Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
24 gennaio 2018
(prof. Bisceglia)

Traccia F

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\in \leq 10^{-1}$, dell'equazione $\log(3x-2)=0$, nell'intervallo $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x\to-\infty} arc\cot g \frac{1}{\sqrt{e^x}}$.

3. Studiare la funzione $f: X \to f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \in R$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g(x)=\begin{cases} -\pi & \text{se } x>2 \\ 1 & \text{se } x=2 \\ arctg\,\frac{1}{x-2} & \text{se } x<2 \end{cases}$, trovare l'*insieme* di *definizione* e, *classificare* il punto 2.

5. Data la funzione $p(x)=e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}$, calcolare la primitiva P_0, tale che $P(0)=1$ e scrivere l'equazione della tangente sulla primitiva P_0, nel punto 0.

6. Data la funzione ricavi, $R(x,y)=2x^2+2xy-2y^2$, nel rispetto di una produzione limitata a, $x+y=10$, determinare la combinazione dei prodotti con ricavo massimo.

Svolgimento traccia F

1. Data la funzione $\log(3x-2)=0$, continua nell'intervallo chiuso e limitato $\left[\frac{1}{2},2,\right]$, inoltre per il teorema degli zeri deve essere $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(2)<0$, in tali ipotesi $\exists x_0 \in \left]\frac{1}{2},2\right[\,/\, f(x_0)=0$, ma osserviamo che risulta $f(2)=\log 4>0$, mentre $\nexists f\left(\frac{1}{2}\right)=\log\left(-\frac{1}{2}\right)$, pertanto non essendo soddisfatte tutte le ipotesi del teorema, non è possibile trovare alcuna approssimazione dell'equazione data.

2. Essendo $\lim_{x\to-\infty} arc\cot g \frac{1}{\sqrt{e^x}}$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arccotangente è definita $\forall x \in R$, e che la funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$ è definita $\sqrt{e^x}\neq 0$ ed essendo $e^x \in \left]0,+\infty\right[$, per cui $\sqrt{e^x}\neq 0, \forall x \in R$, quindi è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio non è limitato inferiormente. E trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che:

$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\sqrt{y}}=+\infty$, in quanto $\lim_{x\to -\infty} e^x=0$ e, conseguentemente $\lim_{z\to +\infty} arc\cot gz=0$, per cui per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim_{x\to -\infty} arc\cot g\frac{1}{\sqrt{e^x}}=0$.

3. Data la funzione $f: X\to f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}\in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $x+2\ge 0 \Leftrightarrow x\in[-2,+\infty[$,

il denominatore $\forall x\in R-\{1\}$,

pertanto $X=[-2,+\infty[\cap(R-\{1\})=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in[-2,1[\cup]1,+\infty[$, ovvero

$$f:[-2,1[\cup]1,+\infty[\to f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}\in R$$

Segno della funzione:

Essendo il numeratore sempre positivo, vedere dove $f(x)>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow x\in]1,+\infty[\cap X=]1,+\infty[$

Conseguentemente $f(x)<0\Leftrightarrow x\in]-\infty,1[\cap X=]-2,1[$

Si osserva che $f(-2)=0$, quindi tocca il punto $(-2,0)$. Mentre $f(0)=-\sqrt{2}$ pertanto passa per il punto $(0,-\sqrt{2})$.

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo superiore.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x+2}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\sqrt{3}(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x+2}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\sqrt{3}(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=0$$

Pertanto la retta $x=1$ è un asintoto verticale a destra ed a sinistra, mentre le retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x+2}} - \sqrt{x+2}}{(x-1)^2} = \frac{x-1-2(x+2)}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}} = \frac{-x-5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}} = -\frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}}$$., quindi

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}} < 0$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, è sufficiente studiare $x+5<0 \Leftrightarrow x<-5 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-5[\cap X = \emptyset$, conseguentemente la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = -\frac{(x-1)^2 2\sqrt{x+2} - (x+5)\left[2(x-1)2\sqrt{x+2} + \frac{2(x-1)^2}{2\sqrt{x+2}}\right]}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2} = .$$

