quando il capitale cresce il valore di α si avvicina allo zero e assumeremo che non possa diventare negativo e quindi l'incremento di produzione dovuto a un incremento unitario del capitale (PMK) diminuisce.

La funzione di produzione



Perché si usa la funzione C-D?

- Per la sua flessibilità: rappresenta un'intera famiglia di funzioni di produzione in cui E e α possono assumere qualsiasi valore
- Facilita il calcolo dei tassi di crescita:Per calcolare il tasso di crescita di una grandezza elevata a potenza basta moltiplicare la potenza per la variazione proporzionale della grandezza stessa

- Infatti, noti i valori di E e α si è in grado di calcolare quale è il livello di produzione per lavoratore per ogni possibile valore del capitale per lavoratore

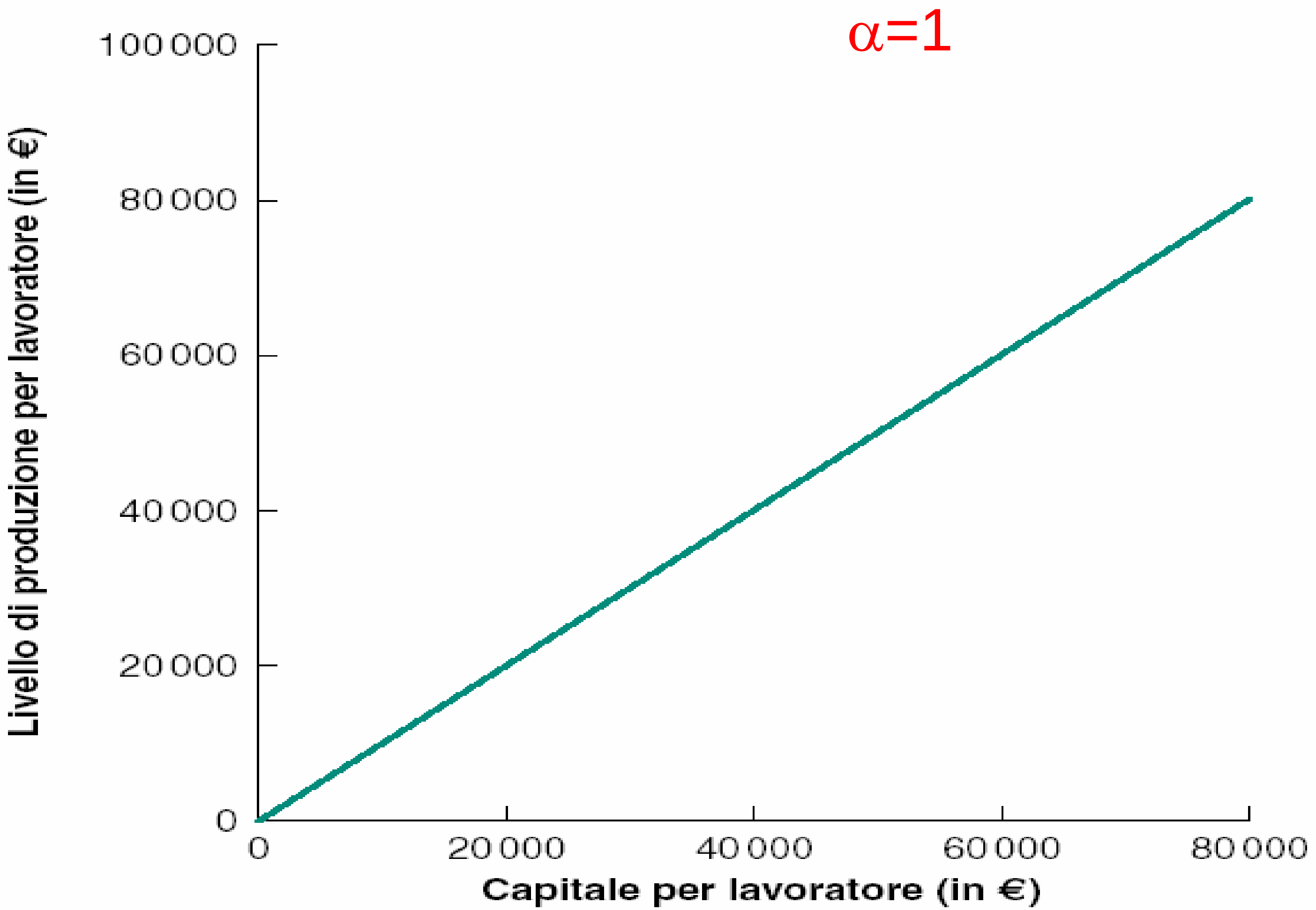
- E' una funzione crescente quindi si adatta al requisito intuitivo che una maggiore quantità di fattore induce una maggiore quantità di prodotto

Implicazioni

- Quando il parametro α è vicino a zero, intervengono rendimenti marginali rapidamente decrescenti degli aumenti del capitale per lavoratore.
- Un aumento del capitale per lavoratore genera un aumento del livello di produzione molto minore di quello generato dall'ultimo aumento del capitale per lavoratore. I rendimenti decrescenti dell'accumulazione di capitale intervengono in modo rapido e violento.

