

## **LEZIONE 4**

### Il Capital Asset Pricing Model

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

1

## Generalità

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

2

## Generalità (1)

Il Capital Asset Pricing Model è un **modello di equilibrio dei mercati** che consente di individuare una precisa relazione tra rendimento e rischio attesi per tutte le attività rischiose<sup>1</sup>

<sup>1</sup> La versione base del CAPM è riconducibile ai contributi pubblicati tra il 1964 e il 1966 da William Sharpe, Jhan Lintner e Jean Mossin

## ... (segue): premessa (2)

Il CAPM si fonda sulle seguenti **IPOTESI**:

- gli investitori sono avversi al rischio e massimizzano la propria utilità attesa  $E(U)$
- gli investitori selezionano i portafogli adottando il criterio della media – varianza
- tutti gli investitori decidono sulla base di un orizzonte temporale uniperiodale
- ogni investitore può investire oppure prendere a prestito ad un medesimo tasso privo di rischio
- gli investitori hanno aspettative omogenee circa i rendimenti attesi, le varianze e le covarianze delle attività rischiose
- non esistono tasse né costi di transazione

... (segue): premessa (3)

Dalla combinazione delle richiamate ipotesi e segnatamente **dall'identità delle aspettative dei singoli investitori** in ordine ai rendimenti attesi, alle varianze e alle covarianze dei rendimenti attesi di tutte le attività rischiose nelle quali essi possono investire discende che **la frontiera efficiente stimata è la stessa per tutti gli investitori**

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

5

Combinazione tra titoli free – risk e  
un titolo rischioso:  
la Capital Market Line

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

6

**Combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (1)**

Una delle **ipotesi centrali** del CAPM prevede la possibilità di investire e d'indebitarsi senza limiti ad un tasso privo di rischio ( $r_f$ )

**... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (2)**

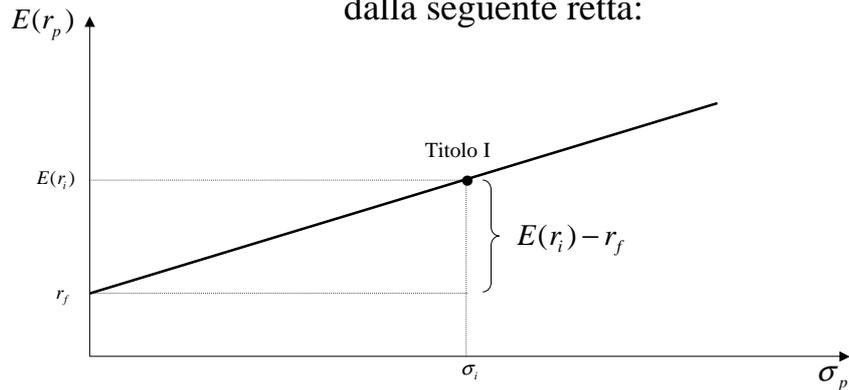
Le caratteristiche di un **portafoglio di due titoli** che include un titolo non rischioso sono individuate dalle seguenti:

$$E(r_p) = X \times r_f + (1 - X) \times E(r_i)$$

$$\sigma_p = (1 - X) \times \sigma_i$$

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (3)

Graficamente la **linea dei portafogli ottenibili** combinando attività rischiose e attività non rischiose è individuata dalla seguente retta:



Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

9

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (4)

La possibilità che la retta prosegua **oltre il punto I** è legata all'ipotesi secondo la quale **gli investitori possono indebitarsi al tasso  $r_f$**

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

10

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (5)

In tal caso l'investitore potrebbe indebitarsi al tasso  $r_f$  ed investire **somme addizionali** nel portafoglio I

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (6)

L'equazione della retta è individuata dalla seguente:

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_i) - r_f}{\sigma_i} \times \sigma_p$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$   $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$   
intercetta      coefficiente  
sull'asse      angolare  
delle ordinate

... (segue): **combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (7)**

**Il coefficiente angolare** della suddetta retta è interpretabile come misura della remunerazione (compenso) per unità di rischio offerta dal portafoglio P

... (segue): **combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (8)**

**Se combino** l'investimento in attività non rischiose con tutti i portafogli di attività rischiose che si trovano sulla frontiera efficiente emerge che **una di dette combinazioni domina le altre**

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (9)

Tale combinazione è individuata dal **punto di tangenza** tra la retta che ha intercetta pari a  $r_f$  e la frontiera efficiente

