Teoremi sulla derivazione e calcolo differenziale (con dimostrazione)

Teorema sulla continuità delle funzioni derivabili

Sia $f : X \to R$,

sia

$$x_0 \in X \text{ , di accumulazione per } X$$

sia

$$f \text{ è derivabile in } x_0$$

allora

$$f \text{ è continua } x_0 .$$

Dimostrazione

Se osserviamo che $f(x) - f(x_0)$ risulta

$f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$ ed essendo per definizione *f* derivabile, $\forall x \in X - \{x_0\}$ si ha: $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0)$, per cui, essendo $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$ ed essendo $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$ risulta, $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *come volevasi dimostrare*.

Teorema di Fermat

Sia $f : X \to R$,

sia

$x_0 \in X$, di accumulazione per X sia a destra che a sinistra

sia

f è derivabile in x_0

e sia

x_0 un punto di massimo o di minimo relativo

allora

$$f'(x_0) = 0.$$

Dimostrazione

Per le ipotesi fatte la funzione è derivabile in x_0, quindi risulta $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$; se ci poniamo nel caso che x_0, sia un punto di massimo relativo, avremo che $f_s'(x_0) \geq 0$ e $f_d'(x_0) \leq 0$, e per la derivabilità della funzione in x_0 risulta:

$$0 \leq f_s'(x_0) = f'(x_0) = f_d'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Teorema di Rolle

Sia $f:[a,b]\to R$,

sia

$$f \text{ continua in } [a,b] \text{ e}$$

sia

$$f \text{ derivabile in }]a,b[$$

e sia

$$f(a)=f(b)$$

allora

$$\exists c\in\,]a,b[\, / \, f'(c)=0\,.$$

Dimostrazione

Per il Teorema di Weierstrass, la funzione è dotata di minimo e massimo assoluti.

Quindi se $x_1=a$ ed $x_2=b$ con x_1 e x_2 punti di minimo e massimo per la funzione, allora per le ipotesi del teorema la funzione risulta costante in quanto $f(x_1)=f(x_2)$, e pertanto $\forall x\in[a,b]:\ f'(x)=0$.

Nel caso in cui $x_1\neq a$ allora $x_1\in\,]a,b[$ quindi ricorrono tutte le ipotesi del Teorema di Fermat, per cui basta porre $x_1=c$; così come nel caso $x_2\neq b$.