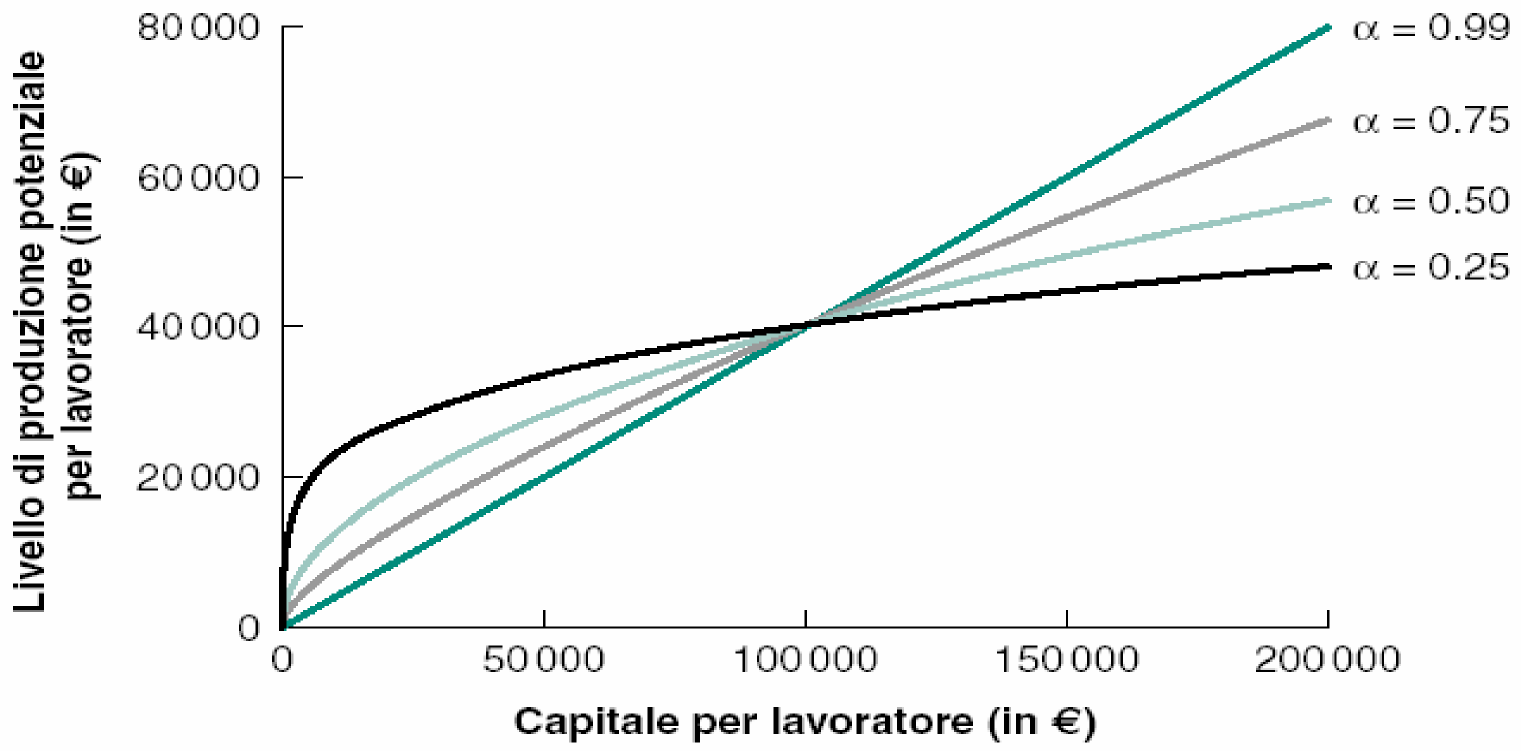
E se α =1? (crescita endogena)

- Se nella funzione di produzione Cobb-Douglas il parametro α = 1, il livello di produzione per lavoratore è direttamente proporzionale al capitale per lavoratore (e l'accumulazione di capitale è un fattore permanente di crescita)
- se si raddoppia il capitale per lavoratore, si raddoppia il livello di produzione per lavoratore. Non vi sono rendimenti decrescenti dell'accumulazione di capitale.
- Quando il parametro α è vicino a 1, ma minore di 1, i rendimenti decrescenti dell'accumulazione di capitale intervengono in modo lento.



