Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
12 giugno 2019
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Trovare, *se possibile* un punto di *approssimazione* con un errore $\varepsilon \le 10^{-1}$ dell'equazione $x^2 - e^{2x} + 2 = 0$, nell'intervallo $[0,1]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x \to 0} \frac{arctg\left(2^x - 1\right)}{x}$.

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x) = arctg \frac{4x}{1-x^2}$, e tracciarne *approssimativamente* il grafico.

4. Data la funzione $g(x) = arcsen(2x-1)$, verificare la *derivabilità* nel suo dominio.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-4x^2}}$, calcolare la primitiva P_0, nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

6. Data la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1-h \\ 2-h & 5 \end{pmatrix}$ ed il vettore $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, studiare il sistema $A\alpha = b$ nella variabile presente.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $x^2 - e^{2x} + 2 = 0$, funzione continua, definita in un intervallo chiuso e limitato, ed osservando che $f(0) = 1$, ed $f(1) = 3 - e^2 < 0$, pertanto $f(0) \cdot f(1) < 0$, ricorrono quindi tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in]0,1[\, / \, f(x_0) = 0$. Per cui sapendo che $|x_0 - c_n| < c_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} \le 10^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}} \le 10^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{10^{-1}} \le 2^{n+1} \Leftrightarrow n \ge \frac{\log(b-a)10}{\log 2} - 1$ quindi $n \ge \frac{\log((1)10)}{\log 2} - 1 = 2.32$ quindi, ponendo $n = 3$ si trova il punto di approssimazione con un errore $\in \le 8^{-1}$. Per semplificare $a_n b_n c_n f(a_n) f(b_n) f(c_n)$ i calcoli, sfruttiamo la stretta crescenza della funzione, e che si annulla per $x = -1$.

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	0	1	1/2	+	–	–
1	0	1/2	1/4	+	–	+
2	1/4	1/2	3/8	+	–	+
3	3/8	1/2	7/16	+	–	–

che risulta essere $c_3 = \frac{7}{16}$, in quanto $\left|\frac{7}{16} - \frac{3}{8}\right| \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{16} \le \frac{1}{10}$.

2. Essendo $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\left(2^x-1\right)}{x}$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcotangente è definita $\forall x\in R$, e che la funzione $f(x)=2^x-1$ e definita $\forall x\in R$, quindi il dominio risulta $\forall x\in R-\{0\}$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto 0 è un punto di accumulazione per il dominio. E trattandosi di un limite notevole del tipo $\frac{arctg(f(x))}{f(x)}$, pertanto osservando che $\frac{arctg\left(2^x-1\right)}{x}=\frac{arctg\left(2^x-1\right)}{\left(2^x-1\right)}\cdot\frac{\left(2^x-1\right)}{x}$; allora $\lim_{x\to 0} arctg\,\frac{arctg\left(2^x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{arctg\left(2^x-1\right)}{x}=\frac{arctg\left(2^x-1\right)}{\left(2^x-1\right)}\cdot\frac{\left(2^x-1\right)}{x}=\log 2$.

3. *Data la seguente funzione*: $x\to f(x)=arctg\,\frac{4x}{1-x^2}$.

I. *Dominio*:

l'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arctg(R)=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali. Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione di $x\to\frac{4x}{1-x^2}$ e quindi l'insieme di definizione di *f* è:

$\left\{x\in R, 1-x^2\neq 0\right\}$ ed essendo $1-x^2\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 1\Leftrightarrow x\in R-\{\pm 1\}$ è:

$f: x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\to arctg\,\frac{4x}{1-x^2}$

II. *Segno*:

risultando $f(x)>0\Leftrightarrow arctg\,\frac{4x}{1-x^2}>0\Leftrightarrow\frac{4x}{1-x^2}>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,1\right[$,

$f(x)<0\Leftrightarrow arctg\,\frac{4x}{1-x^2}<0\Leftrightarrow\frac{4x}{1-x^2}<0\Leftrightarrow x\in\left]-1,0\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$ ed inoltre $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ il grafico di *f* si trova al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-1,0\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$ ed al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,1\right[$, ha in comune con gli assi il punto $(0,f(0))=(0,0)$

III. *Asintoti*:

essendo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} arctg\,\frac{4x}{1-x^2}=arctg\,0=0 \quad ,$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-} arctg\,\frac{4x}{1-x^2}=\lim_{y\to+\infty} arctg\,y=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+} arctg\,\frac{4x}{1-x^2}=\lim_{y\to-\infty} arctg\,y=-\frac{\pi}{2} \quad ,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} arctg\,\frac{4x}{1-x^2}=\lim_{y\to+\infty} arctg\,y=\frac{\pi}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} arctg\,\dfrac{4x}{1-x^2} = \lim\limits_{y\to -\infty} arctgy = -\dfrac{\pi}{2}$ e

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} arctg\,\dfrac{4x}{1-x^2} = arctg0 = 0$ il grafico di f ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

IV. *Monotonia*:

Essendo: $f'(x) = Darctg\,\dfrac{4x}{1-x^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{16x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \dfrac{4(1-x^2)-4x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{4(x^2+1)}{x^4+14x^2+1}$ si ha:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4(x^2+1)}{x^4+14x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x \in R - \{\pm 1\}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ ed anche $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ quindi *f* è strettamente crescente nel suo dominio.

