

traccia A

1. Calcolare la primitiva P , della funzione p , passante per il punto $(0, -1)$:

$$p(x) = \frac{x-1}{(x^2+3)(x+3)}$$

2. Dopo aver verificato se è possibile effettuare il seguente limite, dire se la funzione è regolare:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x - 3} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

3. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \arccot g \frac{2}{1-x}$$

4. Data la funzione:

$$h(x) \rightarrow \begin{cases} e^{x-1} + x & x \in]-\infty, 1] \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} & x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Determinare l'insieme di definizione e studiare l'eventuale esistenza di punti di discontinuità e nel caso affermativo stabilire la specie.

5. Determinare gli eventuali minimi e massimi relativi, ed assoluti, della seguente funzione e scrivere inoltre, l'equazione della tangente nel punto $\sqrt{e}$:

$$g(x) = \arcsen \log^2 x$$

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari.
2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

traccia B

1. Calcolare la primitiva P , della funzione p , passante per il punto $(1,0)$:

$$p(x) = \frac{x-1}{(x^2+2)(x+2)}$$

2. Dopo aver verificato se è possibile effettuare il seguente limite, dire se la funzione è regolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x - 3} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

3. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{1-x}$$

4. Data la funzione:

$$h(x) \rightarrow \begin{cases} e^{x-1} - 2x & x \in]-\infty, 1] \\ \operatorname{arc cot} g \frac{1}{x-1} & x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Determinare l'insieme di definizione e studiare l'eventuale esistenza di punti di discontinuità e nel caso affermativo stabilire la specie.

5. Determinare gli eventuali minimi e massimi relativi, ed assoluti, della seguente funzione e scrivere inoltre, l'equazione della tangente nel punto $\sqrt{e}$:

$$g(x) = \arccos \log^2 x$$

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Svolgimento prova scritta del 13 gennaio 2016 traccia A

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+3)(x+3)} dx, \text{ siccome } \frac{x-1}{(x^2+3)(x+3)} = \frac{Ax+B}{(x^2+3)} - \frac{C}{(x+3)} = \frac{(Ax+B)(x+3) - C(x^2+3)}{(x^2+3)(x+3)},$$

per cui $\frac{(Ax+B)(x+3) - C(x^2+3)}{(x^2+3)(x+3)} = \frac{(A-C)x^2 + (3A+B)x + 3B-3C}{(x^2+3)(x+3)}$ e per l'identità dei

polinomi $(A-C)x^2 + (3A+B)x + 3B-3C = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} A-C=0 \\ 3A+B=1 \\ 3(B-C)=-1 \end{cases} = \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=0 \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$ quindi

l'integrale può essere scritto $\int \frac{x-1}{(x^2+3)(x+3)} dx = \int \frac{\frac{1}{3}x+0}{(x^2+3)} dx - \int \frac{\frac{1}{3}}{(x+3)} dx =$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{x}{(x^2+3)} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x+3)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{2x}{(x^2+3)} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x+3)} dx, \text{ pertanto una primitiva della}$$

funzione assegnata è: $P(x) = \frac{1}{6} \log|x^2+3| - \frac{1}{3} \log|x+3|$, per cui la primitiva P passate per $(0, -1)$

sarà $P(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \log 3 - \frac{1}{3} \log 3 + C = -1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{6} \log 3 - 1$, quindi la primitiva cercata è:

$$P(x) = \frac{1}{6} \log|x^2+3| - \frac{1}{3} \log|x+3| + \frac{1}{6} \log 3 - 1$$

2. Essendo l'insieme di definizione non limitato inferiormente, in quanto $1 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, è possibile effettuare il limite assegnato, ed osservando che possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x - 3} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(5 - \frac{3}{x}\right) \left(-\frac{1}{x}\right)} , \quad \text{quindi}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = - \frac{x^3 \left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(5 - \frac{3}{x}\right)} \frac{1}{\log\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x} = -\frac{3}{5} \log e \lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty, \text{ pertanto la funzione è regolare in}$$

$-\infty$ e diverge positivamente.

3. Data la funzione $f(x) = \operatorname{arccot} g \frac{2}{1-x}$

L'insieme dei valori della funzione f è incluso in $\arccot g(R) =]0, \pi[$, quindi f è limitata e pertanto il grafico di f può avere solo asintoti orizzontali.