α=1
100 000
80 000
60 000
40 000
20 000
0
Livello di produzione per lavoratore (in €)
0
20 000
40 000
60 000
80 000
Capitale per lavoratore (in €)

Funzione di produzione flessibile



Ancora sulla flessibilità della funzione CD

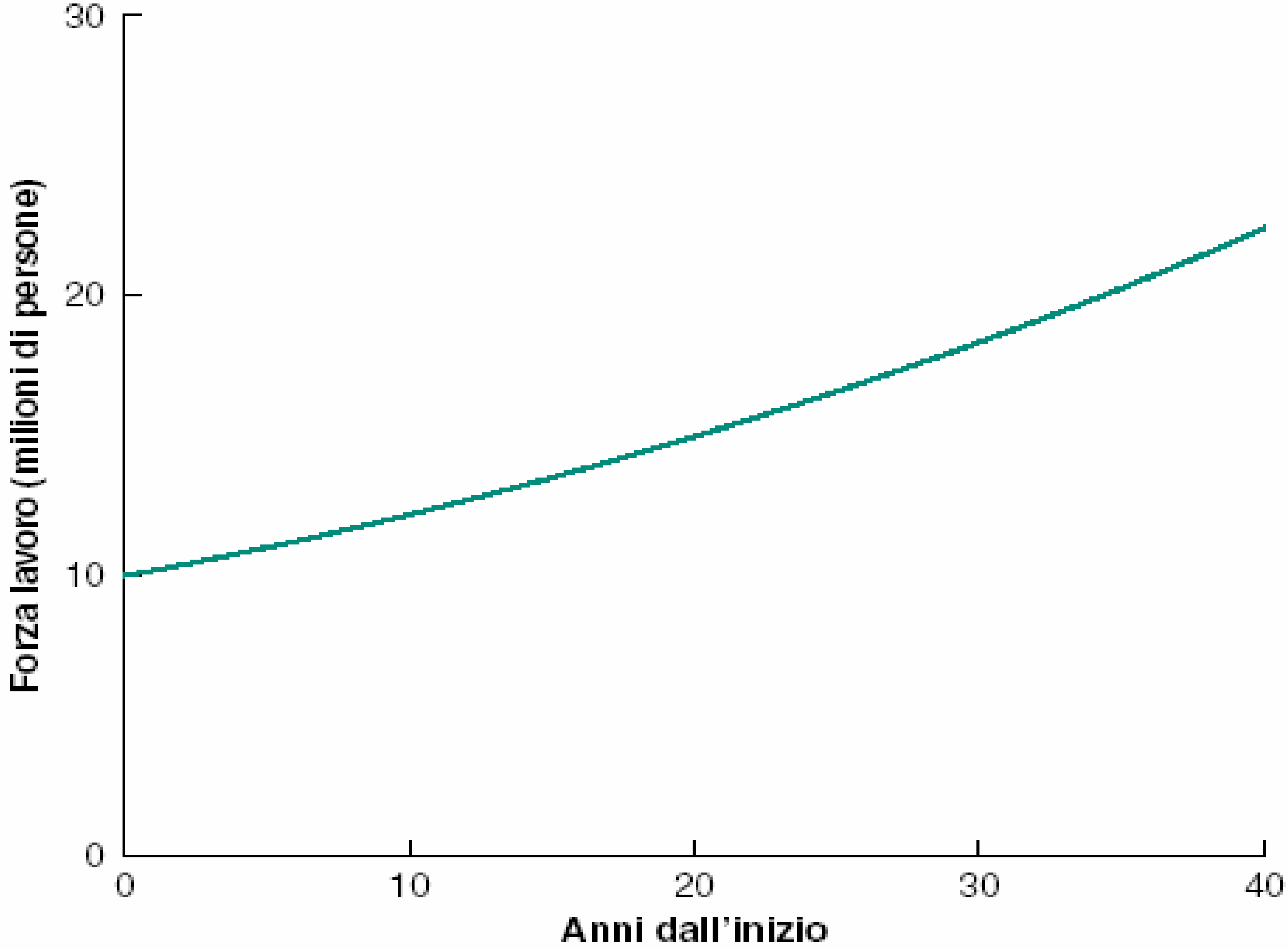
- Variando, l'esponente del rapporto capitale/lavoro (*K*/*L*) varia la pendenza della curva rappresentativa della funzione di produzione e quindi l'entità dei rendimenti decrescenti del capitale per lavoratore.
- Il parametro E indica il livello corrente di efficienza del lavoro o il livello della tecnologia. Un elevato valore di E indica che è possibile ottenere un livello di produzione per lavoratore più elevato per ogni dato valore dello stock di capitale (la fp si sposta in alto)

