Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
24 gennaio 2024
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Riportare il *dominio* delle seguenti due funzioni: $f(x) = \log\left(\sqrt{x+1} - x\right)$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x} - 2}$.

2. Dire se la seguente funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{\log x}$ *è regolare* nel punto $x_0 = 1$, e, nel caso, se è *convergente o divergente*.

3. *Tracciare il grafico* della funzione $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 2 + x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, e *riportare:* $f(X)$, $\inf f(x)$, $\sup f(x)$, $\min f(x)$ e $\max f(x)$.

4. Dato il seguente sistema $\begin{cases} -x - y + z = -1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ dire, *se ammette soluzioni* e nel caso, *calcolarle*.

5. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2 + x}$, calcolare l*a sua primitiva F*, *passante* per il punto $(0,1)$.

6. Data la funzione $f(x) = \log_2\left(1 + x^3\right)$, verificare la sua *invertibilità* e se possibile, *riportare* $f^{-1}(-3)$.

7. Studiare gli *asintoti* della seguente funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 1}$, e *riportare* le eventuali equazioni degli stessi.

8. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 2 + x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, dire se è *convessa* ed inoltre se *continua* e *derivabile*.

9. Data la matrice: $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dire se è *singolare*, inoltre riportare il complemento algebrico dell'elemento $a_{2,2}$ ed il minore complementare dell'elemento $a_{1,3}$.

10. Data la funzione $f(x, y) = xe^x - y^2$ *determinare il gradiente* e *classificare* eventuali punti *stazionari*.

Svolgimento traccia A

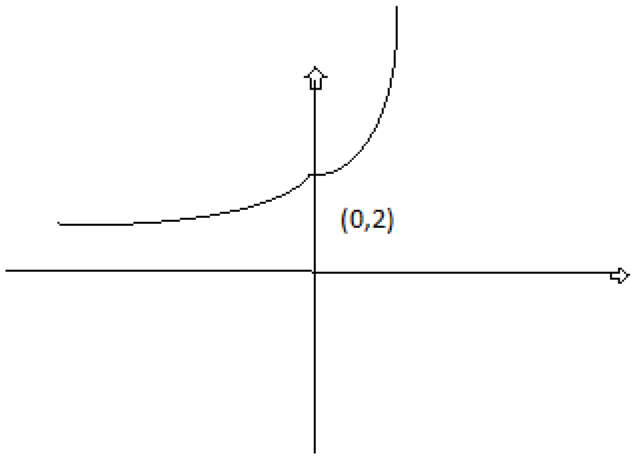
1. Data la funzione: $f(x) = \log\left(\sqrt{x+1} - x\right)$, devono essere soddisfatte entrambe le condizioni di veridicità, della funzione log e radice. Pertanto per la funzione radice $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow \forall x \in [-1,+\infty[$ e per la funzione log si ha $\sqrt{x+1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > x \Leftrightarrow x+1 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ quindi il dominio della funzione risulta l'intersezione delle due condizioni, ovvero $f(x) = \log\left(\sqrt{x+1} - x\right)$, risulta $\forall x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

   Data la funzione $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x} - 2}$., si osserva che al numeratore abbiamo ancora una funzione radice, quindi $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in [-2,+\infty[$, ed al numeratore per la radice $x > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[$ ed infine lo stesso numeratore diverso da zero, quindi $\sqrt{x} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 2 \Leftrightarrow |x| \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 4$. Pe la funzione $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x} - 2}$, risulta $\forall x \in]0,4[\cup]4,+\infty[$.

2. Data la funzione $f(x) = \frac{x^3 - 1}{\log x}$, si osserva che il suo dominio. Il numeratore è definito in tutto *R*, pertanto tenendo solo conto della funzione log al denominatore ed escludendo $\log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, quindi $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ la funzione *è regolare* in $x_0 = 1$ in quanto punto di accumulazione. Inoltre essendo $\lim_{x \to 1} f(x)$ della forma $\frac{0}{0}$, , per il teorema di De l'Hopital si ha $1 + x^3 \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = 3$ quindi la funzione *converge* nel punto $x_0 = 1$.

3. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 2 + x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

   Insieme di definizione:
   tutto *R*
   Il cui grafico è



Conseguentemente

$f(X) =]1, +\infty[$

$\inf f(x) = 1$

$\sup f(x) = +\infty$

$\nexists \min f(x)$

$\nexists \max f(x)$

4. Dato il sistema $\begin{cases} -x - y + z = -1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$, si verifica se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Rouchè-Capelli, pertanto essendo la matrice incompleta risulta $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ per il calcolo del determinane si considera la sottomatrice $|A'| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$ mentre il determinante della matrice completa essendo questa una matrice 2x4 si riduce ad una matrice 2x2 e quindi hanno stessa caratteristica pari a 2, quindi il sistema è indeterminato, ammette infinite soluzioni ovvero sono le soluzioni del seguente sistema $\begin{cases} -x - y = -z - 1 \\ 2x + y = -z + 1 \end{cases}$ e conseguentemente $x = \begin{vmatrix} -z-1 & -1 \\ -z+1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1^{-1}$; $y = \begin{vmatrix} -1 & -z-1 \\ 2 & -z+1 \end{vmatrix} \cdot 1^{-1}$, Ovvero le infinite soluzioni, risultano: $x = -2z$, $y = 3z + 1$, $\forall z \in R$.

