Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
06 febbraio 2019
(prof. Bisceglia)

**Traccia A**

1. Trovare, *se possibile* un punto di *approssimazione* con un errore $\in\leq 6^{-1}$ dell'equazione $x^3 \log(x+2)$, nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

2. Dopo averne *accertata* l'esistenza, *calcolare* il seguente limite $\lim_{x\to-\infty} 2^x$ e *verificare* l'esattezza del suo risultato.

3. Studiare la funzione $x \to f(x) = \arccos(2^x - 1)$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} + 1 & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ arcsenx & \text{se } x < 1 \end{cases}$ individuare *eventuali* punti di discontinuità, e *classificarli*.

5. Calcolare l'area sottostante la funzione $p(x) = 2^{\frac{2x-1}{3}} + 1$, nell'intervallo $[1,2]$.

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$, determinare la sua *caratteristica* al variare di *k*, e la *matrice* $A^{-1}$.

**Svolgimento traccia A**

1. Data la funzione $x^3 \log(x+2)$, definita e continua nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2},1\right]$, e risultando $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in \left]-\frac{1}{2},1\right[ \,/\, f(x_0) = 0$. Per cui sapendo che $|x_0 - c_n| < c_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq 6^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq 6^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{6^{-1}} \leq 2^{n+1} \Leftrightarrow n \geq \frac{\log((b-a)6)}{\log 2} - 1$ quindi $n \geq \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}\right)6}{\log 2} - 1 = 2.5$ pertanto, posto $n = 3$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\leq 6^{-1}$ risulta:

| N | $A_n$ | $c_n$ | $B_n$ | $f(a_n)$ | $f(c_n)$ | $f(b_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1/2 | 1/4 | 1 | — | + | + |
| 1 | -1/2 | -1/8 | ¼ | — | — | + |
| 2 | -1/8 | 1/16 | ¼ | — | + | + |

| 3 | -1/8 | -1/32 | 1/16 | — | — | + |
|---|---|---|---|---|---|---|

essere $c_2 = -\frac{1}{32}$, in quanto $\left|\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right| = \frac{3}{32} \le \frac{1}{6}$.

2. Il seguente limite, $\lim_{x\to-\infty} 2^x$ esiste, se il dominio della funzione non è limitato inferiormente, ed essendo la funzione esponenziale definita in $R$, il limite assegnato esiste e risulta $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, tale che se $x \in R$ e se $x < -\delta$ risulta che $f(x) \in I_L \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ Pertanto fissato $\varepsilon > 0$, e considerato che si tratta di una funzione esponenziale sempre positiva, si ha $\left|2^x - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2^x < \varepsilon \Leftrightarrow x < \log_2 \varepsilon$ ; pertanto per $\varepsilon < 1$ ponendo $\delta = -\log_2 \varepsilon$; e per $\varepsilon \ge 1$ ponendo $\delta = 0$, risulta $x < -\delta$ quindi è verificata l'esattezza del suo risultato.

3. Data la funzione $x \to f(x) = \arccos(2^x - 1)$

*Insieme di definizione:*

Essendo una funzione arcocoseno, deve essere $-1 \le 2^x - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2^x \le 2 \Leftrightarrow x \le 1$,
pertanto $X = \left]-\infty,1\right]$
Quindi tale funzione è definita $\forall x \in \left]-\infty,1\right]$, ovvero

$$f : \left]-\infty,1\right] \to f(x) = \arccos(2^x - 1) \in R$$

*Segno della funzione:*

Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow \arccos(2^x - 1) > 0 = \arccos(\cos 0) \Leftrightarrow 2^x - 1 < 1 \Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1$.

Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,1\right[ \cap X = \left]-\infty,1\right[$

Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in -\left]-\infty,1\right[ \cap X \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Si osserva che $f(0) = \arccos(2^0 - 1) = \frac{\pi}{2}$, quindi passa per il punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, mentre $f(1) = \arccos(1) = 0$, quindi la funzione tocca il punto $(1,0)$.

*Limiti significativi:*

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare solo il limite nell'estremo inferiore.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arccos(2^x - 1) = \pi$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to-\infty}(2^x - 1) = -1$ quindi $\lim_{y\to-1} \arccos y = \pi$

Pertanto la retta $y = \pi$ è un asintoto orizzontale a sinistra.