Detta combinazione individua il **market portfolio** o portafoglio di mercato

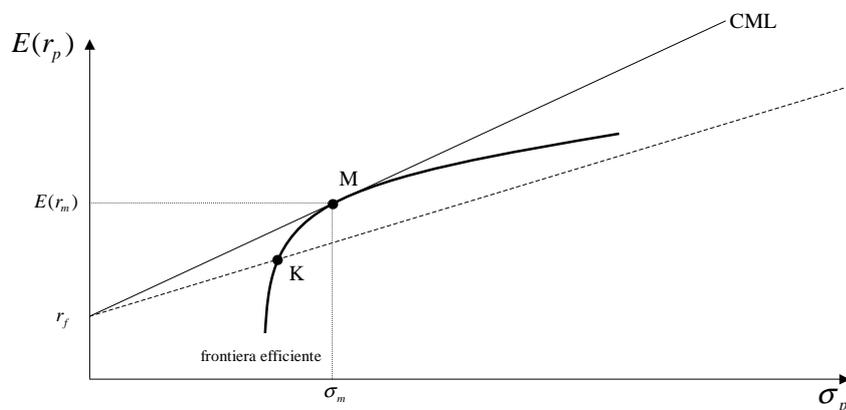
Il portafoglio di mercato è **perfettamente diversificato** e perciò esposto al solo **rischio sistematico**

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

15

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (10)

Graficamente



Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

16

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (11)

La retta che individua le combinazioni fra attività risk free e portafoglio di mercato è la **capital market line (CML)** e rappresenta l'insieme dei portafogli in grado di offrire il più alto rendimento atteso per unità di rischio

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (12)

L'equazione della CML è data da

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \times \sigma_p$$

... (segue): **combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (13)**

È importante osservare che la CML è **identica** per ogni investitore

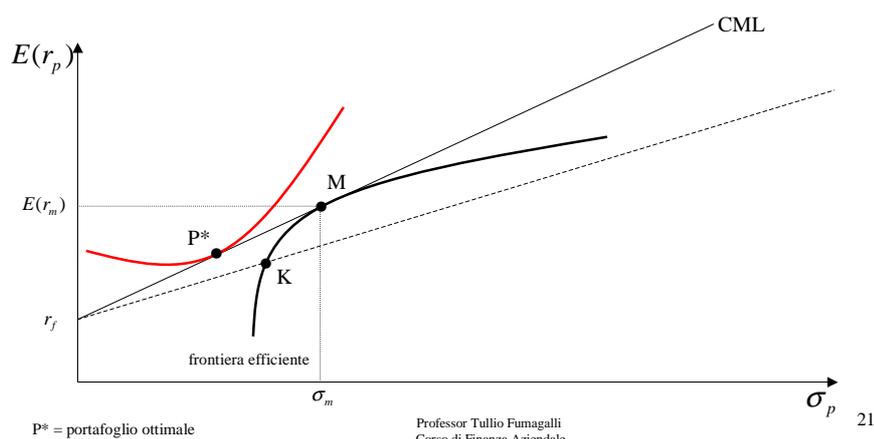
Infatti il CAPM assume che gli investitori abbiano identiche aspettative in ordine ai rendimenti attesi, alle varianze e alle covarianze delle attività rischiose

... (segue): **combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (14)**

Per ogni investitore il **portafoglio ottimale** sarà rappresentato da un punto della CML ovvero da una combinazione fra titolo risk free e il portafoglio di mercato

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (15)

Detto punto è individuato per ciascun investitore dal **punto di tangenza** della CML con la più alta curva di indifferenza



... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (16)

È appena il caso di notare che anche se il **mix** tra attività rischiose e attività non rischiose **potrà variare** per ogni investitore, il portafoglio di attività rischiose sarà rappresentato per tutti gli investitori dal **portafoglio M** che può dunque essere individuato **indipendentemente** dalle preferenze del singolo

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (17)

In equilibrio la composizione di M sarà tale da comprendere **tutte le possibili attività rischiose** in proporzione tale da riflettere il loro **valore di mercato**

Diversamente ci sarebbero opportunità di **arbitraggio**

... (segue): combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (18)

Scegliendo il portafoglio di attività rischiose, gli investitori possono posizionarsi sulla linea del mercato dei capitali, che è la **vera frontiera efficiente** considerando tutte le attività possibili

... (segue): **combinazione tra titoli free – risk e un titolo rischioso: la CML (19)**

Ciò stabilisce un concetto noto in finanza come **teorema di separazione** secondo cui le decisioni di ogni investitore vengono prese in **“due tempi”**:

- in una **prima fase** egli raccoglie le informazioni relative alle attività finanziarie, stima i parametri di rendimento e di rischio di ciascuna attività, simula l'insieme dei portafogli, costruisce la frontiera efficiente delle attività rischiose, individua il portafoglio M
- **successivamente** determina come ripartire la propria ricchezza tra il portafoglio M e l'attività priva di rischio. Tale decisione viene presa in base alla propria attitudine verso il rischio e alle preferenze personali

## Esempio

**Esempio (1)**

Bart è un giovane investitore alla ricerca di un investimento in cui riporre i propri risparmi

Egli dispone complessivamente di 100 € e decide di far fruttare il proprio denaro investendo sia in attività prive di rischio sia in attività rischiose

**... (segue): esempio (2)**

Il giovane investitore pensa che una ripartizione di 30 € in titoli non rischiosi e 70 € in titoli rischiosi possa essere appropriata

Qual è il rendimento atteso che il nostro amico si aspetta?

... (segue): esempio (3)

Ipotizzando un tasso risk – free del 3% e un rendimento atteso dell'attività rischiosa del 10%, potrà aspettarsi di ricevere:

$$\bar{r}_p = 0,30 \times 0,03 + 0,70 \times 0,10 = 0,079 = 7,9\%$$

... (segue): esempio (4)

La varianza dell'attività non rischiosa è, come sappiamo, nulla; lo scarto quadratico medio del titolo rischioso è maggiore di zero, pari al 15%

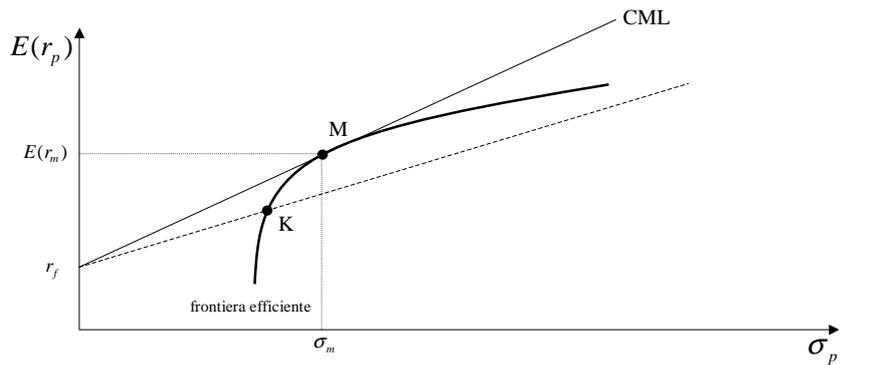
In totale la varianza del portafoglio risulta:

$$\sigma_p^2 = (X_1 \times \sigma_1)^2 + (X_2 \times \sigma_2)^2 + 2 \times X_1 \times X_2 \times \sigma_1 \times \sigma_2 \times \rho_{1,2}$$

$$\sigma_p^2 = (X_2 \times \sigma_2)^2 = (0,70)^2 \times (0,15)^2 = 0,0110$$

... (segue): esempio (5)

Nel caso in cui l'attività rischiosa scelta da Bart fosse il portafoglio M, l'investimento si posizionerebbe sul segmento della linea del mercato dei capitali compreso tra il tasso risk – free e il punto di tangenza alla frontiera efficiente



Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

31

... (segue): esempio (6)

Avrebbe potuto l'investitore raggiungere un profilo rischio/rendimento ancora più alto?

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

32

... (segue): esempio (7)

Non dimentichiamo che per ipotesi Bart può sia prestare sia indebitarsi al tasso privo di rischio

Questo vuol dire che, qualora lo desiderasse, potrebbe prendere a prestito altri 10 €, per esempio, e investirli nell'attività rischiosa

In tal caso quale sarebbe il suo rendimento atteso?

... (segue): esempio (8)

Poiché Bart investe 110 € al tasso del 10% ma deve restituire 10 € al tasso del 3%, potrà attendersi questo rendimento medio:

$$\bar{r}_P = 1,10 \times 0,1 + (-0,1) \times 0,03 = 0,107 = 10,7\%$$

In tal modo Bart aumenta il rendimento ottenibile limitandosi a investire la propria dotazione iniziale interamente nell'attività rischiosa

... (segue): esempio (9)

Cosa accade alla varianza del portafoglio?