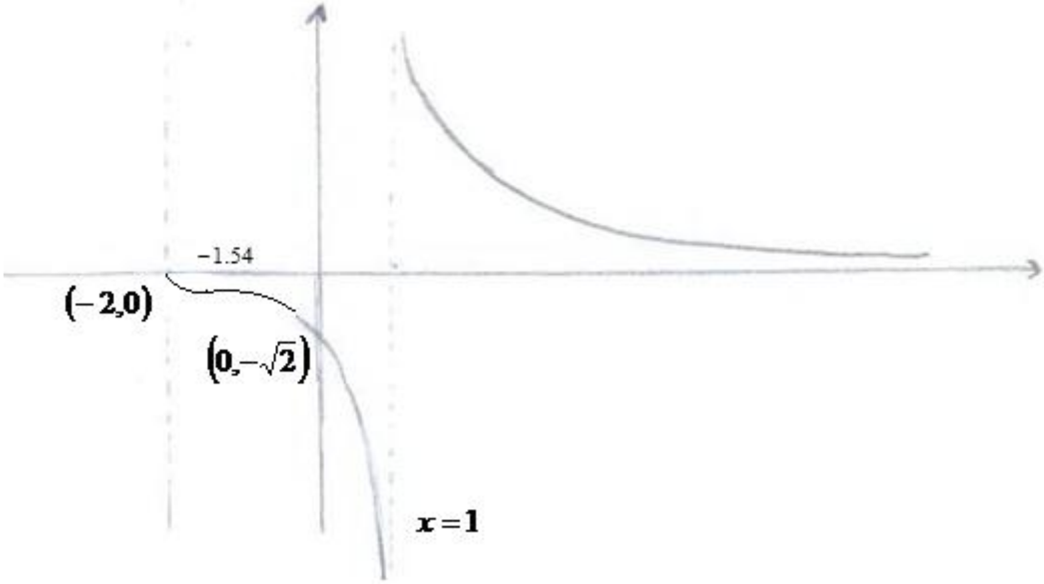
$$= -\frac{(x-1)^2 2(x+2) - (x+5)2(x-1)2(x+2) - (x+5)(x-1)^2}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2 \sqrt{x+2}} =$$

$$= \frac{3x^2+30x+39}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2 \sqrt{x+2}}(x-1)$$

,

pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare $(3x^2+30x+39)(x-1)>0$, per cui essendo il delta del polinomio di secondo grado positivo, abbiamo $x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{432}}{6} = \begin{cases} -1.54 \\ -8.46 \end{cases}$ pertanto $f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-8.46,-1.54[$, ed essendo $f''(x)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$, pertanto intersecando i due intervalli con il dominio della funzione, ed osservando che $\nexists f''_d(-2)$ e per una conseguenza del Teorema di Lagrange, possiamo affermare $f''_d(-2) = \lim_{x\to -2^+} f''(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{3x^2+30x+39}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2 \sqrt{x+2}}(x-1) = +\infty$, pertanto si ha:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x \in [-2,-1.54[\cup]1,+\infty[$ quindi strettamente convessa, e risulta $f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-1.54,1[$ quindi strettamente concava, con un punto di flesso proprio in $(-1.54, f(-1.54))$.



e quindi dedurre che:

$f\left(\left[-2,1\left[\cup\right]1,+\infty\right[\right)=R$, f è biunivoca su R.

4. Essendo la funzione $g(x)=\begin{cases}-\pi & \text{se } x>2\\ 1 & \text{se } x=2\\ arctg\,\dfrac{1}{x-2} & \text{se } x<2\end{cases}$ per cui g continua in $R-\{2\}$, ed osservando che $g(2)=1$, il $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} arctg\,\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{\pi}{2}$ ed il $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-\pi$, il punto 2 per la funzione data, è un punto di si continuità di prima specie.

5. Data la funzione $p(x)=e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}$, si ha: $\displaystyle\int\left(e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}\right)dx=\int e^{\frac{x}{2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}dx$, ovvero $P(x)=2e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{\pi}arcsen(\pi x)+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $P(0)=1\Leftrightarrow 2e^{\frac{0}{2}}-\dfrac{1}{\pi}arcsen(\pi 0)+c=1\Leftrightarrow c=-1$, conseguentemente la primitiva è: $P_0(x)=2e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{\pi}arcsen(\pi x)-1$. Infine l'equazione della tangente sulla primitiva P_0, nel punto 0, è: $y=P_0'(0)(x-0)+P_0(0)\Leftrightarrow y=p(0)x+P_0(0)$ ovvero $y=1$.