Altri fattori di crescita: la popolazione

- L'altra variabile da considerare nella teoria della crescita è la forza lavoro. Utilizzando delle astrazioni si assume che L cresca a un tasso costante = n.
- Il tasso di crescita di n che può variare nel corso del tempo e tra paesi è dato da:
- $\mathbf{L_{t+1} = (1+n)L_t}$
- **La figura successiva mostra il livello della popolazione quando il suo tasso di crescita è pari al 2% all'anno. La popolazione raddoppierebbe in circa 35 anni**

Regola del 70

- Se una variabile x cresce al tasso γ raddoppia o si dimezza (se $\gamma<0$) in un periodo approssimativamente uguale a 70/100 γ
- Dimostrazione:
- $X_{t+s}=2x_t \longrightarrow e^{\gamma s}=2$
- $s=\ln 2/\ \gamma \approx (=)\ 0.7/\ \gamma = 70/100\ \gamma$

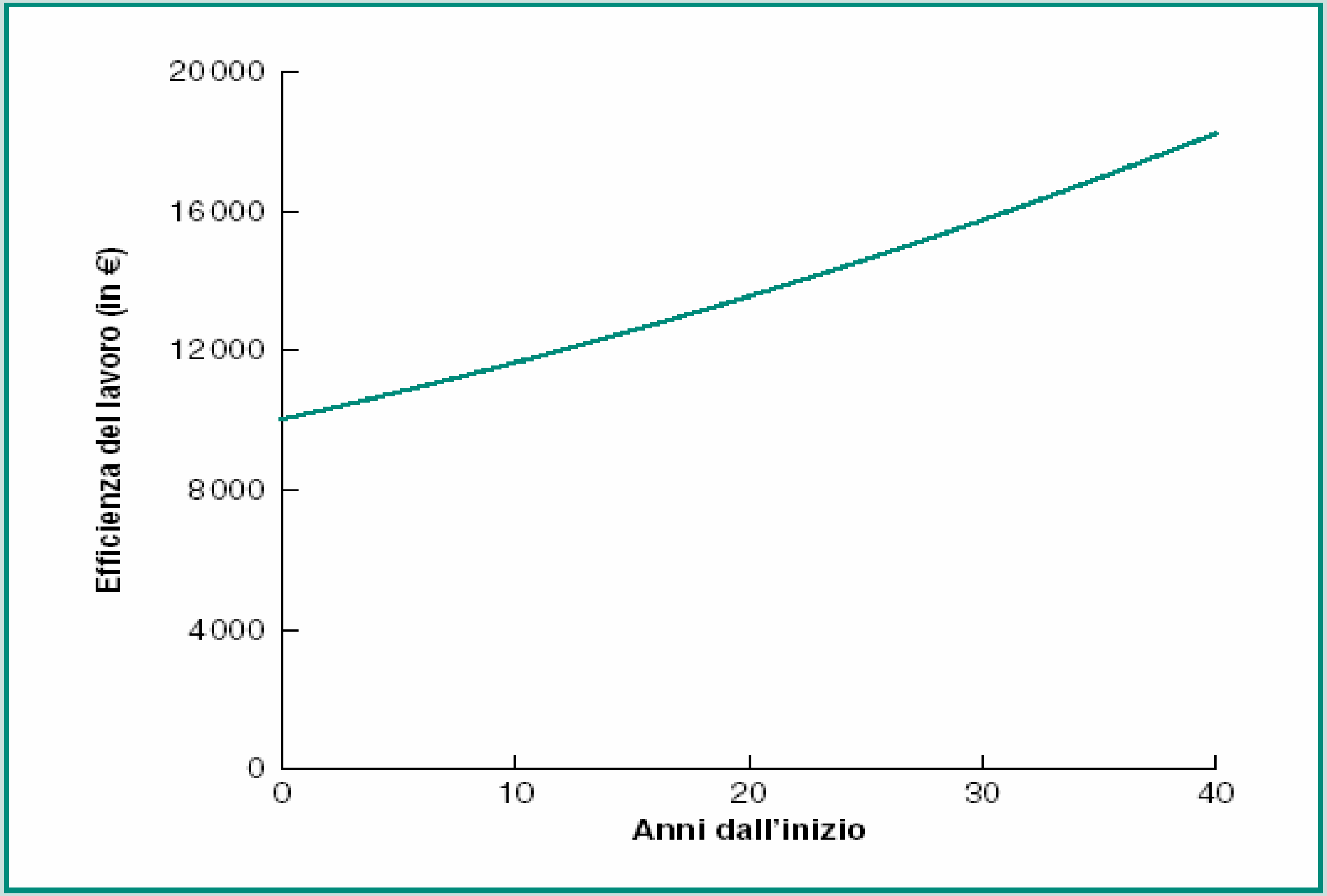

30
20
10
0
Forza lavoro (milioni di persone)
0
10
20
30
40
Anni dall'inizio

Tasso di crescita di E (efficienza del lavoro)

- Supponiamo ora che E cresca al tasso g. Anch'esso può variare nel tempo e tra paesi. Il tasso di crescita da un anno all'altro è:
- $\mathbf{E_{t+1} = (1+g)\, E_t}$

- Generalmente si assume che la crescita di E avvenga a un tasso costante (al tasso g = 1.5% all'anno). Se l'efficienza del lavoro cresce a un tasso proporzionale costante dell'1.5% all'anno, essa impiegherà circa 47 anni per raddoppiare.

Tasso di crescita di E



Tasso di crescita di K

- Assumiamo che il progresso tecnico sia assente e che la funzione dei produzione sia:

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}\right)$$

-
- Se il risparmio è una frazione costante del reddito:
- S= sY
- Ed assumiamo che l'economia sia chiusa avremo:
- I=S=sY
- Assumiamo inoltre che il capitale si deprezzi ogni periodo di una frazione δ e che aumenta invece per effetto di nuovi investimenti
- Lo stock di capitale crescerà secondo la formula:
- $K_{t+1}= K_t+ sY- \delta K_t$