... (segue): esempio (10)

La varianza del portafoglio diviene la seguente

$$\sigma_p^2 = (X_2 \times \sigma_2)^2 = (1,10)^2 \times (0,15)^2 = 0,0272$$

Come prevedibile, prendere a prestito risorse determina un incremento della rischiosità del portafoglio

# Dalla capital market line alla security market line

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

37

## Dalla capital market line alla security market line (1)

La CML rappresenta in equilibrio la miglior  
combinazione ottenibile tra rendimento atteso e  
rischio

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

38

**... (segue): dalla capital market line alla security market line (2)**

Essa consente di individuare il livello di rendimento  
che dovrebbe essere associato a ciascun livello di  
rischio

**... (segue): dalla capital market line alla security market line (3)**

Invero il coefficiente angolare della CML consente  
di stimare di quanto deve aumentare il  
rendimento atteso affinché l'investitore sia  
disposto ad assumersi un'unità di rischio in più

... (segue): dalla capital market line alla security market line (4)

Si dice anche che esso misura il prezzo che l'investitore riceve per ogni unità di rischio in più sopportata

Per tale ragione è anche denominato  
**market price of risk**

... (segue): dalla capital market line alla security market line (5)

Essendo date le seguenti condizioni:

$$r_f = 5\%$$

$$E(r_m) = 14\%$$

$$\sigma_m = 15\%$$

sarà possibile stimare il market price of risk come segue:

$$\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} = \frac{14\% - 5\%}{15\%} = 0,60$$

... (segue): dalla capital market line alla security market line (6)

Conseguentemente sarà possibile stimare il rendimento atteso associato ad un portafoglio sulla CML con deviazione standard pari al 10%

Esso sarà pari a:

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \times \sigma_p$$

$$E(r_p) = 5\% + (0,60) \times 10\% = 11\%$$

... (segue): dalla capital market line alla security market line (7)

Può la relazione individuata dalla CML essere anche impiegata per stimare il rendimento atteso di portafogli diversi da M ovvero per singoli titoli?

**... (segue): dalla capital market line alla security market line (8)**

No, la relazione espressa dalla CML individua infatti la relazione rendimento atteso – rischio valida per i soli portafogli efficienti per i quali rischio sistematico e rischio totale coincidono

**... (segue): dalla capital market line alla security market line (9)**

Ricordando che il mercato remunera il solo rischio non diversificabile si tratterà di sostituire nella relazione individuata dalla CML una espressione del rischio sistematico al quale è esposto il portafoglio “i” ovvero il singolo titolo

... (segue): dalla capital market line alla security market line (10)

Tale espressione è individuata dalla seguente

$$\sigma_{sist.i} = \rho_{i,m} \times \sigma_i$$

Essendo  $\rho_{i,m}$  il coefficiente di correlazione tra i rendimenti del singolo titolo o portafoglio e il rendimento del portafoglio di mercato

... (segue): dalla capital market line alla security market line (11)

Sostituendo nella relazione che individua la CML ottengo la seguente

$$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f] \times \rho_{i,m} \times \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$$

che esprime la relazione tra rischio e rendimento per un generico titolo o portafoglio "i"

... (segue): dalla capital market line alla security market line (12)

Ponendo

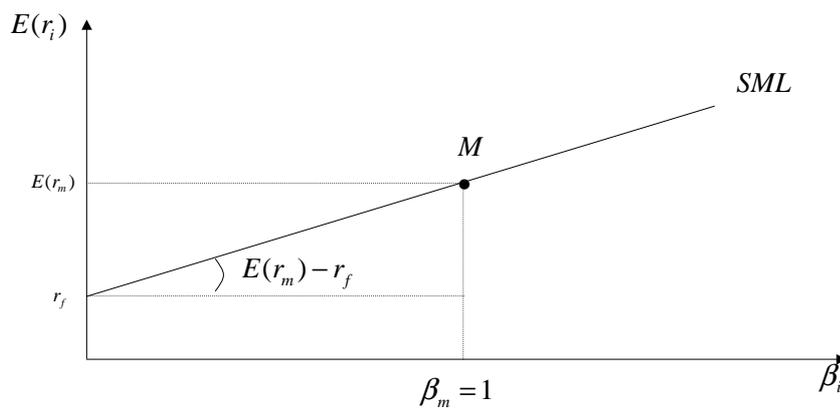
$$\beta = \rho_{i,m} \times \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$$

ottengo la seguente

$$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f] \times \beta$$

che individua la  
**Security Market Line**

... (segue): dalla capital market line alla security market line (13)



... (segue): dalla capital market line alla security market line (14)

La SML ha **un'importante funzione** pratica, poiché aiuta a:

- determinare il **tasso di rendimento appropriato** per aziende e progetti aventi uno specifico profilo di rischio sistematico
- individuare le attività finanziarie il cui **valore non è allineato** con le attese di rendimento corrette per il loro rischio sistematico

