Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale 07 settembre 2018 (prof. M. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $f(x): x \in R \to \begin{cases} e^{x-1}+x & \forall x \in \left]-\infty,1\right] \\ arctg\,\dfrac{1}{x-1} & \forall x \in \left]1,+\infty\right[\end{cases}$, *individuare* l'eventuale punto di discontinuità e, nel caso esiste, *classificarlo*.

2. Data la funzione $h: x \in [-3,1] \to \dfrac{x^2-1}{4x+5}$, determinare gli *eventuali punti* di massimo e minimo, *assoluti e relativi*.

3. Studiare la funzione $f: X \to f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - |x|$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la seguente funzione: $g: x \in [0,3] \to \begin{cases} 2x+1 & x \in [0,1] \\ 2^x+3x-2 & x \in \left]1,3\right] \end{cases}$, dire se soddisfa *le ipotesi* dei teoremi di Bolzano e/o di Weierstrass.

5. Data la funzione $p(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+1}$, *calcolare la primitiva P* tale che $P(0)=1$ e *scrivere l'equazione della tangente* sulla primitiva *P*, nel punto 0.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $f(x): x \in R \to \begin{cases} e^{x-1}+x & \forall x \in \left]-\infty,1\right] \\ arctg\,\dfrac{1}{x-1} & \forall x \in \left]1,+\infty\right[\end{cases}$, si osserva che la stessa, essendo data da funzioni continue, è continua in $R-\{1\}$; quindi osserviamo che $f(1)=e^0+1=2$ ed $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{x-1}+x = 2$, mentre $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} arctg\,\dfrac{1}{x-1} = \lim_{y\to +\infty} arctgy = \dfrac{\pi}{2}$; pertanto il *punto uno* è, per la funzione, un punto di discontinuità di *prima specie*.

2. La funzione $h: x \in [-3,1] \to \dfrac{x^2-1}{4x+5}$ è composta da funzioni continue, quindi continua nell'insieme di definizione $[-3,1]-\left\{-\dfrac{5}{4}\right\} = \left[-3,-\dfrac{5}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{5}{4},1\right]$ che, essendo una parte di R non chiusa, non soddisfa alle ipotesi del Teorema di Weierstrass, quindi non è dotata di minimo e massimo assoluti. Quindi possiamo considerare solo i punti di minimo e massimo relativi, pertanto osserviamo che $h'(x) = \dfrac{2x(4x+5)-4(x^2-1)}{(4x+5)^2} = \dfrac{8x^2+10x-4x^2+4}{(4x+5)^2} = \dfrac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}$, definita in $\left[-3,-\dfrac{5}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{5}{4},1\right]$ e, constatando che $h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}=0$ e per cui

$4x^2+10x+4=0 \Leftrightarrow x=\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$, inoltre $f'(x)>0 \Leftrightarrow 4x^2+10x+4>0$, ovvero $\forall x \in [-3,-2[\cup \left]-\frac{1}{2},1\right]$ quindi strettamente crescente, mentre risulta strettamente decrescente $\forall x \in \left]-2,-\frac{1}{2}\right[-\left\{-\frac{5}{4}\right\}$, pertanto il punto -2 risulta un punto di massimo relativo ed il massimo è $h(-2)=-1$; mentre il punto $-\frac{1}{2}$ risulta un punto di minimo relativo con valore $h\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$. Inoltre, sempre per la sua monotonia, si osserva che la funzione ha in -3 un punto di minimo relativo ed il suo minimo è $h(-3)=-\frac{8}{7}$; mentre il punto 1 risulta un punto di massimo relativo con valore $h(1)=0$.

3. *Data la seguente funzione*: $f: X \to f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-|x|$.

I. *Dominio*:

Essendo $x^2+x+1 \geq 0$ per ogni elemento *x* di *R*, l'insieme di definizione di *f* è *R* e quindi è:

$$f: x \in R \to \sqrt{x^2+x+1}-|x| = \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1}+x & \text{se} \quad x \in \left]-\infty,0\right[\\ \sqrt{x^2+x+1}-x & \text{se} \quad x \in \left[0,+\infty\right[\end{cases}$$

II. *Segno della funzione:*

$f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}-|x|>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}>|x| \Leftrightarrow x^2+x+1>x^2 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \Leftrightarrow x \in$
$\in \left]-1,+\infty\right[$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}-|x|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}=|x| \Leftrightarrow x^2+x+1=x^2 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x \in -\left[-1,+\infty\right[= \left]-\infty,-1\right[$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-1,+\infty\right[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,-1\right[$, ha in comune con gli assi i punti $(-1, f(-1))=(-1,0)$ e $(0, f(0))=(0,1)$

III. *Limiti significativi*:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=$$

$= \frac{1}{2}$

il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $y = -1/2$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y = 1/2$ asintoto orizzontale a destra.