6. Data la $f(x,y)=x^3-x^2y^2+x^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\left[f_x(x,y),f_y(x,y)\right]=\left[3x^2-2xy^2+2x,-2x^2y\right]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\ -2x^2y=0\end{cases}=\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\ y=0\end{cases}$, e nella prima si

ottiene $3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(3x+2)=0$ le cui soluzioni sono $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$, quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y)=6x-2y^2+2$, $f_{yy}(x,y)=-2x^2$, $f_{xy}(x,y)=-4xy$ e $f_{yx}(x,y)=-4xy$, per cui $H|f(0,0)|=0$, pertanto per tale punto non possiamo dire nulla, mentre, $H\left|f\left(-\frac{2}{3},0\right)\right|=\frac{16}{9}$ in quanto $f_{xx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=6\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2$, $f_{yy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=-2\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{8}{9}$ e $f_{xy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=f_{yx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=0$, conseguentemente il punto stazionario $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ è di massimo ed il suo valore è $f\left(-\frac{2}{3},0\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$.

Traccia N

1. Data la funzione $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2+2}}$, dire se è *regolare* in $x_0=-\infty$ e se è *convergente* o *divergente* in $x_0=-\infty$.

2. Data la funzione $h(x)=\sqrt[3]{x}$, verificare la sua *derivabilità* nel punto $x=0$.

3. *Studiare* la funzione $f(x)=\log\left(x-\frac{1}{x}\right)$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g(x)=\sqrt{x^2-2x-2}$, definita $\forall x\in\left[-2,\left(1-\sqrt{3}\right)\right]$, verificare se sono soddisfatte le ipotesi del *Teorema del Punto Fisso*.

5. Data la funzione $p(x)=e^{\frac{\pi x-1}{2}}+\frac{1}{(1+2x)^3}$, calcolare *la primitiva* P_0, tale che $P(0)=0$ e scrivere *l'equazione della tangente* sulla primitiva P_0, nel punto 0.

6. Data la funzione $f(x,y)=e^{y^2}-e^{x^2}$, determinare eventuali punti *estremanti* e *classificarli*, A.A.(2016/2017).

Svolgimento traccia N

1. Data la seguente funzione $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2+2}}$ essendo il suo dominio non limitato inferiormente è possibile calcolare il limite, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2+2}}$, e si ha $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{9}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|}$ .ovvero $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{9}}\lim_{x\to-\infty}|x|=\frac{1}{\sqrt{5}-3}(+\infty)=-\infty$; pertanto la funzione per *x* che tende a meno infinito, diverge negativamente.

2. Data la funzione $h(x)=\sqrt[3]{x}$, la sua funzione derivata prima risulta $h'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ definita $\forall x\in R-\{0\}$; pertanto verifichiamo la sua derivabilità nel punto $x=0$, per cui deve $\exists\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=h'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$ ed $\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$, la funzione è solo dotata di derivata in $x=0$.

3. Data la funzione $f(x)=\log\left(x-\frac{1}{x}\right)$, essendo la funzione logaritmica definita in $]0,+\infty[$, si ha:

I. Dominio: deve essere $x-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}>0$, quindi $x^2-1>0 \Leftrightarrow |x|>1$ ed intersecando con il segno del denominatore, si ha $D(f) \Leftrightarrow \forall x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[$.

II. Segno: si osserva che $\log\left(x-\frac{1}{x}\right)>0=\log 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}>1$, ovvero $\frac{x^2-x-1}{x}>0$, quindi $x^2-x-1>0$, cioè $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ed $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ed intersecando con il segno del denominatore, si ha che $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$, conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$, quindi $f(x)=0 \Leftrightarrow x \in \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

III. Asintoti: essendo il $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-1}{x}=0$, si ha che il $\lim_{y\to 0}\log y=-\infty$, quindi la retta $x=-1$ è un asintoto verticale destro; mentre il $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{x}=+\infty$, si ha che il $\lim_{y\to +\infty}\log y=+\infty$, quindi la retta $x=0$ è un asintoto verticale sinistro; inoltre il $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x}=0$, quindi il $\lim_{y\to 0}\log y=-\infty$, quindi la retta $x=1$ è un asintoto verticale destro; in fine il $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{x}=+\infty$, quindi il $\lim_{y\to +\infty}\log y=+\infty$, ed osservando che $\lim_{y\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, non vi sono asintoti obliqui.