- l'equazione dinamica fondamentale del modello ci dice che la variazione del capitale (spostando K(t) al I membro) è uguale al risparmio (investimento) meno il deprezzamento del capitale

Quali elementi abbiamo per costruire il modello?

- **Avendo fatto le nostre ipotesi :**
- **sul tasso di crescita della forza lavoro**
- **sul tasso di crescita di E**
- **sulla crescita del capitale che dipende da s**
- **abbiamo tutti gli elementi per costruire il modello di crescita.**

Cosa possiamo inferire da questi elementi?

- Quando lo stock di capitale dell'economia e il livello del PIL reale crescono allo stesso tasso, il rapporto K/Y è costante e l'economia è in equilibrio
- Ciò significa che l'economia si trova sul suo sentiero di **crescita bilanciata di stato stazionario**
- Generalmente tale sentiero è determinato da cinque fattori:**E** (livello di efficienza del lavoro), **g** (tasso di crescita dell'efficienza del lavoro), tasso di risparmio **s**, tasso di crescita della popolazione **n** e tasso di deprezzamento dello stock di capitale δ
- In questa versione semplificata sono assenti sia E sia il suo tasso di crescita (g) e si assume che anche la forza lavoro sia costante

Cosa si intende per sentiero di crescita bilanciata?

- Equilibrio di breve periodo: **Domanda=Offerta**

→ **prezzi stabili e costanti**

Nello studio della crescita di lungo periodo le variabili non sono mai stabili ma **crescono nel tempo** (cresce lo stock di capitale, il progresso tecnico, la popolazione). Per definire l'equilibrio dobbiamo ricercare una situazione nella quale tutte le variabili crescano insieme allo stesso tasso costante. In tal caso i rapporti chiave (K/Y, K/L, Y/L) saranno stabili. Definiremo equilibrio di crescita bilanciata di sato stazionario (o più semplicemente **stato stazionario**) la situazione nella quale **tali rapporti sono costanti nel tempo** e verso cui l'economia convergerà se dovesse allontanarsene.

