Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 26 febbraio 2016 (prof. Bisceglia)

traccia A

1. Calcolare, per parti, la primitiva *P*, della funzione *p*, che nel punto 0 assume valore 1

$$p(x) = (x^2 + x)sen(2x+1)$$

2. Dopo aver verificato se è possibile effettuare il seguente limite, dire se la funzione è regolare:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x+1)\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$

3. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arccos\frac{2x}{1+x^2} + 2arctgx$$

4. Data la funzione:

$$h : x \in R \to \begin{cases} xe^x - 1 & x \in \left]-\infty, 0\right] \\ \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{1}{\mathrm{x}} - 2 & x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

dire se soddisfa le ipotesi del Teorema di BOLZANO.

5. Data la funzione:

$$g : x \in [-1,1] \to \begin{cases} \frac{1}{senx^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Dire se ha punti di discontinuità, e nel caso di quale specie.

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 26 febbraio 2016 (prof. Bisceglia)

traccia B

1. Calcolare la primitiva *P*, della funzione *p*, che nel punto 1 assume valore 0:

$$p(x) = (x^2 - 2)\cos(2x - 1)$$

2. Dopo aver verificato se è possibile effettuare il seguente limite, dire se la funzione è regolare:

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^2 - 1)\log\left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)$$

3. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arccos\frac{2x}{1 + x^2} - 2arc\cot gx$$

4. Data la funzione:

$$h : x \in [0,3] = \begin{cases} 2x + 1 & x \in [0,1] \\ 2^x + 3x - 2 & x \in]1,3] \end{cases}$$

dire se soddisfa le ipotesi del Teorema di BOLZANO.

5. D Data la funzione:

$$g : x \in [-1,1] \to \begin{cases} \dfrac{1}{arcsenx} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

Dire se ha punti di discontinuità, e nel caso di quale specie.

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Svolgimento prova scritta del 26 febbraio 2016 traccia A

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$\int (x^2+x)sen(2x+1)dx$,che procedendo per parti, posto $f(x)=x^2+x \to f'(x)=2x+1$ e posto $g'(x)=sen(2x+1) \to g(x)=\frac{\cos(2x+1)}{-2}$, per cui $\int (x^2+x)sen(2x+1)dx =$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+x)\cos(2x+1) - \int -\frac{1}{2}(2x+1)\cos(2x+1)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+x)\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\left[(2x+1)\frac{1}{2}sen(2x+1) - \int 2\frac{1}{2}sen(2x+1)dx\right]$$

,pertanto $= -\frac{1}{2}(x^2+x)\cos(2x+1) + \frac{1}{4}(2x+1)sen(2x+1) + \frac{1}{4}\cos(2x+1)$ una primitiva della funzione assegnata è: $P(x) = -\frac{1}{2}(x^2+x)\cos(2x+1) + \frac{1}{4}(2x+1)sen(2x+1) + \frac{1}{4}\cos(2x+1) + C$, per cui la primitiva *P* che in zero vale 1 sarà $P(0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}sen(1) + \frac{1}{4}\cos(1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{1}{4}(sen(1)+\cos(1))$, se si considera che $sen(1)$ è prossimo allo zero e che il $\cos(1)$ è prossimo al valore 1, si ha $P(0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow C = \frac{3}{4}$, quindi la primitiva cercata è:

$$P(x) = -\frac{1}{2}(x^2+x)\cos(2x+1) + \frac{1}{4}(2x+1)sen(2x+1) + \frac{1}{4}\cos(2x+1) + \frac{3}{4}$$

2. Essendo $\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)$, allora $\left(1+\frac{1}{2x}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x} > 0$ quindi $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]0, +\infty[$ è possibile effettuare il limite assegnato, e ricordando che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$, risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x+1)\log\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(3x+1)\frac{\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{2x}}\frac{1}{2x}$$ quindi

$$\lim_{x\to+\infty}(3x+1)\frac{\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{2x}}\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{3}{2}.$$

3. Data la funzione $f(x) = \arccos\frac{2x}{1+x^2} + 2arctgx$

Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione della funzione $x \to \arccos\frac{2x}{1+x^2}$ e pertanto l'insieme di definizione di *f* è:

$\{x \in R, -1 \le 2x/(1+x^2) \le 1\}$ ed essendo $-1 \le 2x/(1+x^2) \le 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \le 2x \le 1+x^2 \Leftrightarrow -1-x^2-2x \le 0 \le$ $\le 1+x^2-2x \Leftrightarrow -(1+x)^2 \le 0 \le (1-x)^2 \Leftrightarrow x \in R$ quindi è:

$$f : x \in R \to \arccos\frac{2x}{1+x^2} + 2arctgx$$

osserviamo ora che il grafico di *f* passa per il punto $(0, f(0)) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, non essendo agevole trovare le soluzioni della disequazione $f(x) > 0$ e dell'equazione $f(x) = 0$, passiamo alla determinazione dei limiti significativi di *f*:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\arccos\frac{2x}{1+x^2} + 2arctgx\right) = \lim_{x\to-\infty}\arccos\frac{2x}{1+x^2} - 2\frac{\pi}{2} = \lim_{y\to0}\arccos y - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\arccos\frac{2x}{1+x^2} + 2arctgx\right) = \lim_{x\to+\infty} arcsen\frac{2x}{1+x^2} + 2\frac{\pi}{2} = \lim_{y\to0} arcseny + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$$

quindi il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $y = -\frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y = \frac{3}{2}\pi$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\left(\arccos\frac{2x}{1+x^2} + 2arctgx\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\, 2\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2(1-x^2)}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}(1+x^2)^2} +$$

$$+\frac{2}{1+x^2} = \frac{-2(1-x^2)}{\frac{|1-x^2|}{1+x^2}(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} + \frac{2}{1+x^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in]-1,1[\\ \frac{4}{1+x^2} & \text{se } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

, $f'_s(-1) = \lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-}\frac{4}{1+x^2} = 2$, $f'_d(-1) = \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} 0 = 0$, $f'_s(1) = \lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} 0 = 0$ ed $f'_d(1) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{4}{1+x^2} = 2$

f è derivabile in $R - \{-1,1\}$, non esistono le derivate di *f* in -1 ed in 1, -1 ed 1 sono due punti angolosi per *f*, il grafico di *f* passa per i punti $(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ e $(1, f(1)) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ed è:

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x \in]-1,1[$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

quindi f è costante in $[-1,1]$, è strettamente crescente in $]-\infty,-1]$ ed in $[1,+\infty[$ e pertanto f è crescente.

Risultando infine:

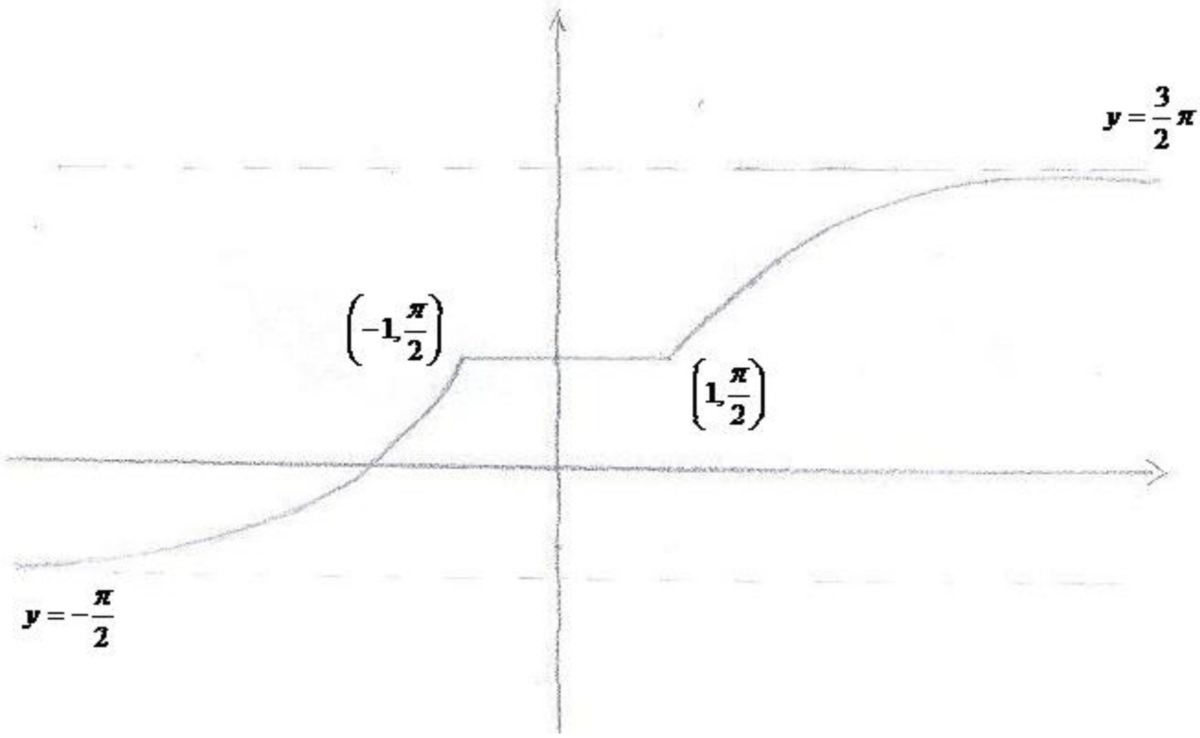
$$f''(x)=\begin{cases} D0=0 & \text{se } \ x \in]-1,1[\\ D\dfrac{4}{1+x^2}=\dfrac{-8x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{se } \ x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

è:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ e $-8x>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[$
$f''(x)=0 \Leftrightarrow x \in]-1,1[$
$f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[- (]-1,1[\cup]-\infty,-1[) =]1,+\infty1[$

e pertanto f è strettamente concava in $[1,\infty[$ ed è strettamente convessa in $]-\infty,-1]$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f(R)=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right[$, $f(]-\infty,-1])=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f([-1,1])=\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $f([1,+\infty[)=\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right[$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $\left]-\infty,-1\right]$ è biunivoca su $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e la restrizione di f a $\left[1,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right[$.

OSSERVAZIONE. È immediato far vedere che f è una funzione dispari, quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $\left[0,+\infty\right[$ ed ottenere il grafico di f unendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto al punto $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Tale funzione:

$$h : x \in R \to \begin{cases} xe^x - 1 & x \in \left]-\infty,0\right] \\ \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\mathrm{x}} - 2 & x \in \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

è continua in $R-\{0\}$ e risultando $h(0)=-1$, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^x - 1 = -1$ e $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\pi} arctg\frac{1}{x} - 2 = -2 + \frac{2}{\pi}\lim_{y\to+\infty} arctgy = -1$ la funzione h è continua ed è definita in un intervallo di R quindi soddisfa alle ipotesi del teorema di BOLZANO.

.

5. Data la funzione $g : x \in [-1,1] \to \begin{cases} \frac{1}{senx^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$,è continua in $[-1,1]-\{0\}$ e risultando $g(0)=1$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{senx^2} = +\infty$, g ha in zero un punto di discontinuità di seconda specie.

Svolgimento prova scritta del 26 febbraio 2016 traccia B

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

   $\int (x^2-2)\cos(2x-1)dx$, che procedendo per parti, posto $f(x)=x^2-2 \to f'(x)=2x$ e posto $g'(x)=\cos(2x-1) \to g(x)=\dfrac{sen(2x-1)}{2}$, per cui $\int (x^2-2)\cos(2x-1)dx=$

   $$=\frac{1}{2}(x^2-2)sen(2x-1)-\frac{1}{2}\int 2x sen(2x-1)dx=$$

   $$=\frac{1}{2}(x^2-2)sen(2x-1)-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}2x\cos(2x-1)-\int -\cos(2x-1)dx\right]=$$,pertanto

   $=\dfrac{1}{2}(x^2-2)sen(2x-1)+\dfrac{1}{4}2x\cos(2x-1)-\dfrac{1}{4}sen(2x-1)$ una primitiva della funzione assegnata è: $P(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-2)sen(2x-1)+\dfrac{1}{4}2x\cos(2x-1)-\dfrac{1}{4}sen(2x-1)+C$, per cui la primitiva *P* che in 1 vale zero $P(1)=\dfrac{1}{2}(1^2-2)sen(1)+\dfrac{1}{4}2\cos(1)-\dfrac{1}{4}sen(1)+C$ se si considera che $sen(1)$ è prossimo allo zero e che il $\cos(1)$ è prossimo al valore 1, si ha sarà $P(1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}2\cos 1+C=0 \Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{2}$, quindi la primitiva cercata è:

   $$P(x)=\frac{1}{2}(x^2-2)sen(2x-1)+\frac{1}{4}2x\cos(2x-1)-\frac{1}{4}sen(2x-1)-\frac{1}{2}$$