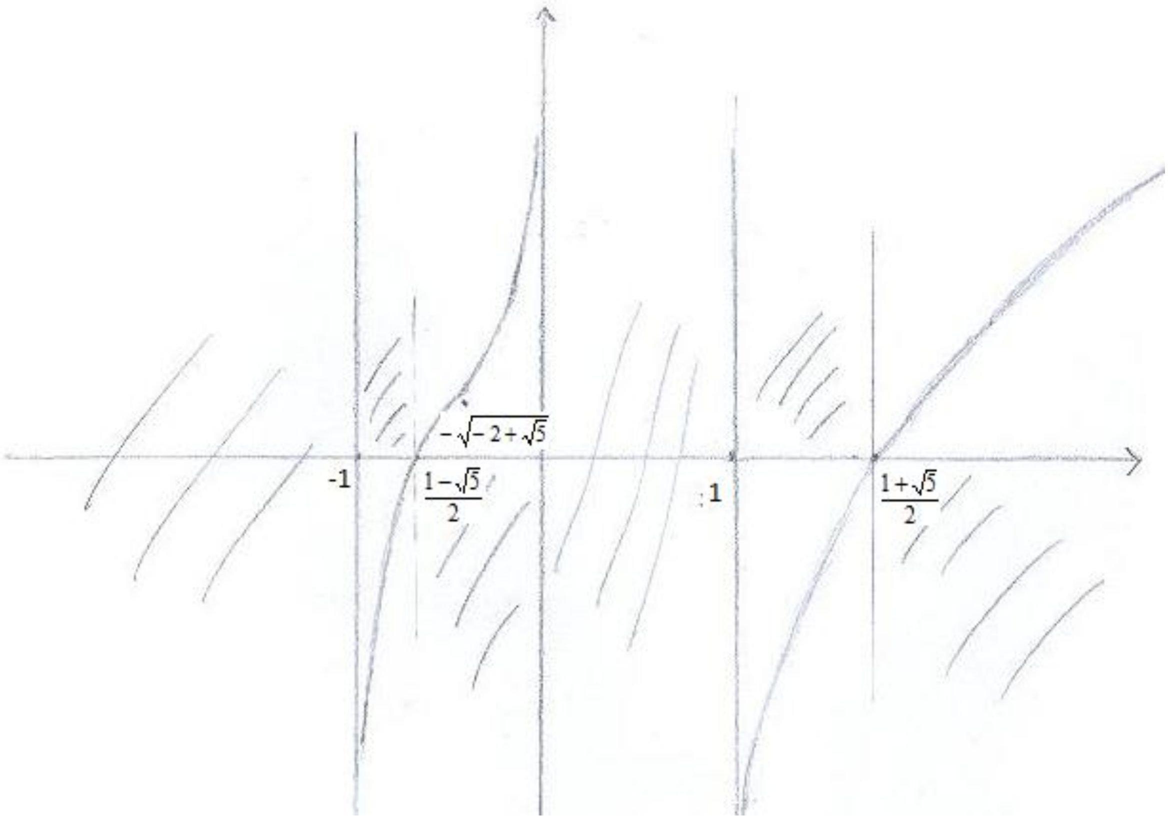
IV. Monotonia: essendo $f'(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=\frac{x^2+1}{x^3-x}$, pertanto avendo il numeratore sempre positivo avremo che $f'(x)>0 \Leftrightarrow x(x^2-1)>0 \Leftrightarrow x>0 \cap (x^2-1)>0$, quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow \forall x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[$, ovvero $f'(x)>0 \Leftrightarrow \forall x \in D(f)$, quindi la funzione è strettamente crescente.