Ricordando che la funzione arco cotangente è definita in $\mathbb{R}$, l'insieme di definizione di f coincide con l'insieme di definizione di $x \rightarrow \frac{2}{1-x}$ e quindi $f : x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \arccot g \frac{2}{1-x}$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \arccot g \frac{2}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[, \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

il grafico di f si trova al di sopra dell'asse delle x in $]-\infty, 1[$ ed in $]1, +\infty[$, ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0, \arccot g 2)$ ed essendo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \arccot g \frac{2}{1-x} = \arccot g 0 = \pi/2, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \arccot g \frac{2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arccot g y = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \arccot g \frac{2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \arccot g y = \pi \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccot g \frac{2}{1-x} = \arccot g 0 = \pi/2 \end{aligned}$$

il grafico di f ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = \pi/2$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D \arccot g \frac{2}{1-x} = \frac{-1}{1 + \frac{4}{(1-x)^2}} \cdot \frac{-2}{(1-x)^2} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 5} \quad \text{se } x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

ed essendo $\Delta = 4 - 20 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2 - 2x + 5} > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset, & f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2 - 2x + 5} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset & \text{ed} \\ f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

quindi f è strettamente decrescente in $]-\infty, 1[$ ed in $]1, +\infty[$.

Risultando infine:

$$f''(x) = D \frac{-2}{x^2 - 2x + 5} = \frac{4(x-1)}{(x^2 - 2x + 5)^2} \quad \text{se } x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

è:

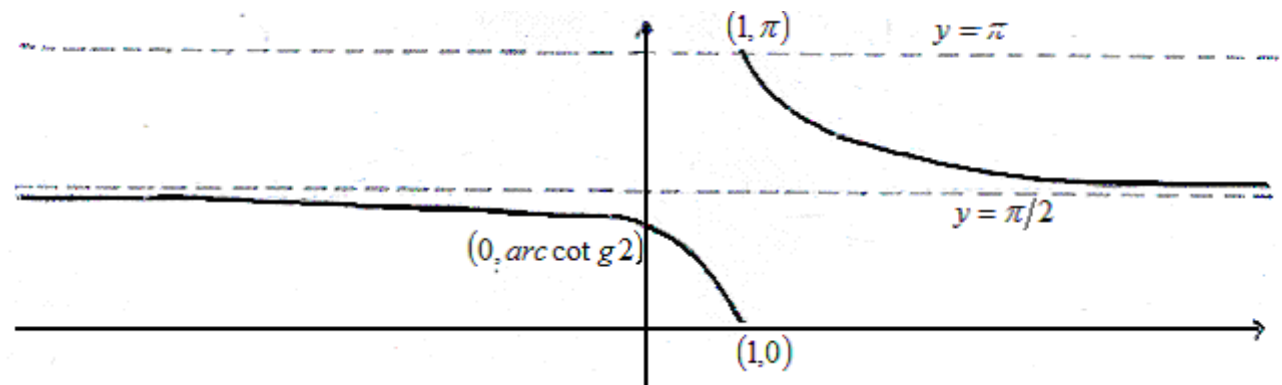
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ e } \frac{4(x-1)}{(x^2 - 2x + 5)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ e } x > 1 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[\quad ,$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ e } \frac{4(x-1)}{(x^2 - 2x + 5)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \quad ,$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[-]1, +\infty[=]-\infty, 1[$$

e pertanto la funzione f è strettamente convessa in $]1, +\infty[$ e strettamente concava in $] -\infty, 1[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f :



e quindi dedurre che:

$$\text{àà, } f(]-\infty, 1[) =]0, \pi/2[\quad , \quad f(]1, +\infty[) =]\pi/2, \pi[\quad , \quad f \text{ è biunivoca su }]0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi[\quad ,$$

$$\inf_{x \in \mathbb{R} - \{1\}} f(x) = 0 \text{ e } \sup_{x \in \mathbb{R} - \{1\}} f(x) = \pi .$$

4. Tale funzione:

$$h(x) \rightarrow \begin{cases} e^{x-1} + x & x \in]-\infty, 1] \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} & x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

è definita ed è continua in $R - \{1\}$ e risultando $h(1) = e^0 + 1 = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + x) = 2$ e

$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$, la funzione assegnata ha, in *uno*, un punto di discontinuità di prima specie.