2. Essendo $\log\left(1-\dfrac{1}{3x^2}\right)$, allora $\left(1-\dfrac{1}{3x^2}\right)>0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-1}{3x^2}>0$ quindi $\forall x \in \left]-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$ è possibile effettuare il limite assegnato, e ricordando che $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^2}=0$, risulta:

   $$\lim_{x\to+\infty}(2x^2-1)\log\left(1-\frac{1}{3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(2x^2-1)\frac{\log\left(1-\frac{1}{3x^2}\right)}{-\frac{1}{3x^2}}\left(-\frac{1}{3x^2}\right) \text{quindi}$$

   $$\lim_{x\to+\infty}(2x^2-1)\frac{\log\left(1-\frac{1}{3x^2}\right)}{-\frac{1}{3x^2}}\left(-\frac{1}{3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2x^2-1}{3x^2}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

3. Data la funzione $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}-2arc\cot gx$

   Ricordando che la funzione arccotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione della funzione $x \to \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$ e pertanto l'insieme di definizione di *f* è: $\{x \in R, -1 \le 2x/(1+x^2) \le 1\}$ ed essendo $-1 \le 2x/(1+x^2) \le 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \le 2x \le 1+x^2 \Leftrightarrow -1-x^2-2x \le 0 \le$

$\leq 1+x^2-2x \Leftrightarrow -(1+x)^2 \leq 0 \leq (1-x)^2 \Leftrightarrow x \in R$ quindi è:

$$f : x \in R \to \arccos \frac{2x}{1+x^2} - 2arc\cot gx$$

osserviamo ora che il grafico di f passa per il punto $(0, f(0)) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, non essendo agevole trovare le soluzioni della disequazione $f(x) > 0$ e dell'equazione $f(x) = 0$, passiamo alla determinazione dei limiti significativi di f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\arccos \frac{2x}{1+x^2} - 2arc\cot gx\right) = \lim_{x\to-\infty} \arccos \frac{2x}{1+x^2} - 2\pi = \lim_{y\to 0} \arccos y - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\arccos \frac{2x}{1+x^2} - 2arc\cot gx\right) = \lim_{x\to+\infty} \arccos \frac{2x}{1+x^2} - 2\cdot 0 = \lim_{y\to 0} \arccos y = \frac{\pi}{2}$$

quindi il grafico di f ha due asintoti: la retta di equazione $y = -\frac{3}{2}\pi$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\left(\arccos \frac{2x}{1+x^2} - 2arc\cot gx\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\, 2\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2(1-x^2)}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}(1+x^2)^2} +$$

$$+\frac{2}{1+x^2} = \frac{-2(1-x^2)}{\frac{|1-x^2|}{1+x^2}(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} + \frac{2}{1+x^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left]-1,1\right[\\ \dfrac{4}{1+x^2} & \text{se } x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\end{cases},$$

$$f'_s(-1) = \lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{4}{1+x^2} = 2 \quad , \quad f'_d(-1) = \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} 0 = 0 \quad ,$$

$$f'_s(1) = \lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} 0 = 0 \text{ ed } f'_d(1) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{4}{1+x^2} = 2$$

f è derivabile in $R - \{-1,1\}$, non esistono le derivate di f in -1 ed in 1, -1 ed 1 sono due punti angolosi per f, il grafico di f passa per i punti $(-1, f(-1)) = \left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ e $(1, f(1)) = \left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$ ed è:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1,1\right[,\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

quindi f è costante in $[-1,1]$, è strettamente crescente in $]-\infty,-1]$ ed in $[1,+\infty[$ e pertanto f è crescente.