Algebricamente:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

- sostituendo sY_t al posto di I_t e dividendo per L:

$$\frac{K_{t+1}}{L} = (1-\delta)\frac{K_t}{L} + s\frac{Y_t}{L}$$

- riordinando i termini (spostando K_t/L sul lato sinistro e ricordando che sY = sf(K/L)) si ha :

$$\frac{K_{t+1}}{L} - \frac{K_t}{L} = sf\left(\frac{K_t}{L}\right) - \delta \frac{K_t}{L}$$

Stato stazionario

la variazione dello stock di capitale deve essere pari a zero quando si raggiunge lo **stato stazionario.**

$$sf\left(\frac{K^*}{L}\right) = \delta\left(\frac{K^*}{L}\right)$$

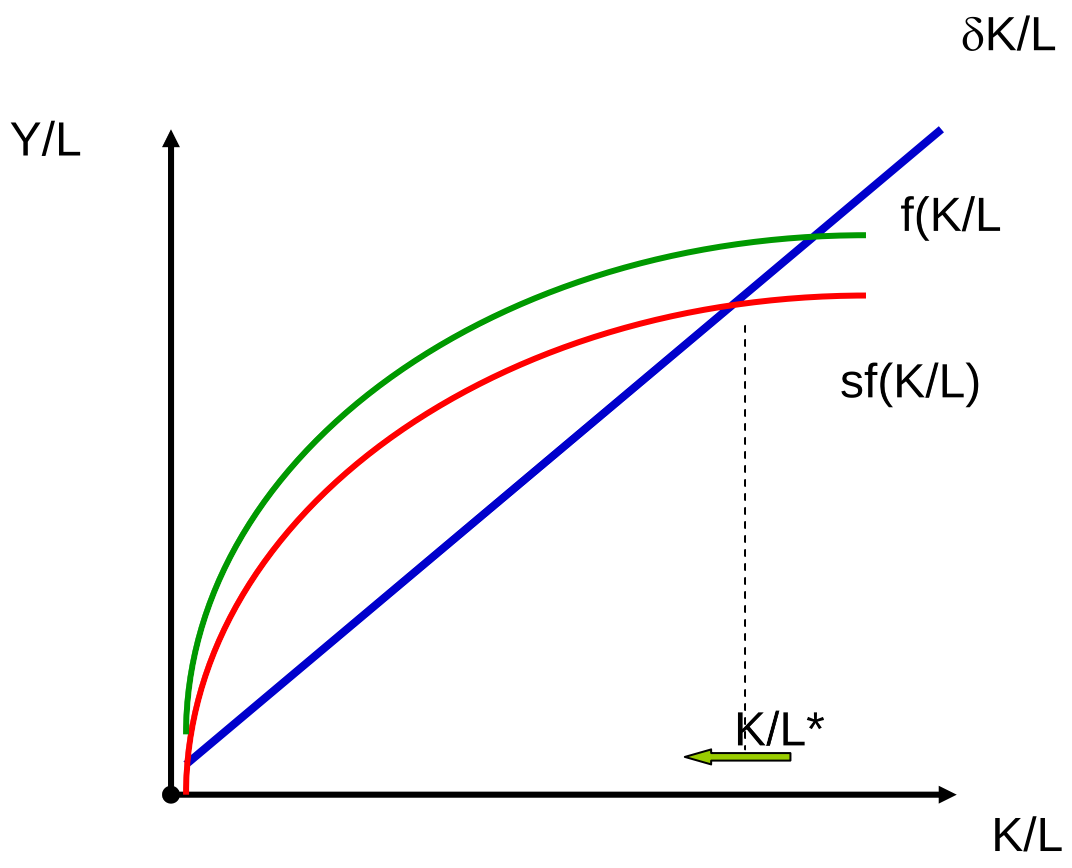
- Il che comporta che

$$\frac{Y^*}{L} = f\left(\frac{K^*}{L}\right)$$

Risultati modello standard

- In questo modello la crescita si arresta non appena si raggiunge lo stato stazionario. Pertanto la crescita del capitale fa crescere il reddito ma solo al di fuori dello stato stazionario.
- In sintesi:
- l'accumulazione del capitale e il tasso di risparmio che la rende possibile non ha effetto sulla crescita di lungo periodo che è zero
- s influenza la crescita ma solo nella transizione verso lo stato stazionario

