Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
21 giugno 2017
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{9x^2-1}-\sqrt{8x^2+2}}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h: x \in [-3,1] \to \frac{x^2-1}{4x+5}$, determinare gli eventuali punti di massimo e minimo, assoluti e relativi.

3. Studiare la funzione $x \to f(x) = arctg \frac{1+x^2}{1-x^2}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g: x \in]0,1] \to e^{\frac{1}{x}}$, dire se soddisfa alle ipotesi dei Teoremi di Bolzano e di Weierstrass.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{4x+1}{2x^2+3}$, calcolare una primitiva *P* e scrivere l'equazione della tangente sulla primitiva *P* passante per l'origine, nel punto -2.

6. Data la funzione $f(x,y) = x^3 - x^2y^2 + x^2$, determinare il suo gradiente, eventuali punti stazionari e classificarli. (A.A. 2016/2017)

Svolgimento - Traccia A

1. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{9x^2-1}-\sqrt{8x^2+2}}$ si ha $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{9x^2-1}-\sqrt{8x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{|x|\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{8+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{3-\sqrt{8}} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{|x|}$ .ovvero $\frac{2}{3-\sqrt{8}} \lim_{x\to-\infty} |x| = \frac{2}{3-\sqrt{8}}(+\infty) = +\infty$. Per comodità, ci limitiamo a verificare quest'ultimo limite, ipotizzando i precedenti, corretti, per cui si ha $\frac{2}{3-\sqrt{8}}|x| > \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{\varepsilon(3-\sqrt{8})}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\varepsilon(\sqrt{8}-3)}{2}$, e quindi posto $\delta = \frac{(3-\sqrt{8})\varepsilon}{2}$, abbiamo individuato un intorno di meno infinito.

2. La funzione $h: x \in [-3,1] \to \frac{x^2-1}{4x+5}$ è composta da funzioni continue, quindi continua nell'insieme di definizione $[-3,1] - \left\{-\frac{5}{4}\right\} = \left[-3,-\frac{5}{4}\right[\cup \left]-\frac{5}{4},1\right]$ che, essendo una parte di R non chiusa, non soddisfa alle ipotesi del Teorema di Weierstrass, quindi non è dotata di minimo e massimo assoluti. Quindi possiamo considerare solo i punti di minimo e massimo relativi, pertanto osserviamo che

$h'(x)=\frac{2x(4x+5)-4(x^2-1)}{(4x+5)^2}=\frac{8x^2+10x-4x^2+4}{(4x+5)^2}=\frac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}$, definita in $\left[-3,-\frac{5}{4}\right[\cup\left]-\frac{5}{4},1\right]$ e, constatando che $h'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}=0$ e per cui $4x^2+10x+4=0\Leftrightarrow x=\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$, inoltre $f'(x)>0\Leftrightarrow 4x^2+10x+4>0$, ovvero $\forall x\in[-3,-2[\cup\left]-\frac{1}{2},1\right]$ quindi strettamente crescente, mentre risulta strettamente decrescente $\forall x\in\left]-2,-\frac{1}{2}\right[-\left\{-\frac{5}{4}\right\}$, pertanto il punto -2 risulta un punto di massimo relativo ed il massimo è $h(-2)=-1$; mentre il punto $-\frac{1}{2}$ risulta un punto di minimo relativo con valore $h\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

Inoltre, sempre per la sua monotonia, si osserva che la funzione ha in -3 un punto di minimo relativo ed il suo minimo è $h(-3)=-\frac{8}{7}$; mentre il punto 1 risulta un punto di massimo relativo con valore $h(1)=0$.

Infine, essendo $\lim_{x\to-\frac{5}{4}^-}\frac{x^2-1}{4x+5}=\frac{9}{16}\lim_{x\to-\frac{5}{4}^-}\frac{1}{4x+5}=-\infty$ ed $\lim_{x\to-\frac{5}{4}^+}\frac{x^2-1}{4x+5}=\frac{9}{16}\lim_{x\to-\frac{5}{4}^+}\frac{1}{4x+5}=+\infty$, pertanto la retta $x=-\frac{5}{4}$ è un asintoto verticale sia a destra che a sinistra.