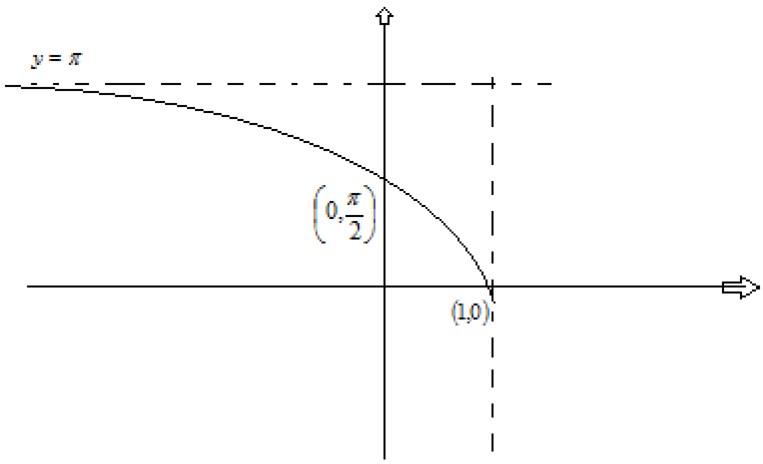
*Derivata prima e monotonia:*

$f'(x)=\arccos\left(2^x-1\right)=-\dfrac{2^x\log_e 2}{\sqrt{1-\left(2^x-1\right)^2}}$ ., quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow -\dfrac{2^x\log_e 2}{\sqrt{1-\left(2^x-1\right)^2}}>0$ , ovvero $\dfrac{2^x\log_e 2}{\sqrt{1-\left(2^x-1\right)^2}}<0$ ed osservando che sia numeratore che il denominatore sono strettamente positivi, tranne nel punto 1, in cui la funzione derivata non è definita e si osserva che $-\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2^x\log_e 2}{\sqrt{1-\left(2^x-1\right)^2}}=-2\log_e 2(+\infty)=-\infty$ , pertanto $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$ conseguentemente $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,1\right[\cup\{1\}$ quindi la funzione è strettamente decrescente nel suo insieme di definizione.

*Derivata seconda e concavità:*

$f''(x)=-\log_e 2\dfrac{2^x\log_e 2\left(1-\left(2^x-1\right)^2\right)+2^x\left(2^x-1\right)2^x\log 2}{\sqrt{1-\left(2^x-1\right)^2}\left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^2}$ , ovvero

$f''(x)=-2^x\left(\log_e 2\right)^2\dfrac{2^x}{\sqrt{1-\left(2^x-1\right)^2}\left(\sqrt{1-\left(2^x-1\right)^2}\right)^2}$ che come si può osservare risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$ e conseguentemente $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,1\right]$ quindi la funzione è strettamente concava nel suo insieme di definizione.




e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,1\right]\right)=\left[0,\pi\right[$, la funzione è biunivoca su $\left[0,\pi\right[$.

4. Essendo $h(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}+1 & \text{se } x>1 \\ 0 & \text{se } x=1 \\ arcsenx & \text{se } x<1 \end{cases}$ , definita in $\left[-1,+\infty\right[$ ; si osserva che $f(1)=0$ , il $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}+1=+\infty$ ed il $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} arcsenx=\dfrac{\pi}{2}$; pertanto il punto 1 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *seconda specie*.

5. Data la funzione $p(x)=2^{\frac{2x-1}{3}}+1$ si tratta di calcolare il seguente integrale $\int_1^2\left(2^{\frac{2x-1}{3}}+1\right)dx$ e per la proprietà additiva risulta $\int 2^{\frac{2x-1}{3}}dx+\int 1dx=\frac{3}{2}2^{\frac{2x-1}{3}}+x+c$ e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\left[\frac{3}{2\log 2}2^{\frac{2x-1}{3}}+x+c\right]_1^2=\frac{3}{2\log 2}\left(2-\sqrt[3]{2}\right)+1$ .

