Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
25 gennaio 2017
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to 1}\frac{\arccos x}{1-x}$, sia servendosi della sostituzione $\arccos x = y$, che con de l'Hopital, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h : x \in R \to \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, individuare il punto di discontinuità e classificarlo.

3. Studiare la funzione $x \to f(x) = \log x / x^2$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g : x \in [-1,1] \to \begin{cases} (1-x^2)sen(1-x^2) & x \in]-1,1[\\ h & x = \{-1,1\} \end{cases}$, dire, per quali valori del parametro h soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto fisso.

5. Data la funzione $p(x) = xarctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, calcolare una primitiva *P*, e riportare l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto 2.

6. Data la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$, determinare il suo gradiente, eventuali punti stazionari e classificarli. (A.A. 2016/2017)

Svolgimento - Traccia A

1. Ponendo $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$, si ha: $\lim_{x\to 1}\frac{\arccos x}{1-x} = \lim_{y\to 0^+}\frac{y}{1-\cos y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{1-\cos y}{y}} = +\infty$, in quanto $\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\cos y}{y} = 0$, ed essendo il $\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{1-\cos y}$ della forma $\frac{0}{0}$, tramite la regola di de L'Hopital è $\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{1-\cos y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{seny} = +\infty$, verifichiamo il limite e poniamo $\frac{1}{seny} > \varepsilon \Leftrightarrow seny < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow y < arcsen\frac{1}{\varepsilon}$ e tenendo conto che stiamo a destra di zero, ponendo $arcsen\frac{1}{\varepsilon} = \delta$, abbiamo individuato un intorno destro di zero a cui y appartiene. Oppure essendo $\lim_{x\to 1}\frac{\arccos x}{1-x}$ sempre della forma $\frac{0}{0}$, ancora per De l'Hopital si ha $\lim_{x\to 1}\frac{\arccos x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$, per cui $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \sqrt{1-x^2} < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 < -x^2 < \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} < x^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} < x < 1$ e posto $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon}$, abbiamo individuato un intorno di uno.

2. Essendo $h : x \in R \to \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, si osserva subito che è continua in $R - \{0\}$ e risultando $h(0) = 1$, e $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos\frac{1}{x} = \lim_{y\to -\infty} \cos y$, cosi come $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} = \lim_{y\to +\infty} \cos y$, e sapendo che il limite di una funzione periodica e non costante, non esiste in $\pm\infty$, per cui nel punto 0, la funzione ha un punto di discontinuità di seconda specie.

3. *Data la funzione*: $x \to f(x) = \log x / x^2$.

L'insieme di definizione della funzione *f* è: $]0,+\infty[$ e pertanto è:

$$f : x \in]0,+\infty[\to \log x / x^2$$

e risultando:

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \log x / x^2 > 0 \Leftrightarrow \log x > 0 = \log 1 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log x / x^2 = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 = \log 1 \Leftrightarrow x = 1$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[- [1,+\infty[=]0,1[$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $]1,+\infty[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $]0,1[$, ha in comune con gli assi il punto $(1, f(1)) = (1,0)$ ed essendo:

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \log x \frac{1}{x^2} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ e

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $x = 0$ asintoto verticale a destra e la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\frac{\log x}{x^2} = \frac{x^2/x - 2x\log x}{x^4} = \frac{1 - 2\log x}{x^3} \quad \text{se } x \in]0,+\infty[$$

è:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\log x}{x^3} > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\log x > 0 \Leftrightarrow \log x < \frac{1}{2} = \log\sqrt{e} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e} \Leftrightarrow x \in]0,\sqrt{e}[$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\log x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\log x = 0 \Leftrightarrow \log x = \frac{1}{2} = \log\sqrt{e} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[-]0,\sqrt{e}] =]\sqrt{e},+\infty[$

quindi *f* è strettamente crescente in $]0,\sqrt{e}]$, è strettamente decrescente in $[\sqrt{e},+\infty[$, $\sqrt{e}$ è un punto di massimo relativo proprio per *f* che è anche di massimo per *f*, il grafico di *f* passa per il punto $(\sqrt{e}, f(\sqrt{e})) = (\sqrt{e}, 1/2e)$ e $1/2e$ è il massimo di *f.*

Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{1-2\log x}{x^3} = \frac{-2x^3/x - 3x^2(1-2\log x)}{x^6} = \frac{6\log x - 5}{x^4} \quad \text{se } x \in]0,+\infty[$$

è:

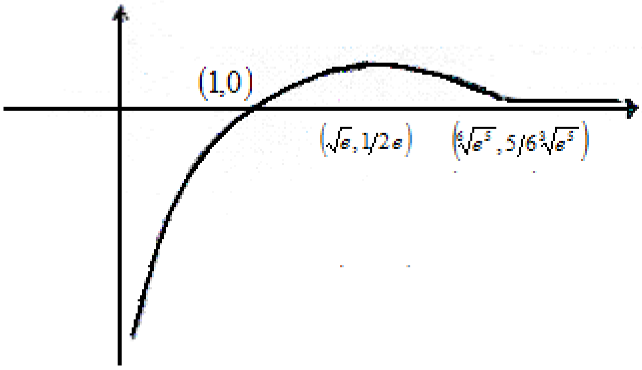
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{6\log x - 5}{x^4} > 0 \Leftrightarrow 6\log x - 5 > 0 \Leftrightarrow \log x > \frac{5}{6} = \log\sqrt[6]{e^5} \Leftrightarrow x > \sqrt[6]{e^5} \Leftrightarrow x \in]\sqrt[6]{e^5},+\infty[$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6\log x-5}{x^4}=0 \Leftrightarrow 6\log x-5=0 \Leftrightarrow \log x=\frac{5}{6}=\log\sqrt[6]{e^5} \Leftrightarrow x=\sqrt[6]{e^5}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]0,+\infty\right[-\left[\sqrt[6]{e^5},+\infty\right[=\left]0,\sqrt[6]{e^5}\right[$$

e pertanto f è strettamente convessa in $\left[\sqrt[6]{e^5},+\infty\right[$, è strettamente concava in $\left]0,\sqrt[6]{e^5}\right[$, $\sqrt[6]{e^5}$ è un punto di flesso proprio per f ed il grafico di f passa per il punto $\left(\sqrt[6]{e^5},\, f\left(\sqrt[6]{e^5}\right)\right)=\left(\sqrt[6]{e^5},\, 5/6\sqrt[3]{e^5}\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,1/2e\right]$, $f\left(\left]0,\sqrt{e}\right]\right)=\left]-\infty,1/2e\right]$, $f\left(\left[\sqrt{e},+\infty\right[\right)=\left]0,1/2e\right]$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $\left]0,\sqrt{e}\right]$ è biunivoca su $\left]-\infty,1/2e\right]$ e la restrizione di f a $\left[\sqrt{e},+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0,1/2e\right]$.

4. Essendo g evidentemente continua in $\left]-1,1\right[$, si osserva che $\lim_{x\to-1}(1-x^2)sen(1-x^2)=\lim_{x\to1}(1-x^2)sen(1-x^2)=0$ ed inoltre essendo $f(-1)=f(1)=h$, la funzione risulterà continua anche in $\{-1,1\}$ per il parametro $h=0$, ed in tale ipotesi $h\in[-1,1]$, quindi la funzione soddisferebbe tutte le ipotesi del Teorema del Punto fisso.

5. Essendo $p(x)=xarctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, del tipo $g'(x)f(x)$ si procede integrando per parte, quindi $\int g'(x)f(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ per cui posto $g'(x)=x$, $g(x)=\frac{x^2}{2}$, mentre posto $f(x)=arctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ si ha $f'(x)=\frac{2}{2x^2+2}$ pertanto si ha

$$\int xarctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)dx=\frac{x^2}{2}arctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$$

$$\int xarctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)dx=\frac{x^2}{2}arctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$$

$= \frac{x^2}{2} arctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$. Quindi una primitiva è $P(x) = \frac{x^2}{2} arctg\left(\frac{x+1}{1-x}\right) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx$, per cui la tangente sulla primitiva P, nel punto 2 è data dall'equazione $y = 2arctg(-3)(x-2) + 2arctg(-3) - 1 + \frac{1}{2}arctg2$.

6. Data la $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = [f_x(x,y), f_y(x,y)] = [2x - y - 3x^2, -2y - x]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x - y - 3x^2 = 0 \\ -2y - x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2(-2y) - y - 3(-2y)^2 = 0 \\ x = -2y \end{cases} = \begin{cases} -5y - 12y^2 = 0 \\ x = -2y \end{cases} = \begin{cases} y(12y+5) = 0 \\ x = -2y \end{cases}$,, quindi i due punti stazionari sono $P_1(0,0)$ e $P_2\left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y) = 2 - 6x$, $f_{yy}(x,y) = -2$, $f_{xy}(x,y) = -1$ e $f_{yx}(x,y) = -1$, per cui $H|f(0,0)| = -5$, pertanto il punto $P_1(0,0)$ è un punto di sella, mentre, $H\left|f\left(\frac{5}{5}, -\frac{5}{12}\right)\right| = 5$, conseguentemente il punto stazionario $P_2\left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right)$ è un punto di massimo ed il suo valore è $f\left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2 - \left(-\frac{25}{72}\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{62.5}{216}$