3. Data la funzione $x\to f(x)=arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$

L'insieme dei valori della funzione f è incluso in $arctg(R)=\left]-\pi/2,\pi/2\right[$, quindi f è limitata e pertanto il grafico di f può avere solo asintoti orizzontali.
Ricordando che la funzione arcotangente è definita in R, l'insieme di definizione di f coincide con l'insieme di definizione di $x\to(1+x^2)/(1-x^2)$ e quindi l'insieme di definizione di f è: $\{x\in R, 1-x^2\neq 0\}$ ed essendo $1-x^2\neq 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq -1$ e $x\neq 1\Leftrightarrow x\in R-\{-1,1\}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ è:

$$f: x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\to arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

e risultando:

$$f(x)>0\Leftrightarrow arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}>0\Leftrightarrow\frac{1+x^2}{1-x^2}>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x^2-1<0\Leftrightarrow x\in\left]-1,1\right[,$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}=0\Leftrightarrow\frac{1+x^2}{1-x^2}=0\Leftrightarrow 1+x^2=0\Leftrightarrow x\in\emptyset$$

$$f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[-\left]-1,1\right[=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

il grafico di f è al di sopra dell'asse delle x in $\left]-1,1\right[$, è al di sotto dell'asse delle x in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$ ed ha in comune con gli assi il punto $(0,f(0))=(0,arctg1)=(0,\pi/4)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} arctg\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} arctg\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = arctg(-1) = -\pi/4$$,

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} arctg\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arctgy = -\pi/2$$,

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} arctg\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arctgy = \pi/2$$,

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} arctg\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arctgy = \pi/2$$,

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} arctg\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arctgy = -\pi/2$$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} arctg\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} arctg\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = arctg(-1) = -\pi/4$$

il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = -\pi/4$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4} \quad \text{se } x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

è

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[\text{ e } x > 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[\text{ e } x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[-[0,1[\cup]1,+\infty[=]-\infty,-1[\cup]-1,0[$$

f è strettamente crescente in $]0,1[$ ed in $]1,+\infty[$, è strettamente decrescente in $]-\infty,-1[$ ed in $]-1,0[$ e quindi zero è un punto di minimo relativo proprio per *f*.

Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{2x}{1+x^4} = 2\frac{1+x^4-4x^3\cdot x}{(1+x^4)^2} = 2\frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2} \qquad \text{se } x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

è:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e $1-3x^4 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e $(1+\sqrt{3}x^2)(1-\sqrt{3}x^2) <$
$< 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e $\sqrt{3}x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e
$x \in]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}[\Leftrightarrow x \in]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}[$

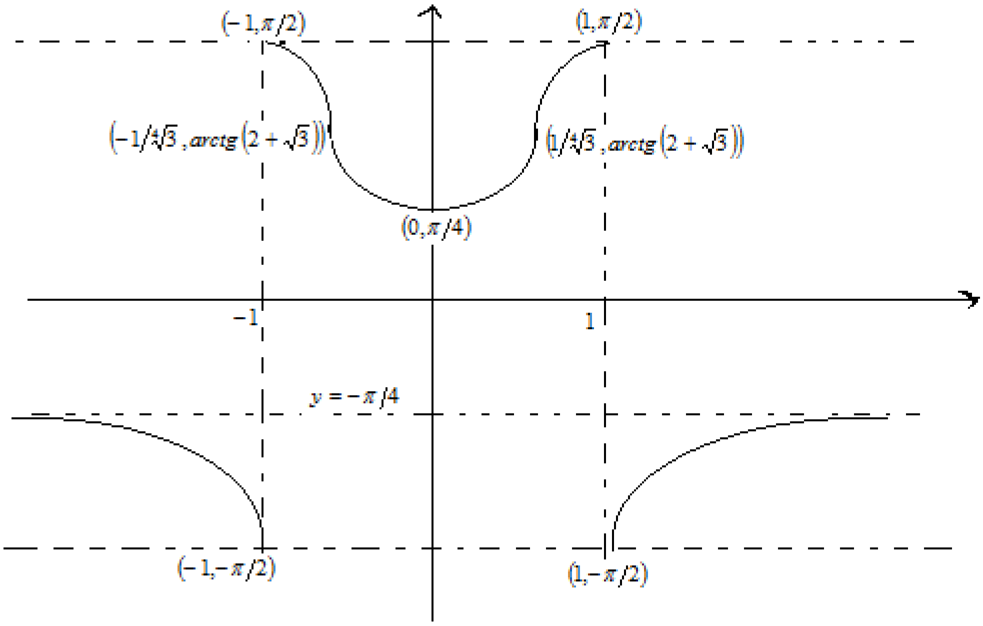
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e $1-3x^4 = 0 \Leftrightarrow x = -1/\sqrt[4]{3}$ o $x = 1/\sqrt[4]{3}$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[-]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}[=]-\infty,-1[\cup]-1,-1/\sqrt[4]{3}[\cup]1/\sqrt[4]{3},1[\cup]1,+\infty[$$

f è strettamente convessa in $]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}[$, è strettamente concava in $]-\infty,-1[$, in $]-1,-1/\sqrt[4]{3}[$ in $]1/\sqrt[4]{3},1[$ ed in $]1,+\infty[$ e $-1/\sqrt[4]{3}$ e $1/\sqrt[4]{3}$ sono due punti di flesso proprio per *f* ed il grafico di *f* passa per i punti

