Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
Provetta - 20 dicembre 2023
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Riportare il *dominio* delle seguenti due funzioni: $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{x^2-1}}$ e $g(x)=\frac{x\cdot 2^{\frac{1}{x}}}{\log(1-x)}$.

2. *Riportare* l'equazione della *retta tangente* al grafico della funzione $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$, nel punto di ascissa $x_0=-1$.

3. *Tracciare il grafico* della funzione $f(x)=\left|2^x-1\right|$, *e riportare:* $f(X)$, $\inf f(x)$, $\sup f(x)$, $\min f(x)$ e $\max f(x)$.

4. Dato il seguente sistema $\begin{cases} -2x-y+2z=1 \\ -x+2y+z=0 \\ x-2y-2z=-1 \end{cases}$ dire, *se ammette soluzioni* e nel caso, *calcolarle*.

5. Data la funzione $f(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2+e^{\frac{x}{2}}}$, calcolare l*a sua primitiva F*, *passante* per il punto $(0,1)$.

6. Data la funzione $f(x)=arctg\frac{1}{x}$, *verificare* se soddisfa le *ipotesi* dei Teoremi di Weierstrass e/o di Bolzano.

7. Studiare gli *asintoti* della seguente funzione $f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$, e *riportare* le eventuali equazioni degli stessi.

8. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x\geq 1 \\ arctg\frac{1}{x-1} & \text{se } x<1 \end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *discontinuità* e *classificarli*.

9. Date le matrici: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, determinare $\left(A^T\cdot B^{-1}\right)$.

10. Data la funzione $f(x,y)=x^2-xy+2x-y^2-3y$ *determinare il gradiente* e *classificare* eventuali punti *stazionari*.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione: $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{x^2-1}}$, considerando che la funzione radice, con *n* pari, è definita in $\forall x \in [0,+\infty[$ è necessario risolvere la seguente disuguaglianza $\frac{2-x}{x^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,2]$. Considerando ora che la retta $2-x$ è definita in *R*, e che il polinomio x^2-1 è definito in $R-\{-1,1\}$, in quanto al denominatore. Pertanto il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{x^2-1}}$, risulta $\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,2]$.

   Data la funzione $g(x)=\frac{x \cdot 2^{\frac{1}{x}}}{\log(1-x)}$., si osserva che il numeratore è definito in $R-\{0\}$, mentre per il denominatore è necessario risolvere disuguaglianza $1-x>0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1[$, ed inoltre escludere $\log(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Pertanto il dominio della funzione $g(x)=\frac{x \cdot 2^{\frac{1}{x}}}{\log(1-x)}$, risulta $\forall x \in]-\infty,0[\cup]0,1[$.

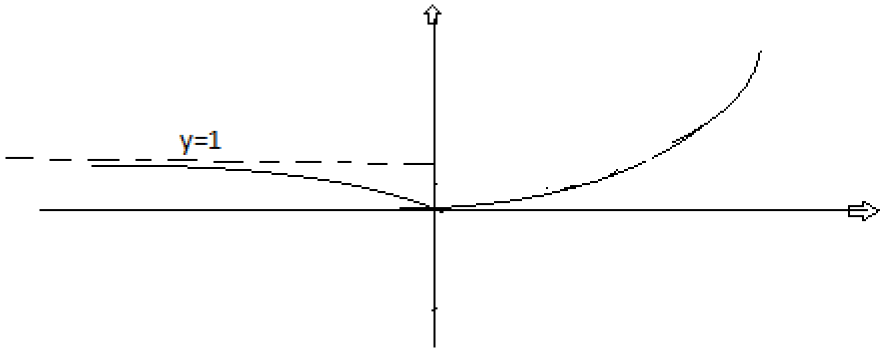
2. Ricordando che l'equazione della tangente al grafico della funzione in un punto x_0 risulta $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, pertanto data la funzione $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ ed essendo $f'(x)=\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}$; l'equazione della tangente al grafico della funzione assegnata nel punto di ascissa $x_0=-1$ è $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

3. Data la funzione $f(x)=|2^x-1|$

   Insieme di definizione:

   Essendo una funzione valore assoluto di una funzione esponenziale meno una costante, il dominio risulta: $X=R$

   Il cui grafico è



   Conseguentemente

   $f(X)=[0,+\infty[$

$\inf f(x) = 0$
$\sup f(x) = +\infty$
$\min f(x) = 0$
$\nexists \max f(x)$

4. Dato il sistema $\begin{cases} -2x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = -1 \end{cases}$, la cui matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ha determinante $|A| = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2(-4+2) + (2-1) + 2(2-2) = 5$ pertanto il sistema è di Cramer, risolvibile con la regola di Cramer. Pertanto $x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \cdot 5^{-1}$; $y = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot 5^{-1}$ e $z = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot 5^{-1}$. Ovvero, $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$ e $z = 1$ l'unica terna, soluzione del sistema dato.