5. Data la funzione $f(x) = \arcsen \log^2 x$, si ha che $D(f) \Leftrightarrow x \in]0, e]$ in quanto $-1 \leq \log^2 x \leq 1$, inoltre per il Teorema dei punti critici, si ha che $F = \{e\}$, $S = \{1\}$, $C = \{e\}$, in quanto

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \log^4 x}} \frac{2 \log x}{x}, \text{ e sia } X = F \cup S \cup C, \text{ allora } \max_{x \in]0, e]} f(x) = \max_{x \in X} f(x), \text{ (risp. Il minimo).}$$

Ora notando che $f(1) = \arcsen \log^2 1 = 0$, e che $f(e) = \arcsen \log^2 e = \frac{\pi}{2}$, possiamo affermare che

la funzione è dotata di minimo e di massimo. In fine l'equazione della retta tangente nel punto $\sqrt{e}$, è

$$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}), \text{ ovvero } y = \frac{2 \log \sqrt{e}(x - \sqrt{e})}{\sqrt{e} \sqrt{1 - \log^4 \sqrt{e}}} + \arcsen \log^2 \sqrt{e}.$$

Svolgimento prova scritta del 13 gennaio 2016 traccia B

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2)(x+2)} dx, \text{ siccome } \frac{x-1}{(x^2+2)(x+2)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)} - \frac{C}{(x+2)} = \frac{(Ax+B)(x+2) - C(x^2+2)}{(x^2+2)(x+2)}$$

$$, \text{ per cui } \frac{(Ax+B)(x+2) - C(x^2+2)}{(x^2+2)(x+2)} = \frac{(A-C)x^2 + (2A+B)x + 2B-2C}{(x^2+2)(x+2)} \text{ e per l'identità dei}$$

polinomi $(A-C)x^2 + (2A+B)x + 2B-2C = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} A-C=0 \\ 2A+B=1 \\ 2(B-C)=-1 \end{cases} = \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{quindi}$

l'integrale può essere scritto $\int \frac{x-1}{(x^2+2)(x+2)} dx = \int \frac{\frac{1}{2}x+0}{(x^2+2)} dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x}{(x^2+2)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+2)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{2x}{(x^2+2)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+2)} dx, \text{ pertanto una primitiva della}$$

funzione assegnata è: $P(x) = \frac{1}{4} \log|x^2+2| - \frac{1}{2} \log|x+2|$, per cui la primitiva P passate per $(1,0)$

sarà $P(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log 3 - \frac{1}{2} \log 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{4} \log 3$, quindi la primitiva cercata è:

$$P(x) = \frac{1}{4} \log|x^2+2| - \frac{1}{2} \log|x+2| + \frac{1}{4} \log 3$$

2. Essendo l'insieme di definizione non limitato superiormente, in quanto $1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$

$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, è possibile effettuare il limite assegnato, ed osservando che possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x - 3} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(5 - \frac{3}{x}\right) \frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{quindi}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(5 - \frac{3}{x}\right)} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \frac{3}{5} \log e \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ pertanto la funzione è regolare in } +\infty \text{ e}$$

diverge positivamente.

3. Data la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{1-x}$

L'insieme dei valori della funzione f è incluso in $\arctg(R) = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, quindi f è limitata e pertanto il grafico di f può avere solo asintoti orizzontali.

Ricordando che la funzione arcotangente è definita in R , l'insieme di definizione di f coincide con l'insieme di definizione di $x \rightarrow \frac{2}{1-x}$ e quindi $f : x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \arctg \frac{2}{1-x}$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \arctg \frac{2}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[,$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset, f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$$

il grafico di f si trova al di sopra dell'asse delle x in $]-\infty, 1[$ ed al di sotto dell'asse delle x in $]1, +\infty[$, ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0, \arctg 2)$ ed essendo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg \frac{2}{1-x} = \arctg 0 = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg \frac{2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctg y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctg \frac{2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctg y = -\frac{\pi}{2} \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \frac{2}{1-x} = \arctg 0 = 0$$

il grafico di f ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D \arctg \frac{2}{1-x} = \frac{1}{1 + \frac{4}{(1-x)^2}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{x^2 - 2x + 5} \text{ se } x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

ed essendo $\Delta = 4 - 20 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in R$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2 - 2x + 5} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x^2 - 2x + 5} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ ed}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

quindi f è strettamente crescente in $]-\infty, 1[$ ed in $]1, +\infty[$.