6. Per poter calcolare la caratteristica, troviamo il determinante della matrice A, e quindi considerando la matrice quadrata $A'=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ si ha $\det(A)=1$ , pertanto la $Car(A)=2$ ; inoltre essendo $A^{-1}=\frac{Agg(A)}{\det(A)}=\frac{C^T}{\det(A)}$ , si osserva che, essendo $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -k & 1\end{pmatrix}$ , conseguentemente $C^T=\begin{pmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, quindi $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**Traccia B**

1. Trovare, *se possibile* un punto di *approssimazione* con un errore $\in\leq 7^{-1}$ dell'equazione $x^3\sqrt[3]{x+1}$ , nell'intervallo $\left[-\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$.

2. Dopo averne *accertata* l'esistenza, *calcolare* il seguente limite $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e *verificare* l'esattezza del suo risultato.

3. *Studiare* la funzione $x\to f(x)=arcsen\left(2^x-1\right)$, e *tracciarne approssimativamente* il grafico.

4. Data la funzione $h(x)=\begin{cases}e^{x-1}-1 & \text{se } x>1\\ 1 & \text{se } x=1\\ \arccos x & \text{se } x<1\end{cases}$ individuare *eventuali* punti di discontinuità, e *classificarli*.

5. Calcolare l'area sottostante la funzione $p(x)=2^{-\frac{x-1}{2}}-1$, nell'intervallo $[0,1]$.

6. Data la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ k & 1 & 1\end{pmatrix}$, determinare la sua *caratteristica* al variare di *k*, e la *matrice* $A^{-1}$.

**Svolgimento traccia B**

1. Data la funzione $x^3\sqrt[3]{x+1}$, definita e continua nell'intervallo $\left[-\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$, e risultando $f\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot f\left(\frac{3}{4}\right)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in \left]-\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right[ \,/\, f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 7^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 7^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{7^{-1}}\le 2^{n+1} \Leftrightarrow n\ge \frac{\log((b-a)7)}{\log 2}-1$ quindi $n\ge \frac{\log\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)7}{\log 2}-1=2.5$ pertanto, posto $n=3$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\le 6^{-1}$ risulta:

| N | $A_n$ | $c_n$ | $B_n$ | $f(a_n)$ | $f(c_n)$ | $f(b_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -2/3 | 1/24 | 3/4 | — | + | + |
| 1 | -2/3 | -15/48 | 1/24 | — | — | + |
| 2 | -15/48 | -13/96 | 1/24 | — | — | + |
| 3 | -13/96 | -3/64 | 1/24 | — | — | + |

essere $c_2=-\frac{3}{64}$, in quanto $\left|\frac{1}{24}+\frac{3}{64}\right|=\frac{7}{96}\le\frac{1}{7}$.

2. Essendo $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, tale funzione è definita in $R$, non limitata superiormente, pertanto è possibile calcolare il limite che tende a $+\infty$, e risulta $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, tale che se $x\in R$ e se $x>\delta$ risulta che $f(x)\in I_L \Leftrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
Pertanto fissato $\varepsilon>0$, e considerato che si tratta di una funzione esponenziale sempre positiva, si ha: $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x<\varepsilon \Leftrightarrow x>\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon$, quindi posto $\delta=\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon$ per $\varepsilon<1$, e $\delta=0$ per $\varepsilon>1$ risulta $x>\delta$, si determina un intorno $+\infty$ in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

3. Data la funzione $x\to f(x)=arcsen(2^x-1)$
*Insieme di definizione:*
Essendo una funzione arcocoseno, deve essere $-1\le 2^x-1\le 1 \Leftrightarrow 0\le 2^x\le 2 \Leftrightarrow x\le 1$,
pertanto $X=\left]-\infty,1\right]$
Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]-\infty,1\right]$, ovvero

$$f:\left]-\infty,1\right]\to f(x)=arcsen(2^x-1)\in R$$

*Segno della funzione:*
Deve essere $f(x)>0 \Leftrightarrow arcsen(2^x-1)>0=arcsen(sen0) \Leftrightarrow 2^x-1>0 \Leftrightarrow 2^x>1 \Leftrightarrow x>0$.
Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[\cap X=\left]0,1\right]$
Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in-\left]0,+\infty\right[\cap X \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$

Si osserva che $f(0) = arcsen(2^0 - 1) = 0$, quindi passa per il punto $(0,0)$, mentre $f(1) = arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$, quindi la funzione tocca il punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

*Limiti significativi:*

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare solo il limite nell'estremo inferiore.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} arcsen(2^x - 1) = -\frac{\pi}{2}$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x \to -\infty} (2^x - 1) = -1$ quindi $\lim_{y \to -1} arcseny = -\frac{\pi}{2}$

Pertanto la retta $y = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale a sinistra.

