

# Cenni di ottimizzazione dinamica

Testi di riferimento:

K. Dixit *Optimization in Economic Theory. Second Edition*, 1990, Oxford: Oxford

University Press.

A. C. Chiang *Elements of Dynamic Optimization*, 1992,  
Singapore: McGraw-Hill.

# Idea di base

- Ci limitiamo a dare solo alcune indicazioni che possono essere utili per comprendere la modellistica successiva
- La tecnica che useremo per risolvere i modelli di crescita endogena si basa sul principio di massimo del matematico russo Pontryagin (1962), (Maximum principle) sebbene esistano altri metodo di controllo ottimo applicati alle tematiche economiche: crescita e teoria macroeconomica in generale.
- Il principio di max a cui ci riferiamo viene interpretato come la massimizzazione di un flusso di rendimenti più il valore dello stock.

# Massimizzazione di funzioni

Da punto di vista analitico molti problemi in economia richiedono la massimizzazione o la minimizzazione di funzioni obiettivo. In un contesto statico le imprese massimizzano i profitti, i consumatori l'utilità.

Per un problema di max con una sola variabile di scelta, e senza vincoli, la soluzione è molto semplice e si trova con la condizione del primo ordine del problema .

Es .Max  $f(x)$

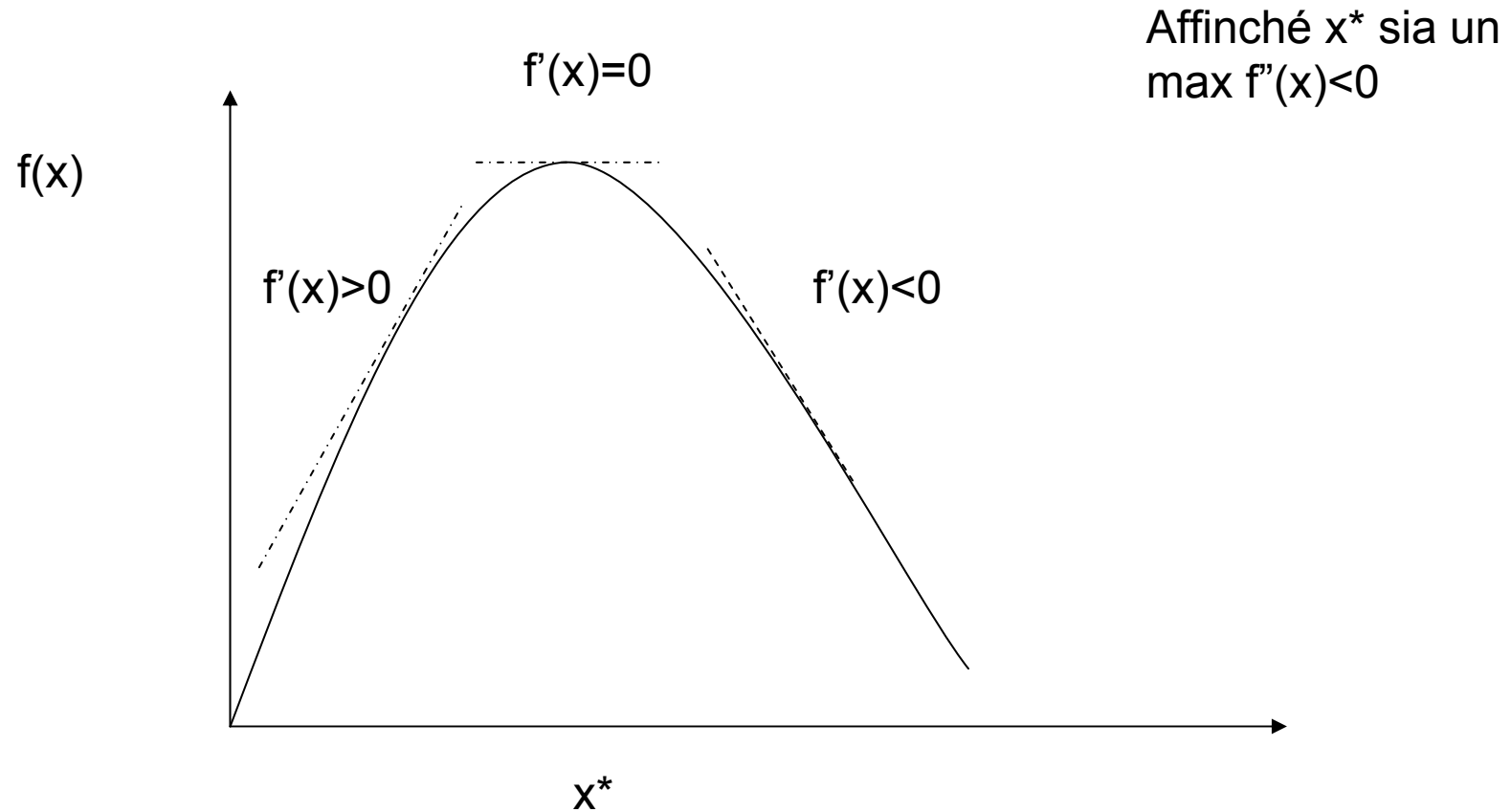
La soluzione è  $f'(x) = 0$

$f'(x) > 0$  non può essere una soluzione di equilibrio perché sarebbe conveniente aumentare la quantità di  $x$

$f'(x) < 0$  non lo è per lo stesso motivo (la nostra utilità per esempio aumenterebbe se diminuissimo la quantità di  $x$ ).