$\left(-1/\sqrt[4]{3},\, f\left(-1/\sqrt[4]{3}\right)\right)=\left(-1/\sqrt[4]{3},\, arctg\,\dfrac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}\right)=\left(-1/\sqrt[4]{3},\, arctg\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ e $\left(1/\sqrt[4]{3},\, f\left(1/\sqrt[4]{3}\right)\right)=$
$=\left(1/\sqrt[4]{3},\, arctg\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f\left(R-\{-1,1\}\right)=\left]-\pi/2,-\pi/4\right[\cup\left[\pi/4,\pi/2\right[$, $f\left(\left]-\infty,-1\right[\right)=f\left(\left]1,+\infty\right[\right)=\left]-\pi/2,-\pi/4\right[$, $f\left(\left]-1,0\right]\right)=f\left(\left[0,1\right[\right)=\left[\pi/4,\pi/2\right[$, *f* non è biunivoca, le restrizioni di *f* a $\left]-\infty,-1\right[$ ed a $\left]1,+\infty\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left]-\pi/2,-\pi/4\right[$, le restrizioni di *f* a $\left]-1,0\right]$ ed a $\left[0,1\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left[\pi/4,\pi/2\right[$.

OSSERVAZIONE. È immediato rendersi conto che *f* è una funzione pari quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $\left[0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ e completare il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto all'asse delle *x*.

4. La funzione assegnata è continua, quindi definita in un intervallo, pertanto soddisfa alle ipotesi del Teorema di Bolzano, ma non soddisfa alle ipotesi del Teorema di Weierstrass, in quanto $\left]0,1\right]$ è una parte limitata di *R*, ma non è una parte chiusa di *R*.

5. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+3}dx$$

pertanto tenendo conto che la funzione integranda $\dfrac{4x+1}{2x^2+3}=\dfrac{4x}{2x^2+3}+\dfrac{1}{2x^2+3}$ e che $D\left(2x^2+3\right)=4x$ si può scrivere $\dfrac{4x+1}{2x^2+3}=\dfrac{4x}{2x^2+3}+\dfrac{1}{2x^2+3}$ quindi $\displaystyle\int\frac{4x+1}{2x^2+3}dx=\int\frac{4x}{2x^2+3}dx+\int\frac{1}{2x^2+3}dx$, quindi per questo secondo integrale essendo il delta di $2x^2+3$ pari a $\Delta=-24$, il polinomio non ha soluzioni, e ricordando che $2x^2+3=2\left(x^2+\frac{24}{16}\right)=2\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)\frac{3}{2}$ quindi il secondo integrale diventa

$\int\frac{1}{3\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}dx=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}/\sqrt{3}}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}dx$ infine abbiamo

$\int\frac{4x+1}{2x^2+3}dx=\log\left|2x^2+3\right|+\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}+c$.

Tenendo conto che la primitiva passante per l'origine, soddisfa l'equazione: $P(0)=0\Leftrightarrow\log|0+3|+\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\,0+c=0\Leftrightarrow c=-\log 3$, e quindi diventa $P(x)=\log\left|2x^2+3\right|+\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x-\log 3$. Per cui la retta tangente $y=P'(-2)(x+2)+P(-2)$ è:

$$y=-\frac{7}{11}(x+2)+\log 11+\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\log 3.$$

6. Data la $f(x,y)=x^3-x^2y^2+x^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\left[f_x(x,y),f_y(x,y)\right]=\left[3x^2-2xy^2+2x,-2x^2y\right]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\-2x^2y=0\end{cases}=\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\y=0\end{cases}$, e nella prima si ottiene $3x^2+2x=0\Leftrightarrow x(3x+2)=0$ le cui soluzioni sono $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$, quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y)=6x-2y^2+2$, $f_{yy}(x,y)=-2x^2$, $f_{xy}(x,y)=-4xy$ e $f_{yx}(x,y)=-4xy$, per cui $H|f(0,0)|=0$, pertanto per tale punto non possiamo dire nulla, mentre, $H\left|f\left(-\frac{2}{3},0\right)\right|=\frac{16}{9}$ in quanto $f_{xx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=6\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2$, $f_{yy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=-2\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{8}{9}$ e $f_{xy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=f_{yx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=0$, conseguentemente il punto stazionario $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ è di massimo ed il suo valore è $f\left(-\frac{2}{3},0\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$