IV. *Derivata prima e monotonia:*

$$f'(x) = \begin{cases} D\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1 & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\\ D\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-1 & \text{se } x \in \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

e

$$f'_s(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1\right) = \frac{3}{2}$$ e

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-1\right) = -\frac{1}{2}$$

f è derivabile in $R-\{0\}$, in zero non esiste la derivata di *f*, zero è un punto angoloso per *f* che è anche un punto di massimo relativo proprio per *f* ed è:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x<0 \text{ e } \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1>0\right) \text{ o } \left(x>0 \text{ e } \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-1>0\right) \Leftrightarrow \left(x<0 \text{ e } \frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}>0\right) \text{ o } \left(x>0 \text{ e } \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}>0\right) \Leftrightarrow \left(x<0 \text{ e } 2\sqrt{x^2+x+1}>-1-2x\right) \text{ o } \left(x>0 \text{ e } 2\sqrt{x^2+x+1}<2x+1\right) \Leftrightarrow x\in\left]-1/2,0\right[\text{ o } \left(x\le -1/2 \text{ e } 4x^2+4x+4>1+4x+4x^2\right) \text{ o } \left(x>0 \text{ e } 4x^2+4x+4<4x^2+4x+1\right) \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x<0 \text{ e } \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1=0\right) \text{ o } \left(x>0 \text{ e } \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-1=0\right) \Leftrightarrow \left(x<0 \text{ e } 2\sqrt{x^2+x+1} = -2x-1\right) \text{ o } \left(x>0 \text{ e } 2\sqrt{x^2+x+1}=2x+1\right) \Leftrightarrow \left(x\le -1/2 \text{ e } 4x^2+4x+4=1+4x+4x^2\right) \text{ o } \left(x>0 \text{ e } 4x^2+4x+4=4x^2+4x+1\right) \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[-\left]-\infty,0\right[=\left]0,+\infty\right[$$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left]-\infty,0\right]$, è strettamente decrescente in $\left]0,+\infty\right[$ e pertanto 0 è un punto di massimo per *f* e 1 è il massimo di *f*.

V. *Derivata seconda e concavità:*

$$f''(x) = D\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{3}{4\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}} \quad \text{se } x\in R-\{0\}$$

VI.

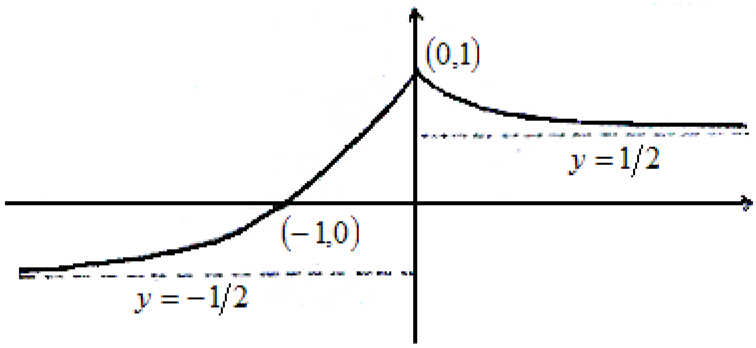
risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{3}{4(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \quad \text{se} \quad x \in R-\{0\}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[\text{ ed } f''(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,0\right]$ ed in $\left[0,+\infty\right[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R) = \left]-1/2,1\right]$, $f\left(\left]-\infty,0\right]\right) = \left]-1/2,1\right]$, $f\left(\left[0,+\infty\right[\right) = \left]1/2,1\right]$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $\left]-\infty,0\right]$ è biunivoca su $\left]-1/2,1\right]$ e la restrizione di *f* a $\left[0,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]1/2,1\right]$.

4. Essendo $g: x \in [0,3] \to \begin{cases} 2x+1 & x \in [0,1] \\ 2^x+3x-2 & x \in \left]1,3\right] \end{cases}$, è continua in $[0,3]-\{1\}$ e risultando $g(1)=3$, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x+1) = 3$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}(2^x+3x-2) = 3$ la funzione g è continua ed è definita in un intervallo di R quindi g soddisfa alle ipotesi dei teoremi di BOLZANO ed essendo $[0,3]$ una parte chiusa e limitata di R g soddisfa pure alle ipotesi dei teoremi di WEIERSTRASS.

5. Data la funzione $p(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+1}$, l'insieme delle primitive della seguente funzione è dato da: $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx$, per cui è: $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \log\left|x^2+2x+1\right| + \frac{1}{x+1}$, pertanto si ha che l'insieme delle primitive dell'integrale assegnato, risulta: $P(x) = \log\left|x^2+2x+1\right| + \dfrac{1}{x+1} + c$ e conseguentemente $P(0)=1 \Leftrightarrow \log|1| + 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$; quindi la primitiva cercata risulta $P(x) = \log\left|x^2+2x+1\right| + \dfrac{1}{x+1}$; conseguentemente la retta tangente sulla primitiva P nel punto zero,

essendo $y = P'(0)(x-0) + P(0)$, per cui $P'(0) = p(0) = 1$ e $P(0) = 0 + 1 = 1$, si ha che la retta tangente risulta: $y = x + 1$.