5. Calcolare l*a primitiva* della funzione $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2 + e^{\frac{x}{2}}}$, *passante* per il punto $(0,1)$, si tratta di risolvere il seguente integrale $\int \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2 + e^{\frac{x}{2}}} dx$, per cui osservando che può essere ricondotto alla forma $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx$ in quanto, posto $f(x) = 2 + e^{\frac{x}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$ pertanto $\int \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2 + e^{\frac{x}{2}}} dx = 2\int \dfrac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}{2 + e^{\frac{x}{2}}} dx = 2\log\left|2 + e^{\frac{x}{2}}\right| + c$ e conseguentemente $F(0) = 1 \Leftrightarrow 2\log\left|2 + e^{\frac{0}{2}}\right| + c = 1 \Leftrightarrow 2\log 3 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \log 9$, quindi la primitiva cercata risulta $F(x) = 2\log\left|2 + e^{\frac{x}{2}}\right| + 1 - \log 9$.

6. Si osserva che la funzione data $f(x) = arctg\frac{1}{x}$, è definita in $R - \{0\}$. Pertanto non soddisfa le *ipotesi* dei Teoremi richiesti. In quanto, pur se continua, non è definita in un *insieme chiuso e limitato*, per Weierstrass e non è definita in un *intervallo* per Bolzano.

7. Si osserva che la funzione data $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$, è definita in $R - \{1\}$. Pertanto si verifica se ci sono degli asintoti verticali: incominciamo con il vedere che il $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 - x + 1) \cdot \lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x - 1} = 2 \cdot \lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x - 1} = -\infty$, e che

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x^2 - x + 1)\cdot \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = 2\cdot \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$, pertanto la retta $x = 1$ risulta *l'equazione dell'asintoto verticale* sia a sinistra che a destra. Si procede ora nel verificare se ci sono asintoti orizzontali, pertanto si studia il $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ quindi, considerando che la funzione $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x-1} = \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$, pertanto $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 2\lim_{x\to -\infty} x = -\infty$ e lo stesso dicasi per $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 2\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$. Quindi non essendoci asintoti orizzontali, si procede con il verificare se ci sono asintoti obliqui, ovvero se $\lim_{x\to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, quindi se $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2 - x + 1}{x-1}\cdot\frac{1}{x} = a \in R - \{0\}$ ed essendo per lo stesso ragionamento visto sopra $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2 - x + 1}{x-1}\cdot\frac{1}{x} = 2$, calcoliamo ora la *b*, data dal $\lim_{x\to +\infty} f(x) - ax = b$, quindi $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2 - x + 1}{x-1} - 2x = \lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2 - x + 1 - 2x^2 + 2x}{x-1} = 1$ e per lo stesso ragionamento, medesimo risultato si ottiene per $\lim_{x\to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$. quindi l'equazione $y = 2x + 1$ è la retta, asintoto obliquo sia a sinistra che a destra.

8. Si osserva che la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x \ge 1 \\ arctg\frac{1}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$, potrebbe avere una discontinuità nel punto $x = 1$, pertanto si osserva che $f(1) = e^{1-1} = 1$, che $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{x-1} = 1$ e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} arctg\frac{1}{x-1} = -\frac{\pi}{2}$, pertanto il punto $x = 1$ per la funzione data, è un punto discontinuità di *prima specie*.

9. Date le matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, per determinare $(A^T \cdot B^{-1})$, si procede con il calcolare la trasposta della matrice A, quindi $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e ricordando che $B^{-1} = \frac{agg(B)}{|B|} = \frac{C^T}{|B|}$, per cui osservando che $|B| = 0$, non è possibile calcolare B^{-1} né tantomeno procedere con $(A^T \cdot B^{-1})$.