5. Calcolare l*a primitiva* della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2 + x}$, *passante* per il punto $(0,1)$, si tratta di risolvere il seguente integrale $\int \dfrac{x^2 + x - 1}{2 + x} dx$, per cui osservando che può essere effettuata la divisione tra i polinomi, si ha $\dfrac{x^2 + x - 1}{2 + x} = x - 1 + \dfrac{1}{x + 2}$, pertanto $\int \dfrac{x^2 + x - 1}{2 + x} dx = \int x dx - \int 1 dx + \int \dfrac{1}{2 + x} dx = \dfrac{1}{2} x^2 - x + \log|2 + x| + c$, per cui $F(0) = 1 \Leftrightarrow \log|2| + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \log 2$, quindi la primitiva cercata risulta $F(x) = \dfrac{1}{2} x^2 - x + \log|2 + x| + 1 - \log 2$.

6. Data la funzione $f(x)=\log_2(1+x^3)$ essendo il dominio della funzione log, si ha $x^3+1>0 \Leftrightarrow x^3>-1 \Leftrightarrow x^3>-1 \Leftrightarrow x>-1 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,+\infty\right[$ quindi $f:\left]-1,+\infty\right[\to f(x)=\log_2(1+x^3) \in R$ pertanto invertibile, in quanto la funzione log è strettamente monotona. Pertanto la sua inversa essendo $y=\log_2(1+x^3)$ risulta $2^y=1+x^3 \Leftrightarrow 2^y-1=x^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2^y-1}$ e conseguentemente $f^{-1}(-3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2^{-3}-1}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$.

7. Si osserva che la funzione data $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}$, è definita in $R-\{-1\}$. Pertanto verifichiamo se ci sono degli asintoti verticali: incominciamo con il vedere che il $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x^2+x-1)\cdot \lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}=-1(-\infty)=+\infty$, e che $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2+x-1)\cdot \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=-1(+\infty)=-\infty$, pertanto la retta $x=-1$ risulta *l'equazione dell'asintoto verticale* sia a sinistra che a destra.
Si procede ora nel verificare se ci sono asintoti orizzontali, pertanto si studia il $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ quindi, considerando che la funzione $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, pertanto

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1\lim_{x\to -\infty} x=-\infty$ e lo stesso dicasi per

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1\lim_{x\to +\infty} x=+\infty$. Quindi non essendoci asintoti orizzontali, potrebbero esserci quelli obliqui, pertanto $\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$ e conseguentemente

$\lim_{x\to -\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right)=0$ così come $\lim_{x\to +\infty} f(x)-ax=0$ pertanto la retta $y=x$ risulta l'equazione dell'asintoto obliquo sia a sinistra che a destra.

8. Si osserva che la seguente funzione $f(x)=\begin{cases} e^x+1 & \text{se } x<0 \\ 2+x^2 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$, in merito alla sua convessità, si osserva dal grafico del quesito 3, che non sempre è possibile applicare la definizione di funzione convessa, ovvero che, $\forall a,b\in R$, $\forall x\in \left]a,b\right[$ risulta $f(x)\leq \frac{f(a)+f(b)}{a-b}(x-b)+f(b)$. Inoltre in merito alla continuità, il problema il punto incriminato potrebbe essere il punto di raccordo, ed essendo $f(0)=2$ ed il $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2+x^2)=2$ ed il $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x+1=2$ quindi la funzione è continua.

Mentre per la sua derivabilità, essendo $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{se } x<0 \\ 2x & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$ si osserva che nel punto di raccordo si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x=0$ ed il $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1$ pertanto il punto di raccordo è un punto *angoloso*, quindi la funzione *non è derivabile*.

9. Data la matrice: $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ il suo determinante risulta $\det(A)=-k\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=-2$, pertanto la matrice *non è singolare*. Il *complemento algebrico* dell'elemento $a_{2,2}$ risulta: $(-1)^{2+2}|A_{2,2}|=\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=k+1$; mentre il *minore complementare* dell'elemento $a_{1,3}$ risulta: $|A_{1,3}|=\begin{pmatrix} k & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=-k$.

10. Data la funzione $f(x,y)=xe^x-y^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$ risulta $\{xe^x+e^x,-2y\}$, per cui gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} e^x(x+1)=0 \\ -2y=0 \end{cases}$ pertanto il punto $(-1,0)$ risulta l'unico punto stazionario. Essendo il determinante Hessiano $H(x,y)=\begin{vmatrix} e^x(x+2) & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ lo stesso nel punto stazionario risulta $H(-1,0)=\begin{vmatrix} e^{-1}(-1+2) & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{e}(-2)$ quindi il punto stazionario trovato *è di sella*.