Risultando infine:

$$f''(x)=\begin{cases} D0=0 & \text{se } \ x\in]-1,1[\\ D\dfrac{4}{1+x^2}=\dfrac{-8x}{(1+x^2)^2} & \text{se } \ x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

è:

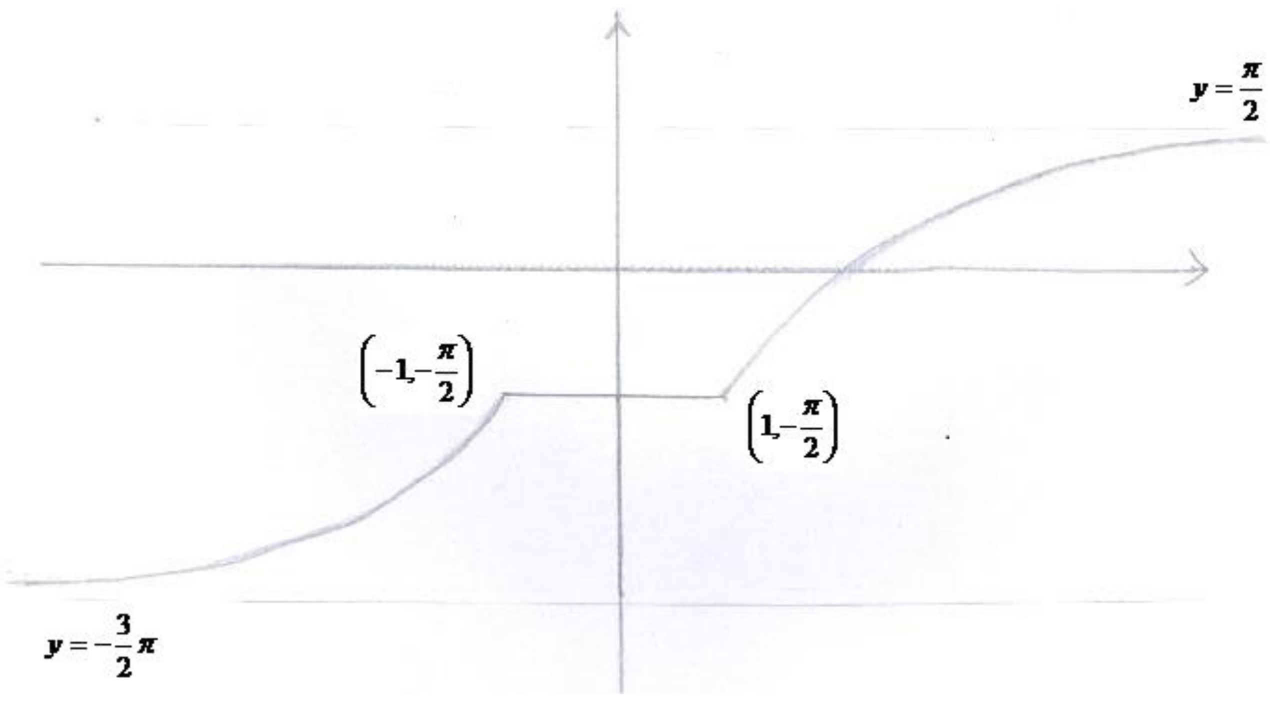
$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\text{ e } -8x>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[$$

à $f''(x)=0 \Leftrightarrow x\in]-1,1[$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[-(]-1,1[\cup]-\infty,-1[)=]1,+\infty[$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $]-\infty,-1]$ ed è strettamente concava in $[1,\infty[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R)=\left]-\frac{3}{2}\pi,\frac{\pi}{2}\right[$, $f(]-\infty,-1])=\left]-\frac{3}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$, $f([-1,1])=\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, $f([1,+\infty[)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $]-\infty,-1]$ è biunivoca su $\left]-\frac{3}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ e la restrizione di f a

$[1,+\infty[$ è biunivoca su $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

OSSERVAZIONE. È immediato far vedere che *f* è una funzione dispari, quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $[0,+\infty[$ ed ottenere il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto al punto $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$

4. Tale funzione:

$$h: x\in[0,3]=\begin{cases}2x+1 & x\in[0,1]\\ 2^x+3x-2 & x\in]1,3]\end{cases}$$

è continua in $[0,3]-\{1\}$ e risultando $h(1)=3$, $\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1^-}2x+1=3$ e $\lim_{x\to 1^+}h(x)=\lim_{x\to 1^+}2^x+3x-2=3$ la funzione h è continua ed è definita in un intervallo, quindi soddisfa alle ipotesi del teorema di BOLZANO.

5. Data la funzione $g: x\in[-1,1]\to\begin{cases}\frac{1}{arcsenx} & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$ è continua in $[-1,1]-\{0\}$ e risultando

$g(0)=-1$, $\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{arcsenx}=-\infty$, g ha in zero un punto di discontinuità di seconda specie.