Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
30 ottobre 2019
(prof. M. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $h : x \in R \to \begin{cases} -3^x & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{9} & \text{se } x = 2 \\ 9/2\,x & \text{se } x > 2 \end{cases}$, dire se esistono dei punti di discontinuità e classificarli.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{arcsen(2^x - 1) - senx}{\log_2(1+x)}$, dire se regolare in $x_0 = 0$ e nel caso, a cosa tende la funzione al tendere di *x* a 0.

3. *Studiare* la funzione $f : X \to f(x) = \sqrt{\log(x-1)}$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g : x \in [0,2] \to \begin{cases} hx^2 - x + 2h & \forall x \in [0,1] \\ 3h - \sqrt{2x-1} & \forall x \in]1,2] \end{cases}$, dire, per quali valori del parametro *h* soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x) = (x^2 - x + 1)e^{\frac{x}{2}}$, calcolare *la primitiva P* tale che $P(0) = 1$; scrivere inoltre l'*equazione della tangente* sulla primitiva *P*, *nel punto* $(1, P(1))$. Inoltre calcolare la distanza della *retta tangente dall'origine*.

Svolgimento traccia A

1. Essendo $h : x \in R \to \begin{cases} -3^x & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{9} & \text{se } x = 2 \\ 9/2\,x & \text{se } x > 2 \end{cases}$, si osserva che $h(2) = 3$, ed $\lim_{x \to 2^-} -3^x = 9$ mentre $\lim_{x \to 2^+} 9/2\,x = 9$ per cui nel punto 2, la funzione ha un punto di discontinuità *eliminabile*.

2. La funzione $f(x) = \dfrac{arcsen(2^x - 1) - senx}{\log_2(1+x)}$, per essere regolare in $x_0 = 0$, tale punto deve essere di accumulazione per il dominio della funzione, pertanto, per la funzione arcoseno, si ha $(2^x - 1) \in [-1,1] \Leftrightarrow 2^x \in [0,2] \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1]$, mentre la funzione seno è definita in *R* e per la funzione logaritmo si ha $1 + x \in]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]-1,+\infty[$, ed inoltre $\log_2(1+x) \neq 0 \Leftrightarrow 1 + x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$; pertanto il dominio della funzione risulta $\forall x \in (]-\infty,1] \cap R \cap]-1,+\infty[- \{0\}) \Leftrightarrow \forall x \in]-1,0[\cup]0,1]$, per cui essendo zero, un punto di accumulazione per il dominio della funzione, questa è regolare nel punto $x_0 = 0$, è risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(2^x-1)-senx}{\log_2(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{arcsen(2^x-1)}{2^x-1}\cdot\frac{(2^x-1)}{x}x-\frac{senx}{x}x}{\frac{\log_2(1+x)}{x}x}=\frac{\log 2-1}{\log_2 e}$$

, quindi la funzione risulta convergente nel punto $x_0=0$.

3. *Data la seguente funzione*: $f:X\to f(x)=\sqrt{\log(x-1)}$.

I. *Dominio*:

Ricordando che la funzione logaritmica in $]0,+\infty[$ ovvero $x-1>0\Leftrightarrow\forall x\in]1,+\infty[$; e che la funzione radice è definita in $[0,+\infty[$, quindi $\log(x-1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$; pertanto l'insieme di definizione di *f* è: $\forall x\in[2,+\infty[$ è:

$$f:x\in[2,+\infty[\to\sqrt{\log(x-1)}$$

II. *Segno della funzione:*

$$f(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{\log(x-1)}>0\Leftrightarrow\forall x\in]2,+\infty[$$
$$f(x)=0\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$$
$$f(x)<0\Leftrightarrow\forall x\in\varnothing$$

il grafico di *f* si trova sempre al di sopra dell'asse delle *x*, ha in comune con gli assi il punto $(2,f(2))=(2,0)$ essendo:

III. *Limiti significativi*:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, in quanto $\lim_{x\to+\infty}\log(x-1)=+\infty$ ed $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

il grafico di *f* non ha asintoti.

IV. *Derivata prima e monotonia:*

Essendo:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\log(x-1)}}\frac{1}{(x-1)}$$

e

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{\log(x-1)}}\frac{1}{(x-1)}>0\Leftrightarrow\forall x\in]2,+\infty[\text{ ed }f'(x)<0\Leftrightarrow\forall x\in\varnothing$$

ed osservando che $\lim_{x\to 2^+}f'(x)=+\infty$ quindi la funzione *f* è strettamente crescente nel suo dominio.