Risultando infine:

$$f''(x) = D \frac{2}{x^2 - 2x + 5} = \frac{-4(x-1)}{(x^2 - 2x + 5)^2} \text{ se } x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

è:

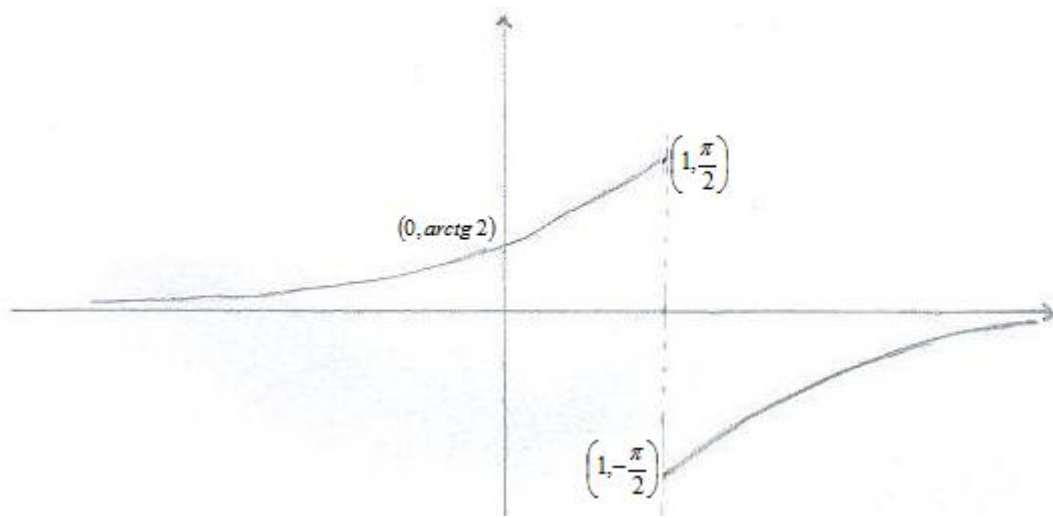
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ e } \frac{-4(x-1)}{(x^2 - 2x + 5)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ e } x < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[,$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ e } \frac{-4(x-1)}{(x^2 - 2x + 5)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset ,$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[-]-\infty, 1[=]1, +\infty[$$

e pertanto la funzione f è strettamente concava in $]1, +\infty[$ e strettamente convessa in $] -\infty, 1[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f :



e quindi dedurre che:

$$f(]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[) =]-\pi/2, \pi/2[, \quad f(]-\infty, 1[) =]0, \pi/2[, \quad f(]1, +\infty[) =]-\pi/2, 0[, \quad f \text{ è biunivoca su }]-\pi/2, \pi/2[,$$

$$\inf_{x \in \mathbb{R} - \{1\}} f(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ e } \sup_{x \in \mathbb{R} - \{1\}} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Tale funzione:

$$h(x) \rightarrow \begin{cases} e^{x-1} - 2x & x \in]-\infty, 1] \\ \operatorname{arccot} \cot g \frac{1}{x-1} & x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

È definita ed è continua in $\mathbb{R} - \{1\}$ e risultando $h(1) = e^0 - 2 = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} - 2x) = -1$ e

$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arccot} \cot g \frac{1}{x-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} \cot g y = 0$, la funzione assegnata ha, in *uno*, un punto di discontinuità di prima specie.

5. Data la funzione $f(x) = \arccos \log^2 x$, si ha che $D(f) \Leftrightarrow x \in]0, e]$ in quanto $-1 \leq \log^2 x \leq 1$, inoltre per il Teorema dei punti critici, si ha che $F = \{e\}$, $S = \{e\}$, $C = \{1\}$, in quanto

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \log^4 x}} \frac{2 \log x}{x}, \text{ e sia } X = F \cup S \cup C, \text{ allora } \max_{x \in]0, e]} f(x) = \max_{x \in X} f(x), \text{ (risp. Il minimo).}$$

Ora notando che $f(1) = \arccos \log^2 1 = \frac{\pi}{2}$, e che $f(e) = \arcsen \log^2 e = 0$, possiamo affermare che la

funzione è dotata di massimo e di minimo. In fine l'equazione della retta tangente nel punto $\sqrt{e}$, è

$$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}), \text{ ovvero } y = \frac{-2 \log \sqrt{e}(x - \sqrt{e})}{\sqrt{e} \sqrt{1 - \log^4 \sqrt{e}}} + \arccos \log^2 \sqrt{e}.$$