V. Convessità: essendo $f''(x)=\frac{2x(x^3-x)-(x^2+1)(3x^2-1)}{(x^3-x)^2}=\frac{-x^4-4x^2+1}{(x^3-x)^2}$, dove si osserva che il denominatore è sempre positivo, per cui ponendo $x^2=y$, si ha: $f''(x)>0 \Leftrightarrow -x^4-4x^2+1>0 \Leftrightarrow y^2+4y-1<0$, disequazione che si annulla nei punti $y_1=-2+\sqrt{5}$ ed $y_2=-2-\sqrt{5}$, e tenendo conto della sostituzione la risulta impossibile la seconda soluzione, quindi $y_1=-2+\sqrt{5}=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$, per cui dalle disuguaglianze poste, la derivata seconda risulta positiva all'interno dei valori trovati, ed intersecando con il dominio, possiamo affermare che la funzione è strettamente convessa

$\forall x \in \left]-\sqrt{-2+\sqrt{5}}, \sqrt{-2+\sqrt{5}}\right[\cap D(f)$, ovvero $\forall x \in \left]-\sqrt{-2+\sqrt{5}}, 0\right[$ e conseguentemente sarà strettamente concava $\forall x \in -\left]-\sqrt{-2+\sqrt{5}}, \sqrt{-2+\sqrt{5}}\right[\cap D(f)$, ovvero $\forall x \in \left]-1, -\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

VI. Punti di flesso: si osserva che $\exists$ un intorno sinistro del punto $-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ in cui la funzione è strettamente concava ed $\exists$ un intorno destro in cui la funzione è strettamente convessa, per cui $\exists$ un punto di flesso proprio per *f*, ovvero $\left(-\sqrt{-2+\sqrt{5}}, f\left(-\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right)\right)$.

Siamo quindi in grado di tracciarne approssimativamente il suo grafico.



4. Data la funzione $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 2}$, definita $\forall x \in \left[-2, \left(1-\sqrt{3}\right)\right]$, quindi continua nel suo dominio, ed osservando che $g(-2) = \sqrt{6}$ e $g\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$; per cui $g(-2) = \sqrt{6} \notin \left[-2, \left(1-\sqrt{3}\right)\right]$, ed anche $g\left(1-\sqrt{3}\right) = 0 \notin \left[-2, \left(1-\sqrt{3}\right)\right]$, pertanto la funzione non soddisfare le ipotesi del Teorema del Punto Fisso.

5. Data la funzione $p(x) = e^{\frac{\pi x - 1}{2}} + \frac{1}{(1+2x)^3}$, si ha: $\int \left(e^{\frac{\pi x - 1}{2}} + \frac{1}{(1+2x)^3} \right) dx$, e quindi $\int e^{\frac{\pi x - 1}{2}} dx + \int \frac{1}{(1+2x)^3} dx = \frac{2}{\pi} e^{\frac{\pi x - 1}{2}} - \frac{1}{4(1+2x)^2} + c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $P(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} e^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi\sqrt{e}}$, conseguentemente la primitiva è:

$P_0(x)=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi x-1}{2}}-\frac{1}{4(1+2x)^2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi\sqrt{e}}$. Infine l'equazione della tangente sulla primitiva P_0, nel punto 0, è: $y=P_0'(0)(x-0)+P_0(0)\Leftrightarrow y=p(0)x+P_0(0)$ ovvero $y=\left(1+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)x$.

6. Data la $f(x,y)=x^3-x^2y^2+x^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=[f_x(x,y),f_y(x,y)]=[3x^2-2xy^2+2x,-2x^2y]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\-2x^2y=0\end{cases}=\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\y=0\end{cases}$, e nella prima si ottiene $3x^2+2x=0\Leftrightarrow x(3x+2)=0$ le cui soluzioni sono $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$, quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y)=6x-2y^2+2$, $f_{yy}(x,y)=-2x^2$, $f_{xy}(x,y)=-4xy$ e $f_{yx}(x,y)=-4xy$, per cui $H|f(0,0)|=0$, pertanto per tale punto non possiamo dire nulla, mentre, $H\left|f\left(-\frac{2}{3},0\right)\right|=\frac{16}{9}$ in quanto $f_{xx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=6\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2$, $f_{yy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=-2\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{8}{9}$ e $f_{xy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=f_{yx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=0$, conseguentemente il punto stazionario $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ è di massimo ed il suo valore è $f\left(-\frac{2}{3},0\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$.