Matematica per l'Economia (A-K)
I Esonero – 26 ottobre 2018
(prof. Bisceglia)

Traccia A e C

1. Sia $A=\{2,[0,2[,b\}$, dopo averne *data la definizione*, riportare l'*Insieme delle Parti*, $P(A)$.

2. Data la funzione $f(x)=x$, riportare *la retta* o *la funzione g*, che descrivere con la funzione *f* ed il semiasse positivo delle ascisse, *un triangolo* di *area pari a 6*.

3. Dire se la funzione $f:[-1,1[\to[-1,1[$, con $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{se } x\in[-1,0[\\ x-1 & \text{se } x\in[0,1[\end{cases}$ soddisfa le *ipotesi* del teorema sulla *invertibilità* delle funzioni *strettamente monotone*.

4. Data la funzione $f(x)=x-1$, riportare la funzione che garantisce un *incremento costante unitario*.

5. Data la funzione $f:R\to f(R)$, con $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$; servendosi dell'*opportuno teorema*, dire se la funzione è *strettamente concava*.

6. Dire se la funzione $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$, ha eventuali *simmetrie*.

7. Dire se la funzione $f(x)=arcsen\left(tg\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ è *regolare* in $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

8. Dato il $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{-x}}$, *verificare* che si possa calcolare, e *constatare* la correttezza del suo risultato.

Svolgimento - Traccia A e C

1. Essendo $A=\{2,[0,2[,b\}$, l'insieme delle Parti è l'insieme $P(A)=\{X\,/\,X\subseteq A\}$, pertanto avremo che $P(A)=\{\varnothing,\{2,[0,2[,b\},[0,2[,\{2\},\{b\},\{[0,2[,2\},\{[0,2[,b\},\{2,b\}\}$.

2. Essendo $f(x)=x$ bisettrice del primo quadrante, interseca una qualsiasi retta $x=x_0$ formando un triangolo rettangolo, pertanto ricordando l'area del triangolo, è sufficiente trovare $\dfrac{x_0^{\ 2}}{2}=6\Leftrightarrow\sqrt{x_0^{\ 2}}=\sqrt{12}\Leftrightarrow x_0=2\sqrt{3}$; quindi la retta cercata è $x=2\sqrt{3}$. Oppure trovando la retta *g*, perpendicolare alla bisettrice del primo quadrante che forma un triangolo rettangolo isoscele, e che interseca le ascisse nel punto x_0; tale che $\dfrac{x_0\dfrac{x_0}{2}}{2}=6\Leftrightarrow x_0^{\ 2}=24\Leftrightarrow x_0=\sqrt{24}$; quindi la retta *g*, passante per il punto $(2\sqrt{6},0)$, ovvero $g(x)=-x+2\sqrt{6}$.

3. Le ipotesi di tale teorema sono: $f:X\to f(X)$ ed *f strettamente monotona*; pertanto si osserva che $f([-1,1[)=[-1,1[$ quindi la *prima ipotesi è soddisfatta*, la funzione è surgettiva; mentre la *seconda no*,

in quanto la funzione *non è* strettamente monotona; anche se ci troviamo di fronte a due parti della funzione, strettamente crescenti, si osserva che $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0> f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, con $-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$.

4. Data la funzione $f(x)=x-1$, la funzione che garantisce un *incremento costante* pari a 1, ha stesso coefficiente angolare e risulta: $h(x)= f(x)+1 \Leftrightarrow h(x)=x-1+1 \Leftrightarrow h(x)=x$.

5. Essendo $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$, ed essendo $f: R \to f(R)$, $f(R)=\left]0,+\infty\right[$, ed f monotona, quindi soddisfatte tutte le ipotesi del teorema sulla convessità, pertanto f è strettamente concava o in modo equivalente $\forall a,b \in R$ e con $a<b$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$; quindi considerando $a=\frac{x}{2}$ e $b=\frac{y}{2}$, risulta $e^{\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}{2}}>\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{y}{2}}}{2} \Leftrightarrow 2e^{\frac{x+y}{4}}>e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow 0>e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{y}{2}}-2e^{\frac{y}{4}}e^{\frac{y}{4}} \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{4}}-e^{\frac{y}{4}}\right)^2<0$, che risulta ovviamente *falso*, pertanto la funzione *f non è strettamente concava*.