10. Data la funzione $f(x,y) = x^2 - xy + 2x - y^2 - 3y$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = \{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$ risulta $\{2x - y + 2, -2y - x - 3\}$, per cui gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni

del sistema $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ di Cramer in quanto $|A| = 5$, e pertanto $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ risulta l'unico punto stazionario. Essendo quindi il determinante Hessiano $H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5$ il punto stazionario trovato *è di sella*.

Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
Provetta - 20 dicembre 2023
(prof. Bisceglia)

Traccia B

1. Riportare il *dominio* delle seguenti due funzioni: $f(x)=\dfrac{x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}{\log(x-1)}$ e $g(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{x^{2}-1}}$.

2. *Riportare* l'equazione della *retta tangente* al grafico della funzione $f(x)=\dfrac{e^{x}}{1-x}$, nel punto di ascissa $x_0=0$.

3. *Tracciare il grafico* della funzione $f(x)=\left|e^{x}-1\right|$, *e riportare:* $f(X)$, $\inf f(x)$, $\sup f(x)$, $\min f(x)$ e $\max f(x)$.

4. Dato il seguente sistema $\begin{cases} -x-y+2z=1 \\ -x+y+z=0 \\ x-2y-z=-1 \end{cases}$ dire, *se ammette soluzioni* e nel caso, *calcolarle*.

5. Data la funzione $f(x)=\dfrac{2^{x}}{1-2^{x}}$, calcolare l*a sua primitiva F*, *passante* per il punto $(0,1)$.

6. Data la funzione $f(x)=arc\cot g\,\dfrac{1}{x}$, *verificare* se soddisfa le *ipotesi* dei Teoremi di Weierstrass e/o di Bolzano.

7. Studiare gli *asintoti* della seguente funzione $f(x)=\dfrac{3x^{2}+2x-1}{x+2}$, e *riportare* le eventuali equazioni degli stessi.

8. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x\geq 0 \\ \dfrac{1}{\log(1-x)} & \text{se } x<0 \end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *discontinuità* e *classificarli*.

9. Date le matrici: $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, determinare $\left(A^{-1}\cdot B^{T}\right)$.

10. Data la funzione $f(x,y)=-2x^{2}-xy+2x+y^{2}+4y$ *determinare il gradiente* e *classificare* eventuali punti *stazionari*.

Svolgimento traccia B

1. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log(x-1)}$, si osserva che il numeratore è definito in R, mentre per il denominatore è necessario risolvere disuguaglianza $x-1>0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]1,+\infty\right[$, per soddisfare la funzione log ed inoltre porre $\log(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ escludere Pertanto il dominio della funzione $f(x)=\dfrac{x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log(x-1)}$, risulta $\forall x\in\left]1,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$.

   Data la funzione: $g(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{x^2-1}}$, considerando che la funzione radice, con *n* pari, è definita in $\forall x\in\left[0,+\infty\right[$ è necessario risolvere la seguente disuguaglianza $\dfrac{2+x}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left[-2,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$. Considerando ora che la retta $2+x$ è definita in *R*, e che il polinomio x^2-1 è definito in $R-\{-1,1\}$, in quanto al denominatore. Pertanto il dominio della funzione $g(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{x^2-1}}$, risulta $\forall x\in\left[-2,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

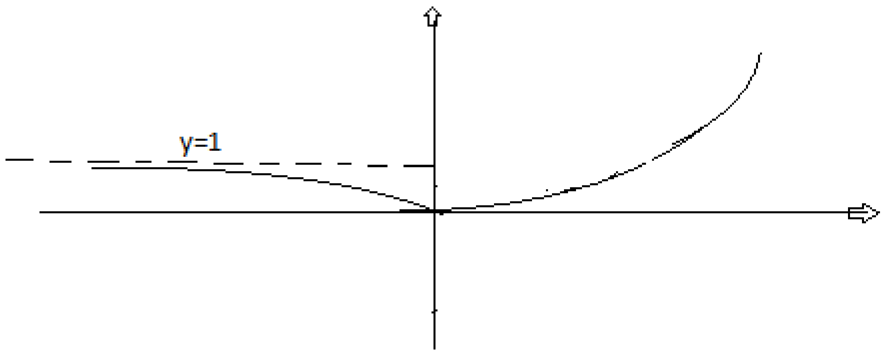
2. Ricordando che l'equazione della tangente al grafico della funzione in un punto x_0 risulta $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, pertanto data la funzione $f(x)=\dfrac{e^x}{1-x}$ ed essendo $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)-e^x(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$; l'equazione della tangente al grafico della funzione assegnata nel punto di ascissa $x_0=0$ è $y=2x+1$.