Graficamente:



spiegazione

- La retta rappresenta il deprezzamento del capitale, la curva f(K/L) è la funzione di produzione e quindi il prodotto per addetto (l'inclinazione della curva è la PMK). La curva che sta al di sotto di essa sf(K/L) è il risparmio o l'investimento per addetto. Essa ha la stessa pendenza della curva del prodotto ma giace al di sotto di essa essendo pari a s(Y/L) (valore inferiore). Il punto di incontro tra il risparmio (investimento) e il deprezzamento rappresenta lo stato stazionario. Esiste solo un punto, come si vede nella figura, in corrispondenza del livello di K/L in cui gli investimenti risultano uguali al deprezzamento (intersezione delle retta δ (K/L) e sf(K/L).
- Questo punto che rappresenta lo stato stazionario è caratterizzato da un livello di investimento necessario (chiamato così perché mantiene costante il capitale per addetto –deprezzamento) che è esattamente pari all'investimento o risparmio effettivo (sf(K/L)). **Questo punto rappresenta l'equilibrio di lungo periodo. Quale che sia il livello iniziale dello stock di capitale l'economia finirà per raggiungere lo stato stazionario (steady-state). Al di sotto del valore di K/L di stato stazionario l'investimento effettivo supera l'investimento necessario (deprezzamento) e il capitale cresce. Al di sopra dl valore di K/L di stato stazionario accade il contrario : l'investimento necessario è > dell'investimento effettivo e lo stock (K/L) decresce.** Nello stato stazionario la variazione dello stock di capitale deve essere pari a zero**.**

Cenni alla regola aurea

La regola aurea:

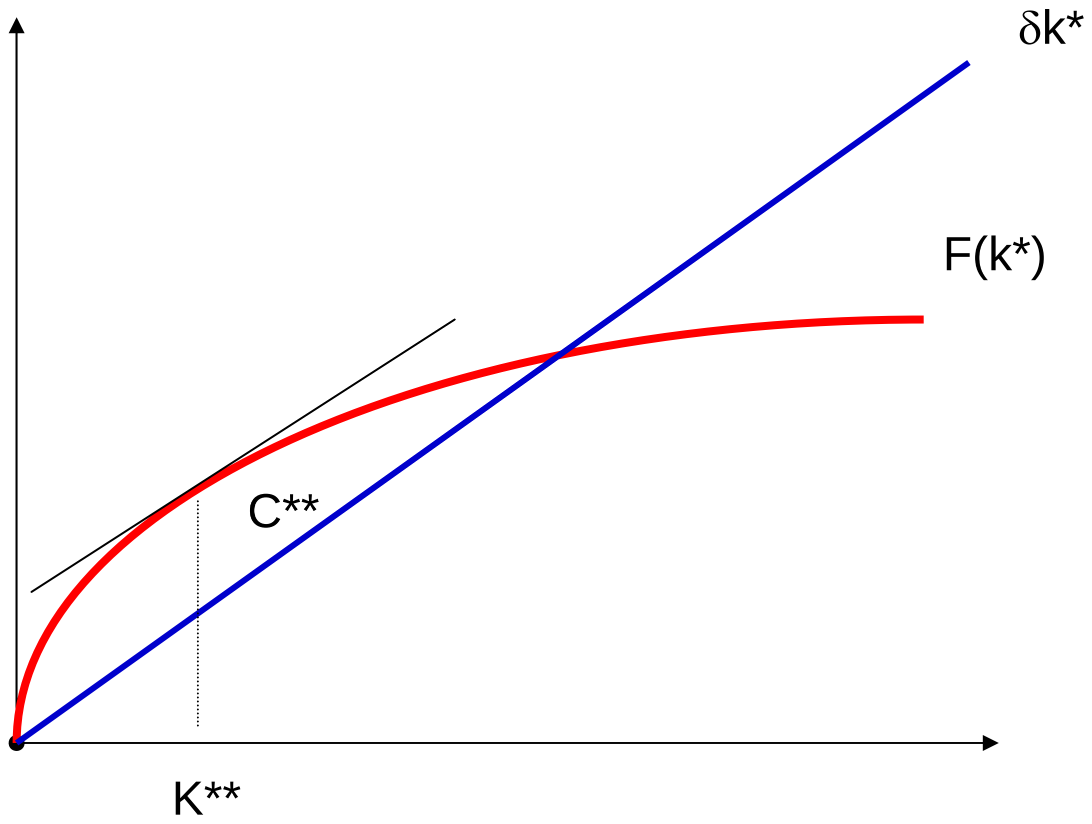
- Se il tasso di risparmio =0, allora K=0 e Y=0
- $\Rightarrow$ C=0
- Se il tasso di risparmio =1, allora K e Y in livello saranno molto elevati, ma poiché gli agenti risparmiano tutto il reddito $\Rightarrow$ C=0
- Ci sarà dunque un livello del risparmio (e del capitale) compreso tra 0 e 1 che max il consumo?
- Questo ammontare di risparmio e di capitale è chiamato **livello di capitale di regola aurea**

Quando l'economia raggiunge il livello di capitale di regola aurea?