- Come facciamo a sapere che il punto  $x^*$  che soddisfa  $f'(x^*) = 0$  è un massimo, un minimo o un punto di flesso?
- Occorrerebbe calcolare anche le condizioni del secondo ordine . Affinchè  $f'(x^*)$  sia un massimo è necessario che  $f''(x^*) < 0$ .
- In genere non calcoliamo le condizioni del secondo ordine perché assumiamo che la funzione assuma una forma particolare (concavità della f. di utilità etc) ovvero tutte le funzioni utilizzate sono well-behaved.

- La figura mostra l'intuizione che sta dietro la soluzione



- Problemi di massimizzazione con più variabili seguono lo stesso ragionamento.
- Lo stesso accade quando il problema di massimo è vincolato.
- Supponiamo che un'impresa conosca  $w$ ,  $r$  e il prezzo dell'output  $P$  e deve massimizzare i suoi profitti scegliendo le quantità ottimali di  $K$  e  $L$ .
- $\text{Max } \pi = pF(K,L) - wL - rK$
- Le condizioni del primo ordine FOC sono lo ricordiamo:

$$P \frac{\partial F}{\partial L} = w$$

$$P \frac{\partial F}{\partial K} = r$$

# Di cosa si occupa la teoria del C.O.?

- Le cose si complicano con i problemi di ottimizzazione vincolata sia statici che dinamici.
- In termini generali la teoria del controllo ottimo si occupa:
- della soluzioni di problemi di massimo (o minimo) dove la funzione da massimizzare (o minimizzare) dipende
- dal tempo,
- da *variabili di stato* a cui è associata una legge di movimento,
- e da *variabili di controllo*, che possono essere fissate dal soggetto decisore.
- Vi sono poi delle variabili di *costato che sono delle variabili aggiuntive*

# Come si imposta il problema

- In genere, il sistema è descritto da uno **stato iniziale** rappresentato dalle equazioni del sistema, da un **vettore delle variabili di stato** e da un **vettore delle variabili di controllo**.
- Dato il sistema iniziale e le condizioni iniziali, una volta specificato il controllo, la funzione da massimizzare segue un'unica traiettoria ed ha pertanto un'unica soluzione (il problema per esempio può essere quello dell'ottima allocazione delle risorse)
- Il problema è quello di determinare la funzione di controllo che soddisfi il vincolo di bilancio e fornisca il più alto valore della funzione obiettivo.
- Tale tecnica può essere applicata sia a sistemi a tempo discreto che continuo e può altresì essere applicata sia a orizzonti temporali finiti sia infiniti.



# Orizzonte temporale finito

- Si consideri la scelta intertemporale di consumo e assumiamo che il sistema di preferenza del consumatore sia rappresentato da una funzione ordinale di utilità:
- $U(x_0, x_1, x_2, \dots, x_T)$
- dove  $x_t$  indica il consumo temporaneo del tempo  $t$  e  $T$  è l'orizzonte temporale del consumatore.
- $T$ , l'orizzonte temporale può essere infinito

- Vengono correntemente introdotte ipotesi sulla funzione di utilità, che rendono più facile la trattazione matematica. Tali ipotesi sono:
- Primo: la **separabilità additiva** della funzione di utilità. Essa suppone, cioè, che la funzione di utilità sia del tipo

$$U(x_0, x_1, x_2, \dots, x_T) = \sum_{t=0}^T u_t(x_t)$$

- ossia, che l'utilità intertemporale  $U$  sia la somma delle utilità temporanee  $u_t$ .

# Seconda ipotesi

- La seconda ipotesi introduce l'uguaglianza nel tempo delle utilità temporanee:

$$U(x_0, x_1, \dots, x_T) = \sum_{t=0}^T \rho^t u(x_t)$$

- Dove il fattore di sconto indica che i consumi futuri sono inferiori in termini di preferenze ai consumi presenti, cioè, il tasso soggettivo di sconto, misura l'utilità nel tempo iniziale equivalente ad un'unità di utilità nel tempo successivo, cioè, la pazienza dell'agente.
- L'esempio tipico di scelta intertemporale è la scelta dei consumi lungo l'intera vita dell'agente, dati certi redditi che devono anch'essi essere conosciuti. Questi redditi rappresenteranno il vincolo di bilancio intertemporale