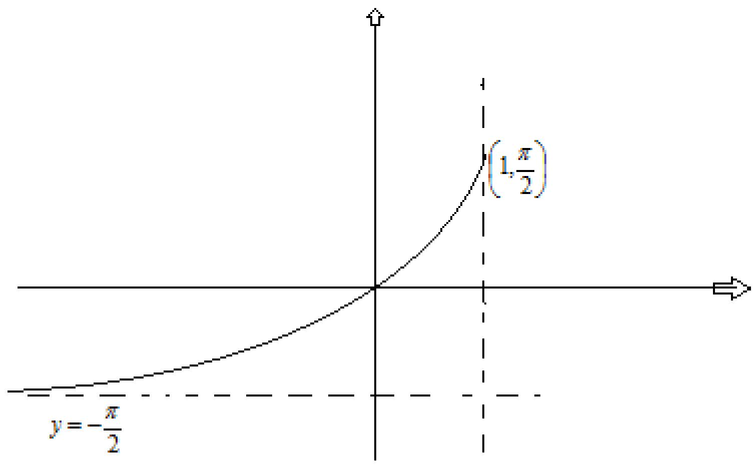
*Derivata prima e monotonia:*

$f'(x) = arcsen(2^x - 1) = \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1-(2^x-1)^2}}$ ., quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1-(2^x-1)^2}} > 0$, ed osservando che sia numeratore che il denominatore sono strettamente positivi, tranne nel punto 1, in cui la funzione derivata non è definita e si osserva che $\lim_{x \to 1^-} \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1-(2^x-1)^2}} = 2\log_e 2(+\infty) = +\infty$, pertanto $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty,1[ \cup \{1\}$ conseguentemente $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ quindi la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione.

*Derivata seconda e concavità:*

$$f''(x) = \log_e 2 \frac{2^x \log_e 2\left(1-(2^x-1)^2\right) + 2^x(2^x-1)2^x \log 2}{\sqrt{1-(2^x-1)^2}\left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^2}$$ , ovvero

$f''(x) = 2^x(\log_e 2)^2 \frac{2^x}{\sqrt{1-(2^x-1)^2}\left(\sqrt{1-(2^x-1)^2}\right)^2}$ che come si può osservare risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty,1]$ e conseguentemente $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ quindi la funzione è strettamente convessa nel suo insieme di definizione.




e quindi dedurre che:

$f(]-\infty,1]) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la funzione è biunivoca su $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Essendo $h(x)=\begin{cases} e^{x-1}-1 & \text{se } x>1 \\ 1 & \text{se } x=1 \\ \arccos x & \text{se } x<1 \end{cases}$, definita in $[-1,+\infty[$ ; si osserva che $f(1)=1$, il $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{x-1}-1=0$ ed il $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\arccos x=0$ ; pertanto il punto 1 per la funzione data, è un punto di discontinuità *eliminabile*.

5. Data la funzione $p(x)=2^{-\frac{x-1}{2}}-1$ si tratta di calcolare il seguente integrale $\int_0^1\left(2^{-\frac{x-1}{2}}-1\right)dx$ e per la proprietà additiva risulta $\int 2^{-\frac{x-1}{2}}dx-\int 1dx=\frac{-2}{\log 2}\cdot 2^{-\frac{x-1}{2}}-x+c$ e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\left[\frac{-2}{\log 2}\cdot 2^{-\frac{x-1}{2}}-x+c\right]_0^1=\frac{2}{\log 2}\left(1+\sqrt{2}\right)$ .

6. Per poter calcolare la caratteristica, troviamo il determinante della matrice A, e quindi considerando la matrice quadrata $A'=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $\det(A)=k$, pertanto $\forall k\neq 0$ la $Car(A)=2$, mentre per $k=0$ la $Car(A)=1$; inoltre essendo $A^{-1}=\frac{Agg(A)}{\det(A)}=\frac{C^T}{\det(A)}$, pertanto $\forall k\neq 0$ si osserva che, essendo $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, conseguentemente $C^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & k \end{pmatrix}$, quindi $A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & k \end{pmatrix}}{k}$.