V. *Derivata seconda e concavità:*

Risultando infine:

$$f''(x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{\left((x-1)\sqrt{\log(x-1)}\right)^2}\left(\sqrt{\log(x-1)}+\frac{(x-1)}{2\sqrt{\log(x-1)}}\frac{1}{x-1}\right),\text{ ovvero}$$

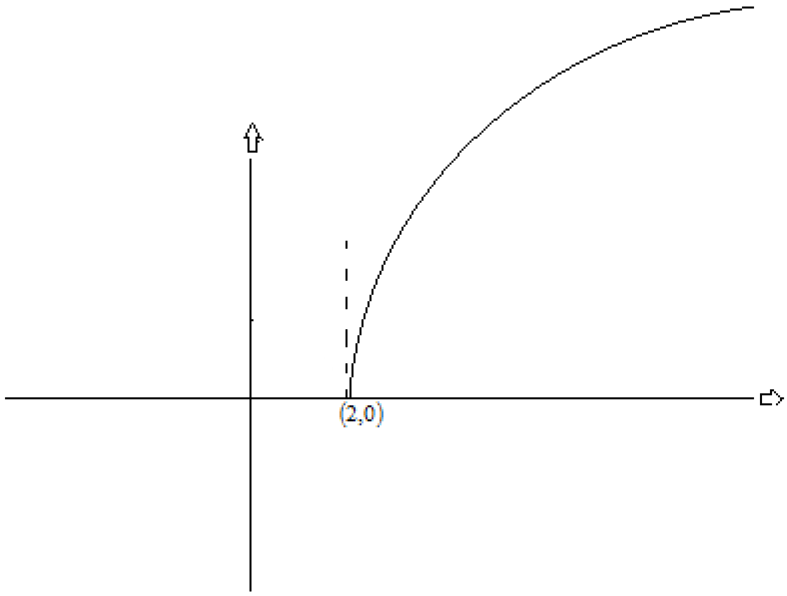
$$f''(x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{\left((x-1)\sqrt{\log(x-1)}\right)^2}\left(\frac{2\log(x-1)+1}{2\sqrt{\log(x-1)}}\right)$$

è:

$$f''(x)>0\Leftrightarrow\forall x\in\varnothing,\ f''(x)<0\Leftrightarrow\forall x\in]2,+\infty[$$

ed osservando che $\lim_{x\to 2^+}f''(x)=-\infty$ pertanto *f* è strettamente concava nel suo dominio.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:
$f([2,+\infty[) = [0,+\infty[$, f è biunivoca, ovvero invertibile, limitata inferiormente e non limitata superiormente e dotata di minimo, zero, nel punto due.

4.Per il Teorema di Rolle la funzione $g : x \in [0,2] \to \begin{cases} hx^2 - x + 2h & \forall x \in [0,1] \\ 3h - \sqrt{2x-1} & \forall x \in]1,2] \end{cases}$, è derivabile in $[0,1] \cup]1,2]$ pertanto soddisfa l'ipotesi di derivabilità in $]0,2[$; inoltre per la continuità essendo $g(1) = 3h - 1$ ed $\lim_{x\to 1^+} 3h - \sqrt{2x-1} = 3h - 1$, la funzione è continua in $[0,2]$; infine per completare le ipotesi del Teorema di Rolle, deve essere $g(0) = g(2) \Leftrightarrow 2h = 3h - \sqrt{3} \Leftrightarrow h = \sqrt{3}$.

5. Essendo la funzione $p(x) = (x^2+1)e^{2x}$, calcoliamo la primitiva procedendo per parti, quindi $\int (x^2+1)e^{2x}dx = (x^2+1)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int 2xe^{2x}dx$ e conseguentemente per questo secondo $\int 2xe^{2x}dx$ procedendo ancora per parti si ha $\int 2xe^{2x}dx = 2\left(\left(\frac{xe^{2x}}{2}\right) - \int \frac{e^{2x}}{2}dx\right) = 2\left(\left(\frac{xe^{2x}}{2}\right) - \frac{e^{2x}}{4}\right)$ quindi, $\int (x^2+1)e^{2x}dx = (x^2+1)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}2\left(\left(\frac{xe^{2x}}{2}\right) - \frac{e^{2x}}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + c$, per cui $P(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^0\left((0)^2 - 0 + \frac{1}{2}\right) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \frac{1}{4}$, quindi la primitiva cercata è $P(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$. Conseguentemente la retta tangente sulla primitiva P nel punto $(1, P(1))$, risulta $y = P'(1)(x-1) + P(1)$, per cui essendo $P'(1) = p(1) = 2e^2$ e $P(1) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}$, si ha che la retta tangente risulta: $y = 2e^2(x-1) + \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = 2e^2x - \frac{7}{4}e^2 + \frac{3}{4}$. In fine la distanza

della retta tangente $t: 2e^2 x - y - \frac{7}{4}e^2 + \frac{3}{4} = 0$ dall'origine, risulta:

$$d(t,(0,0)) = \frac{\left|-\frac{7}{4}e^2 + \frac{3}{4}\right|}{\sqrt{(2e^2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-\frac{7}{4}e^2 + \frac{3}{4}\right|}{\sqrt{4e^4 + 1}} \Leftrightarrow d(t,(0,0)) = \frac{7e^2 - 3}{4\sqrt{4e^4 + 1}}.$$