- $y = c + i$
- $c = y - i$
- In steady state:
- $c = f(k^*) - \delta k^*$ ovvero il consumo di stato stazionario è pari alla differenza tra l'output e il tasso di deprezzamento(=investimento)

Graficamente:

Condizione di max consumo:
PMK= δ

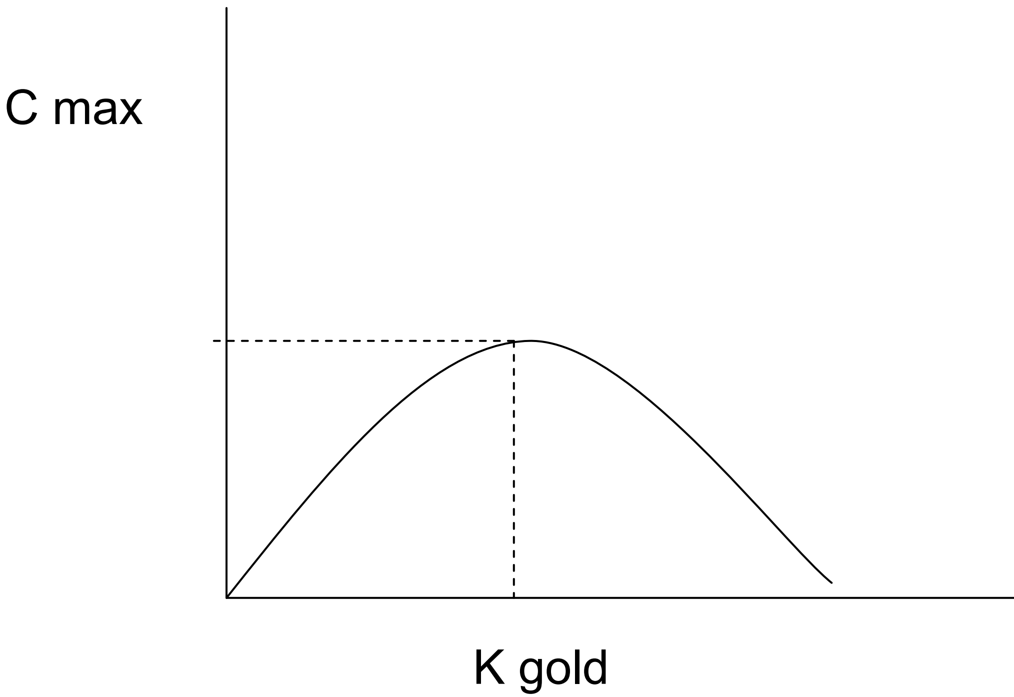


spiegazione

- Per valutare le implicazioni della scelta di un livello di capitale di regola aurea dobbiamo ipotizzare un livello di capitale maggiore o minore di quello di regola aurea.
- In caso di $k>k^{**}$ l'inclinazione della fp (pari alla PMK) è minore dell'inclinazione della retta dell'investimento e ciò implica che l'output cresce meno del deprezzamento e quindi c^* diminuisce.
- Nel caso in cui $k<k^{**}$ l'output cresce più del deprezzamento e c^* aumenta.
- Il consumo è massimizzato quando le inclinazioni delle due curve sono uguali (PMK = δ)

La golden rule l'efficienza dinamica

- Abbiamo visto che per max c, la condizione del problema è
- $f'(k)=\delta$
- Con crescita della popolazione la condizione diventa:
- $f'(k) = n + \delta$



L'intervallo 0<k<kgold individua la cosiddetta regione di efficienza dinamica secondo ilcriterio di Pareto. In questa regione per aumentare c occorre aumentare il capitale.Per k>kgold l'economia ha un accumulo di capitale eccessivo e occorre ridurre i risparmi e quindi il capitale per aumentare i consumi

Il modello con funzione Cobb Douglas

- $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$
- L'equazione dinamica del capitale

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - \delta k$$

Con tasso di crescita della popolazione

- L'equazione dinamica del capitale ci dice che che la variazione del capitale per addetto è data dall'investimento netto pro capite ossia risparmio procapite meno quella parte dell'investimento che serve non solo a rimpiazzare il capitale usurato(tasso di deprezzamento) ma anche una parte che serve a dotare di capitale i nuovi lavoratori:

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+\delta)k$$

E le soluzioni dell'equazione di Bernoulli è: $k^*(sk^{*\alpha-1} - (n+\delta)) = 0$

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e

$$y^* = k^{*\alpha} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- Spiegare cosa accade nel modello
- Quando:
- Aumenta s
- Aumenta n
- Aumenta il deprezzamento (e viceversa)