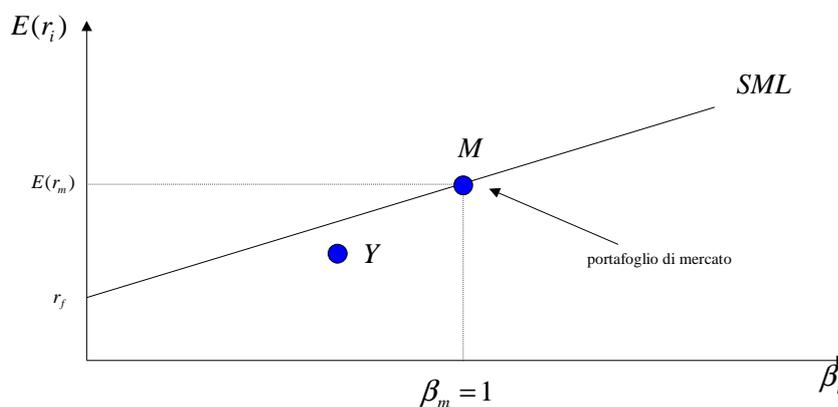
... (segue): dalla capital market line alla security market line (15)

Secondo il CAPM le attività finanziarie sono correttamente  
“prezzate” soltanto se il loro rendimento si colloca  
**esattamente** lungo la SML



I titoli il cui rendimento si dovesse collocare al di sopra o al di sotto della retta sono, rispettivamente, sotto o sovrapprezzati

... (segue): dalla capital market line alla security market line (16)



Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

53

... (segue): dalla capital market line alla security market line (17)

Il titolo Y riportato nel precedente grafico è sicuramente un titolo poco conveniente perché dato il beta di 0,5 che lo caratterizza è possibile ottenere un rendimento superiore investendo metà del proprio portafoglio in attività prive di rischio e metà nel portafoglio di mercato

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

54

... (segue): dalla capital market line alla security market line (18)

Naturalmente il prezzo eccessivo di Y non potrà permanere per molto tempo sul mercato

Siccome nessun investitore è ad esso interessato il suo prezzo diminuirà sino a giungere ad un livello tale da riportarne il rendimento atteso lungo la SML

#### Esempio lezione IV del 20 dicembre 2006

Un operatore compone un portafoglio a partire da due titoli azionari contraddistinti dai seguenti rendimenti e rischi attesi:

$$E(r_A) = 6\% \quad \sigma_A^2 = 40\%$$

$$E(r_B) = 5\% \quad \sigma_B^2 = 20\%$$

Inoltre:

$$Cov_{A,B} = 3\%$$

Dato un tasso risk – free del 4,5%, indicare tra i seguenti portafogli quale rappresenta il portafoglio di mercato:

$\alpha$ :	$X_A = 54,7\%$	$X_B = 45,3\%$
$\beta$ :	$X_A = 33,4\%$	$X_B = 66,6\%$
$\gamma$ :	$X_A = 80,4\%$	$X_B = 19,6\%$
$\delta$ :	$X_A = 64,8\%$	$X_B = 35,2\%$

### Dimostrazione (1)

Le caratteristiche di un **portafoglio di due titoli** che include un titolo non rischioso sono individuate dalle seguenti:

$$\begin{cases} E(r_p) = X \times r_f + (1 - X) \times E(r_i) \\ \sigma_p = (1 - X) \times \sigma_i \end{cases}$$

### ... (segue): Dimostrazione (2)

Dalla seconda equazione ottengo che:

$$\sigma_p = (1 - X) \times \sigma_i \begin{cases} \rightarrow (1 - X) = \frac{\sigma_p}{\sigma_i} \\ \rightarrow X = 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_i} \end{cases}$$

... (segue): Dimostrazione (3)

Sostituendo le due espressioni precedentemente individuate  
nella prima equazione ottengo la seguente

$$E(r_p) = \left[ \left( 1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_i} \right) \times r_f \right] + \left[ \left( \frac{\sigma_P}{\sigma_i} \times E(r_i) \right) \right]$$

semplificando....

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

59

... (segue): Dimostrazione (4)

ottengo che

$$E(r_p) = r_f - \frac{\sigma_P}{\sigma_i} \times r_f + \frac{\sigma_P}{\sigma_i} \times E(r_i)$$

da cui

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_i) - r_f}{\sigma_i} \times \sigma_P$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$   $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$   
intercetta      coefficiente  
sull'asse      angolare  
delle ordinate

Professor Tullio Fumagalli  
Corso di Finanza Aziendale  
Università degli Studi di Bergamo

60