6. La funzione: $f(x)=\frac{2x}{x+1}$, è definita $\forall x \in R-\{-1\} \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$, pertanto ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}(2x)\cdot \lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}=-2(-\infty)=+\infty$ ed $\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}(2x)\cdot \lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=-2(+\infty)=-\infty$; pertanto la funzione ha un'*eventuale simmetria* nel punto $(-1,2)$.

7. Una funzione si definisce *regolare* in x_0 se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$, quindi se $x_0=\frac{\pi}{2}$ è un punto di accumulazione per il dominio di *f*; pertanto essendo $f(x)=arcsen\left(tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ definita per $-1\le tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\le 1 \Leftrightarrow arctg(-1)\le x-\frac{\pi}{2}\le arctg(1) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \forall x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$ ed osservando che $\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$; pertanto $x_0=\frac{\pi}{2}$ *è un punto di accumulazione* per il dominio della funzione e di conseguenza la funzione *è regolare* in x_0.

8. Essendo la funzione $f(x)=\sqrt{e^{-x}}$ definita $\forall x \in R$, è possibile calcolare il $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^{-x}}$; e risulta che $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$, quindi $\lim_{y\to 0}\sqrt{y}=0$, pertanto $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^{-x}}=0$. Per la definizione di limite $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tale che $x\in R$ e se $x>\delta$ si ha $\left|\sqrt{e^{-x}}\right|<\varepsilon$; ovvero $\left|\sqrt{e^{-x}}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<\sqrt{e^{-x}}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}<\varepsilon^2 \Leftrightarrow \log\frac{1}{\varepsilon^2}<x$, pertanto con $\varepsilon<1$, ponendo $\delta=\log\frac{1}{\varepsilon^2}$ si è individuato un intorno di $+\infty$ e si è, quindi constatata la correttezza del limite.

Traccia B e D

1. Sia $B=\{0,[0,1[,b\}$, dopo averne *data la definizione*, riportare l'*Insieme delle Parti*, $P(B)$.

2. Data la funzione $f(x)=x$, riportare *la retta* o *la funzione g*, che descrivere con la funzione *f* ed il semiasse positivo delle ascisse, *un triangolo* di *area pari a 4*.

3. Dire se la funzione $f:[-1,1[\to]0,3]$, con $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{se } x\in[-1,0[\\ -x+1 & \text{se } x\in[0,1[\end{cases}$ soddisfa le *ipotesi* del teorema sulla *invertibilità* delle funzioni *strettamente monotone*.

4. Data la funzione $f(x)=x+1$, riportare la funzione che garantisce un *decremento costante unitario*.

5. Data la funzione $f:]0,+\infty[\to f(]0,+\infty[)$, con $f(x)=\log\left(\frac{x}{2}\right)$; servendosi dell'*opportuno teorema*, dire se la funzione è *strettamente convessa*.

6. Dire se la funzione $f(x)=\frac{-x}{x-1}$, ha eventuali *simmetrie*.

7. Dire se la funzione $f(x)=\arccos\left(tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ è *regolare* in $x_0=-\frac{\pi}{2}$.

8. Dato il $\lim\limits_{x\to 0}\log\left(\frac{1}{x}\right)$, *verificare* che si possa calcolare, e *constatare* la correttezza del suo risultato.

Svolgimento - Traccia B e D

1. Essendo $B=\{0,[0,1[,b\}$, l'insieme delle Parti è l'insieme $P(B)=\{X\,/\,X\subseteq B\}$, pertanto avremo che $P(B)=\{\varnothing,\{0,[0,1[,b\},\{0\},[0,1[,\{b\},\{[0,1[,0\},\{[0,1[,b\},\{0,b\}\}$.

2. Essendo $f(x)=x$ bisettrice del primo quadrante, interseca una qualsiasi retta $x=x_0$ formando un triangolo rettangolo, pertanto ricordando l'area del triangolo, è sufficiente trovare $\frac{x_0{}^2}{2}=4\Leftrightarrow\sqrt{x_0{}^2}=\sqrt{8}\Leftrightarrow x_0=2\sqrt{2}$; quindi la retta cercata è $x=2\sqrt{2}$. Oppure trovando la retta *g*, perpendicolare alla bisettrice del primo quadrante che forma un triangolo rettangolo isoscele, e che interseca le ascisse nel punto x_0; tale che $\frac{x_0\frac{x_0}{2}}{2}=4\Leftrightarrow x_0{}^2=16\Leftrightarrow x_0=4$; quindi la retta *g*, passante per il punto $(4,0)$, ovvero $g(x)=-x+4$.