# VINCOLO DI BILANCIO

- Il vincolo di bilancio **intertemporale** richiede che il valore attuale della spesa non superi il valore attuale dei redditi.
- il problema di ottimizzazione viene risolto costruendo la **Lagrangiana (L)**:
- $L(x_0, x_1, \lambda) = u(x_0) + \rho u(x_1) - \lambda$  [**vincolo di bilancio da specificare a seconda del problema**]
- Dove  $\lambda(t) < \infty$  (per ogni  $t$ ) denota il moltiplicatore di Lagrange associato con il vincolo nel periodo  $t$
- Impostato il problema, occorre derivare le condizioni del primo ordine, per una soluzione interna .
- Le condizioni del secondo ordine sono soddisfatte per l'ipotesi che la funzione di utilità temporanea sia concava
- Più o meno gli stessi criteri devono essere utilizzati per risolvere un problema di ottimizzazione dinamica utilizzando il principio di Pontryagin costruendo la funzione hamiltoniana (o l'Hamiltoniano)

MSOffi

## Diapositiva 12

---

MSOffice1 ; 28/04/2010

- `Si consideri il problema di scelta intertemporale che consiste nella massimizzazione della funzione

- $$\sum_{t=0}^T F(x_t, u_t, t)$$

# Subordinatamente al vincolo:

- $x_{t+1} - x_t = g(x_t, u_t, t)$
- ove  $x(t)$  e  $u(t)$  sono vettori
- Le variabili  $x$  le abbiamo definite come variabili di stato e le  $u$  variabili di controllo.
- Le prime sono variabili “fondo” o stock (come l’ ammontare di ricchezza, moneta, ecc., cioè, grandezze prive di dimensione temporale).
- Le seconde sono normalmente dei flussi (come consumi, produzioni, redditi, ecc., cioè, grandezze misurate in unità di tempo)
- La funzione Hamiltoniana di questo problema è

$$H(x, u, \mu, t) = F(x_t, u_t, t) + \mu f(x_t, u_t, t)$$

- Dove  $\mu$  sono chiamati variabili di costato. Questa funzione deve essere max rispetto alle variabili di controllo  $u$ .

# In economia un problema di controllo ottimo

- Abbiamo visto che può essere espresso nel
- seguente modo:

$$\max_{t_0} \int f(x(t), u(t), t)$$

$$\dot{x} = g(x(t), u(t), t)$$

- dove come prima :
- $u(t)$  variabile di controllo
- $x(t)$  variabile di stato
- Necessità di prendere decisioni in un contesto dinamico.



# Condizioni per la soluzione

- Se esiste una funzione  $\mu^*(t)$ , con derivata prima continua, tale che  $u^*(t)$ ,  $x^*(t)$ ,  $\mu^*(t)$ , soddisfino simultaneamente alle condizioni note come le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \mu} \quad \dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

# crescita

- Nella teoria della crescita, con risparmio non dato ma derivante dalla scelta intertemporale degli agenti, ogni individuo massimizza la sua utilità che ha le seguenti caratteristiche:
- $U' > 0$     $U'' < 0$
- Il problema ora è di max l'utilità di tutti gli agenti per tutti i periodi di tempo. Si utilizza l'ipotesi dell'agente rappresentativo.

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c(t))$$



# Sotto il vincolo:

$$\dot{k} = f(k) - (n + \delta)k - c$$

- Dove  $k$  è ora la variabile di stato e  $c$  è la variabile di controllo
- Lo scopo è di trovare un sentiero di crescita per la variabile  $c$  che faccia evolvere anche la variabile  $k$

# La costruzione dell'Hamiltoniano

$$H = e^{-\rho t} \{U(c) + \mu[f(k) - (n + \delta)k - c]\}$$

- Applicando le condizioni di primo ordine

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \quad \dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial k}$$

- Da cui si ottiene un sistema di equazioni differenziali in  $c$  e  $k$

Le due equazioni sono

$$\frac{\dot{c}}{c} = f'(k) - n - \delta - \rho$$

$$\dot{k} = f(k) - (n + \delta)k - c$$

- La prima sarà molto nota perché simile alle altre espressioni che incontreremo in tutti i modelli di crescita ma è stata per primo applicata al modello neoclassico nella versione di Ramsey. La seconda è il semplice vincolo di bilancio che fornisce anche l'equazione dinamica di accumulazione del capitale.

$$\frac{\dot{c}}{c} = f'(k) - \rho$$

- Il risultato della crescita ottima quando si abbandonano le ipotesi di un risparmio dato e costante sono che la crescita sarà positiva solo se la PMK > tasso di sconto soggettivo

- I risultati ottenuti ci consentono di ottenere un'interpretazione economica molto intuitiva del comportamento del consumo nel corso del tempo. Essa stabilisce che i consumatori aumenteranno il consumo nel futuro quando il tasso di interesse (=PMK) sarà maggiore del tasso di sconto intertemporale. I consumatori vorranno rinunciare al consumo attuale, risparmiare , investire nell'unico input accumulabile (k) perché il saggio di rendimento reale del loro risparmio è superiore al tasso con cui scontano l'utilità derivante dal consumo futuro.
- Viceversa diminuiranno il consumo futuro quando  $r < \rho$