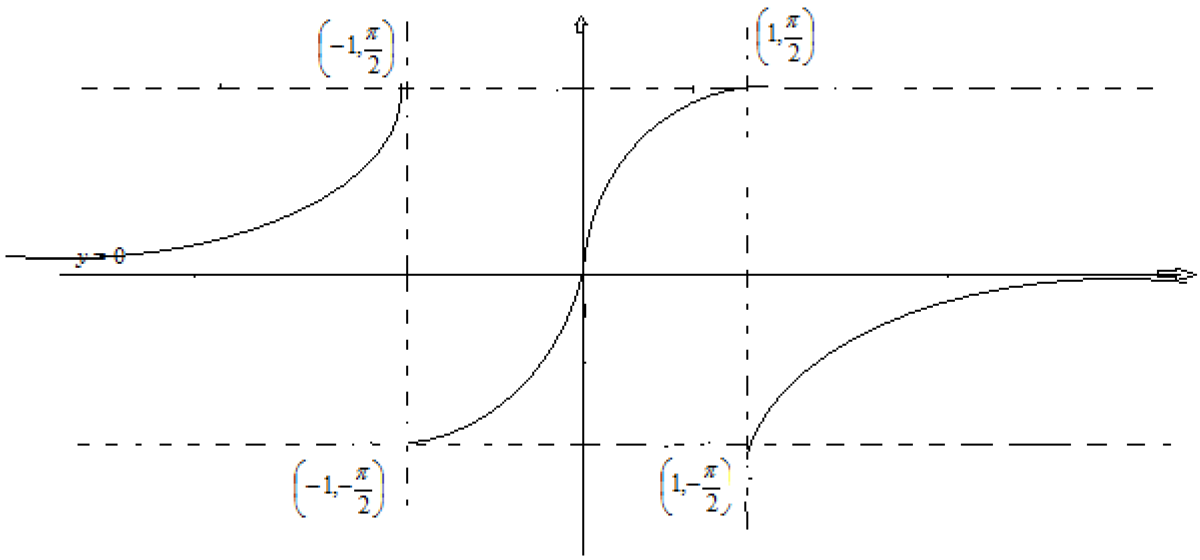
V. *Convessità*:

Risultando infine: $f''(x) = D\dfrac{4(x^2+1)}{x^4+14x^2+1} = \dfrac{8x(x^4+14x^2+1)-4(x^2+1)(4x^3+28x)}{(x^4+14x^2+1)^2}$ è:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -8x\dfrac{(x^4+2x^2+13)}{(x^4+14x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[- \{-1\}$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,+\infty\right[- \{1\}$ e pertanto la funzione *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,0\right[- \{-1\}$ e strettamente concava in $\left]0,+\infty\right[- \{1\}$.

VI. *Punti di flesso*: 0 è un punto di flesso proprio.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R-\{\pm 1\}) = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, non è biunivoca, mentre le restrizioni a $\left]-\infty,0\right[- \{-1\}$ ed a $\left]0,+\infty\right[- \{1\}$ sono biunivoche su $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

OSSERVAZIONE. È facile rendersi conto che f è $(0,0)$-simmetrica, o dispari, quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $]0,+\infty[-\{1\}$ e completare il grafico di f unendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto al punto $(0,0)$.

4. Data la funzione $f(x)=arcsen(2x-1)$, definita $\forall x\in[0,1]$, pertanto osservando che la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$ definita $1-(2x-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow |2x-1|\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1\neq 1\\ 2x-1\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ x\neq 0\end{cases}$ quindi $\forall x\in]0,1[$; pertanto la funzione f è derivabile $\forall x\in]0,1[$; quindi verifichiamo l'esistenza della derivata nei punti $x=0$ ed $x=1$, per cui, servendoci della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, allora $\exists f'(x_0)$; infatti si osserva che essendo $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=-\infty$ ed analogamente $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=-\infty$, la funzione *è dotata di derivata* in $x=0$ e risulta $f'_d(0)=-\infty$ ed *è dotata di derivata* in $x=1$ e risulta $f'_s(1)=-\infty$.

5. Si tratta di trovare la primitiva del seguente integrale definito $\int\dfrac{-3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$, ed essendo appunto una sua primitiva $\int\dfrac{-3}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\dfrac{3}{2}\int\dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\dfrac{3}{2}ar\cos 2x+c$, per cui per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{-3}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{3}{2}\left[ar\cos 2x+c\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(ar\cos 1-ar\cos -1)=-\frac{3}{4}\pi\ .$$

6. Si tratta di trovare delle soluzioni al sistema $A\alpha=b$; per cui si osserva che essendo $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1-h\\ 2-h & 5\end{pmatrix}$, il suo determinante è $\det(A')=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 1-h\end{vmatrix}=4-4h$, quindi per $h\neq 1$ e, mentre il $\det(B)=\begin{vmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1-h & 1\\ 2-h & 5 & -3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1-h & 1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=4((-3+3h)-5)=-32+12h$; quindi per $h\neq\dfrac{8}{3}$ $Car(A)=2\neq Car(B)=3$, pertanto il sistema è incompatibile; mentre $h=\dfrac{8}{3}$, e per $h\neq 1$ $Car(A)=Car(B)=2=r$ il numero delle incognite, pertanto il sistema diventa di Cramer, compatibile ed ammette una sola soluzione ovvero $\begin{cases}4x=0\\ -\dfrac{5}{3}y=1\end{cases}=\begin{cases}x=0\\ y=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$.