3. Le ipotesi di tale teorema sono: $f:X\to f(X)$ ed *f strettamente monotona*; pertanto si osserva che $f([-1,1[)=]0,3]$ quindi la *prima è soddisfatta*, e che, $\forall\{x_1,x_2\}\in[-1,1[$, con $x_1<x_2$ risulta $f(x_1)>f(x_2)$, pertanto anche la *seconda ipotesi è soddisfatta*.

4. Data la funzione $f(x)=x+1$, la funzione che garantisce un *decremento costante* pari a 1, ha stesso coefficiente angolare e risulta: $h(x)=f(x)-1 \Leftrightarrow h(x)=x+1-1 \Leftrightarrow h(x)=x$.

5. Essendo $f(x)=\log\left(\frac{x}{2}\right)$, ed essendo $f:\left]0,+\infty\right[\to f\left(\left]0,+\infty\right[\right)$, con $f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=R$, ed f monotona, pertanto sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema sulla convessità, pertanto *f* è strettamente convessa o in modo equivalente $\forall a,b\in\left]0,+\infty\right[$ e con $a<b$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$; ovvero considerando $a=\frac{x}{2}$ e $b=\frac{y}{2}$, risulta $\log\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}{2}\right)<\frac{\log\left(\frac{x}{2}\right)+\log\left(\frac{y}{2}\right)}{2}\Leftrightarrow 2\log\left(\frac{x+y}{4}\right)<\log\left(\frac{x}{2}\right)+\log\left(\frac{y}{2}\right)\Leftrightarrow \log\left(\frac{x+y}{4}\right)^2<\log\left(\frac{xy}{4}\right)$, ovvero considerando la funzione composta con la sua inversa, si ha $\left(\frac{x+y}{4}\right)^2<\left(\frac{xy}{4}\right)\Leftrightarrow (x+y)^2<4xy\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2xy\right)<0\Leftrightarrow (x-y)^2<0$ che risulta ovviamente *falso*, pertanto la funzione *f non è strettamente convessa*.

6. La funzione: $f(x)=\frac{-x}{x-1}$, è definita $\forall x\in R-\{1\}\Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$, pertanto ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(-x)\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-1(-\infty)=+\infty$ ed $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=-1(+\infty)=-\infty$; pertanto la funzione ha un'eventuale simmetria nel punto $(1,-1)$.

7. Una funzione si definisce *regolare* in x_0 se $\exists\lim_{x\to x_0}f(x)$, quindi se $x_0=-\frac{\pi}{2}$ è un punto di accumulazione per il dominio di *f*; pertanto essendo $f(x)=\arccos\left(tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ definita per $-1\le tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\le1\Leftrightarrow arctg(-1)\le x+\frac{\pi}{2}\le arctg(1)\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \forall x\in\left[-\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{4}\right]$ ed osservando che $-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{4}\right]$; pertanto $x_0=-\frac{\pi}{2}$ *è un punto di accumulazione* per il dominio della funzione e di conseguenza la funzione *è regolare* in x_0.

8. Essendo la funzione $f(x)=\log\left(\frac{1}{x}\right)$ definita $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$, è possibile calcolare il $\lim_{x\to0}\log\left(\frac{1}{x}\right)$; e risulta che $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, quindi $\lim_{y\to+\infty}\log y=+\infty$, pertanto $\lim_{x\to0}\log\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$. Per la definizione di limite $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ tale che $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\cap\left]-\delta,\delta\right[$ si ha $\log\left(\frac{1}{x}\right)>\varepsilon$ e quindi $\log\left(\frac{1}{x}\right)>\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{x}>e^{\varepsilon}\Leftrightarrow\frac{1}{e^{\varepsilon}}>x$, pertanto ponendo $\delta=\frac{1}{e^{\varepsilon}}$ e tenendo conto che $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$ si ha

$|x| < \frac{1}{e^{\varepsilon}} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{e^{\varepsilon}}, \frac{1}{e^{\varepsilon}} \right]$ si è individuato un intorno di zero, e si è quindi constatata la correttezza del limite.