Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
10 novembre 2017
(prof. Bisceglia)

1. Data la funzione $f(x) = \dfrac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)}$, dire se regolare in $x_0 = 0$ e verificare la sua eventuale convergenza.

2. Data la funzione $h : x \in R \to \begin{cases} -3^x & \text{se } x < 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \\ -3x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, dire se esistono dei punti di discontinuità e classificarli.

3. Studiare la funzione $x \to f(x) = |x^2 - 1|$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g : x \in [0,1] \to hx^2 - 2h$, dire, per quali valori del parametro h soddisfa le ipotesi del Punto Fisso.

5. Data la funzione $p(x) = (x^2 - x + 1)e^{\frac{x}{2}}$, calcolare la primitiva *P* tale che $P(0) = 1$; scrivere inoltre l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto $(0, P(0))$. Inoltre calcolare la distanza della retta tangente dall'origine.

6. Data la funzione $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^2$, determinare il suo gradiente, eventuali punti stazionari e classificarli. (A.A. 2016/2017).

Svolgimento

1. La funzione $f(x) = \dfrac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)}$, per essere regolare in $x_0 = 0$, tale punto deve essere di accumulazione per il dominio della funzione, pertanto, per la funzione arcoseno, si ha $(2^x - 1) \in [-1,1] \Leftrightarrow 2^x \in [0,2] \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1]$, mentre la funzione seno è definita in R e per la funzione logaritmo si ha $1 - x \in]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1[$, ed inoltre $\log_2(1-x) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$; pertanto il dominio della funzione risulta $\forall x \in (]-\infty,1] \cap R \cap]-\infty,1[- \{0\}) \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[\cup]0,1[$, per cui essendo zero, un punto di accumulazione per il dominio della funzione, questa è regolare nel punto $x_0 = 0$, è risulta $\lim_{x \to 0} \dfrac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{arcsen(2^x - 1)}{2^x - 1} \cdot \dfrac{(2^x - 1)}{x} x + senx}{\dfrac{\log_2(1-x)}{-x}(-x)} = -\log^2 2$ e quindi la funzione risulta convergente nel punto $x_0 = 0$.

2. Essendo $h : x \in R \to \begin{cases} -3^x & \text{se } x < 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \\ -3x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, si osserva che $h(1) = \pi$, ed $\lim_{x \to 1^-} -3^x = -3$ così come $\lim_{x \to 1^+} -3x = -3$ per cui nel punto 1, la funzione ha un punto di discontinuità eliminabile.

3. Data la funzione $x \to f(x) = |x^2 - 1|$

Ricordando che la funzione valore assoluto è definita in R, l'insieme di definizione di f è: $\forall x \in R$ è:

$$f : x \in R \to |x^2 - 1|$$

e risultando:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$$

il grafico di f si trova sempre al di sopra dell'asse delle x, ha in comune con gli assi il punto $(-1, f(-1)) = (-1,0)$ ed il punto $(1, f(1)) = (1,0)$ essendo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \text{ ed } \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ pertanto}$$

il grafico di f non ha asintoti.

Essendo:

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ se } x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\\ 1 - x^2 \text{ se } x \in]-1,1[\end{cases}, \text{ si ha:}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\\ -2x & \text{se } x \in]-1,1[\end{cases}$$

e

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[\cap (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[) \Leftrightarrow x \in [1,+\infty[\\ -2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\cap]-1,1[\Leftrightarrow x \in]-1,0[\end{cases} \text{ ed}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\cap (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[) \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \\ -2x < 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[\cap]-1,1[\Leftrightarrow x \in]0,1[\end{cases}$$

quindi la funzione f è strettamente crescente in $]1,+\infty[$ ed in $]-1,0[$. ed è strettamente decrescente in $]-\infty,-1[$ ed in $]0,1[$.

Risultando infine:

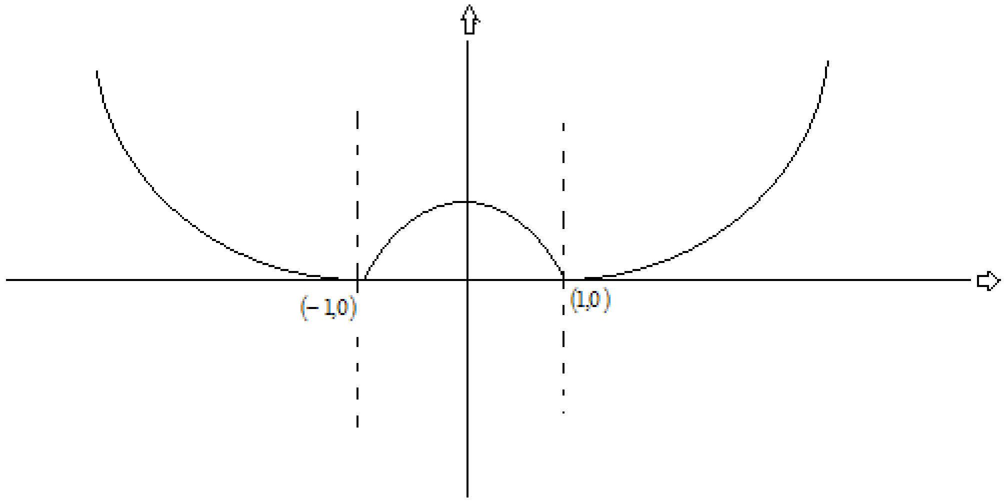
$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\\ -2 & \text{se } x \in]-1,1[\end{cases}$$

è:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \{2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[, \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow \{-2 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1,1[$$

e pertanto f è strettamente convessa in $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ e strettamente concava in $]-1,1[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f(R)=[0,+\infty[$, f non è biunivoca, limitata inferiormente e non limitata superiormente.

OSSERVAZIONE. È immediato convincersi che f è una funzione $(0,0)$-simmetrica, quindi pari, pertanto avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $]0,+\infty[$ ed ottenere il grafico di f unendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto al punto $(0,0)$.

4. Essendo $g: x\in[0,1]\to hx^2-2h$, g è continua in $[0,1]$, e per completare le ipotesi del Teorema del Punto Fisso, deve essere $\{g(0),g(1)\}\subseteq[0,1]$, quindi essendo $g(0)=-2h$ e $g(1)=-h$ si ha $-2h\in[0,1]\Leftrightarrow h\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ e $-h\in[0,1]\Leftrightarrow h\in[-1,0]$, pertanto $h\in\left[-\frac{1}{2},0\right]\cap[-1,0]\Leftrightarrow h\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

5. Essendo la funzione $p(x)=(x^2-x+1)e^{\frac{x}{2}}$, calcoliamo la primitiva procedendo per parti, quindi $\int(x^2-x+1)e^{\frac{x}{2}}dx=(x^2-x+1)2e^{\frac{x}{2}}-2\int(2x-1)e^{\frac{x}{2}}dx$ e conseguentemente per questo secondo $\int(2x-1)e^{\frac{x}{2}}dx$ procedendo ancora per parti, quindi si ha $\int(2x-1)e^{\frac{x}{2}}dx=(2x-1)2e^{\frac{x}{2}}-4\int e^{\frac{x}{2}}dx=(4x-2)e^{\frac{x}{2}}-8e^{\frac{x}{2}}$ quindi, $\int(x^2-x+1)e^{\frac{x}{2}}dx=2(x^2-x+1)e^{\frac{x}{2}}-2(4x-2)e^{\frac{x}{2}}+16e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}(2x^2-10x+22)+c$, per cui $P(0)=1\Leftrightarrow e^{\frac{0}{2}}(2(0)^2-10\cdot0+22)+c=1\Leftrightarrow c=1-22$, quindi la primitiva cercata è $P(x)=e^{\frac{x}{2}}(2x^2-10x+22)-21$. conseguentemente la retta tangente sulla primitiva P nel punto $(0,P(0))$, essendo $y=P'(0)(x-0)+P(0)$, per cui $P'(0)=p(0)=1$ e $P(0)=22-21=1$, si ha che la retta tangente risulta: $y=x+1$. Mentre la distanza di tale retta dall'origine è $d(r,(0,0))=\frac{|ax_0+ay_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Data la $f(x,y)=2x^3-3xy+2y^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=[f_x(x,y),f_y(x,y)]=[6x^2-3y,-3x+4y]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle

soluzioni del sistema $\begin{cases} 6x^2-3y=0 \\ -3x+4y=0 \end{cases} = \begin{cases} 6x^2-3\dfrac{3x}{4}=0 \\ y=\dfrac{3x}{4} \end{cases} = \begin{cases} x\left(6x-\dfrac{9}{4}\right)=0 \\ y=\dfrac{3x}{4} \end{cases}$, e quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(\dfrac{9}{24},\dfrac{9}{32}\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y)=12x$, $f_{yy}(x,y)=4$, $f_{xy}(x,y)=-3$ e $f_{yx}(x,y)=-3$, per cui $H_f(x,y)=\begin{vmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=48x-9$, controlliamo quindi la natura del punto $(0,0)$, $H_f(0,0)=-9<0$ abbiamo un punto di sella, mentre per il punto $\left(\dfrac{9}{24},\dfrac{9}{32}\right)$, $H_f\left(\dfrac{9}{24},\dfrac{9}{32}\right)=9>0$ ed $f_{xx}\left(\dfrac{9}{24},\dfrac{9}{32}\right)=\dfrac{9}{2}>0$, per cui il punto stazionario $\left(\dfrac{9}{24},\dfrac{9}{32}\right)$ è un punto di minimo ed il suo valore è $f\left(\dfrac{9}{24},\dfrac{9}{32}\right)=0.123$