3. Data la funzione $f(x)=\left|e^x-1\right|$

   Insieme di definizione:

   Essendo una funzione valore assoluto di una funzione esponenziale meno una costante, il dominio risulta: $X=R$

   Il cui grafico è



   Conseguentemente

   $f(X)=\left[0,+\infty\right[$

   $\inf f(x)=0$

   $\sup f(x)=+\infty$

$\min f(x)=0$
$\nexists \max f(x)$

4. Dato il sistema $\begin{cases} -x-y+2z=1 \\ -x+y+z=0 \\ x-2y-z=-1 \end{cases}$, la cui matrice incompleta $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante $|A|=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-(-1+2)+(1-1)+2(2-1)=1$ pertanto il sistema è di Cramer, risolvibile con la regola di Cramer. Pertanto $x=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}\cdot 1^{-1}$; $y=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}\cdot 1^{-1}$ e $z=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}\cdot 1^{-1}$. Ovvero, $x=4$, $y=1$ e $z=3$ l'unica terna, soluzione del sistema dato.

5. Calcolare l*a primitiva* della funzione $f(x)=\frac{2^x}{1-2^x}$, *passante* per il punto $(0,1)$, si tratta di risolvere il seguente integrale $\int \frac{2^x}{1-2^x}dx$, per cui osservando che può essere ricondotto alla forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ in quanto, posto $f(x)=1-2^x$, $f'(x)=-2^x \log 2$ pertanto $\int \frac{2^x}{1-2^x}dx=-\frac{1}{\log 2}\int \frac{-\log 2\cdot 2^x}{1-2^x}dx=-\frac{1}{\log 2}\log\left|1-2^x\right|+c$,. Si osserva che sia la funzione $f(x)$ sia la sua primitiva, non sono definite nel punto 0, pertanto *non esiste* la primitiva richiesta.

6. Si osserva che la funzione data $f(x)=arc\cot g\,\frac{1}{x}$, è definita in $R-\{0\}$. Pertanto non soddisfa le *ipotesi* dei Teoremi richiesti. In quanto, pur se continua, non è definita in un *insieme chiuso e limitato*, per Weierstrass e non è definita in un *intervallo* per Bolzano.

7. Si osserva che la funzione data $f(x)=\frac{3x^2+2x-1}{x+2}$, è definita in $R-\{-2\}$. Pertanto si verifica se ci sono degli asintoti verticali: incominciamo con il vedere che il $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(3x^2+2x-1)\cdot\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2}=7\cdot\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2}=-\infty$, e che $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(3x^2+2x-1)\cdot\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2}=7\cdot\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2}=+\infty$, pertanto la retta $x=-2$ risulta *l'equazione dell'asintoto verticale* sia a sinistra che a destra. Si procede ora nel verificare se ci sono asintoti orizzontali, pertanto si studia il $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ quindi, considerando che la funzione $f(x)=\frac{3x^2+2x-1}{x+2}=\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$, pertanto

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = 3\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ e lo stesso dicasi per $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = 3\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Quindi non essendoci asintoti orizzontali, si procede con il verificare se ci sono asintoti obliqui, ovvero se $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$, quindi se $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x} = a \in R-\{0\}$ ed essendo per lo stesso ragionamento visto sopra $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x} = 3$, calcoliamo ora la *b*, data dal $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax = b$, quindi $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x+2} - 3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1-3x^2-6x}{x-1} = -4$ e per lo stesso ragionamento, medesimo risultato si ottiene per $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$. quindi l'equazione $y=3x-4$ è la retta, asintoto obliquo sia a sinistra che a destra.

8. Si osserva che la seguente funzione $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x\ge 0 \\ \frac{1}{\log(1-x)} & \text{se } x<0 \end{cases}$, potrebbe avere una discontinuità nel punto $x=0$, pertanto si osserva che $f(0)=e^{0-1}=\frac{1}{e}$, che $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{x-1} = \frac{1}{e}$ e che $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{\log(1-x)} = +\infty$, pertanto il punto $x=0$ per la funzione data, è un punto discontinuità di *seconda specie*.

9. Date le matrici: $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, determinare $\left(A^{-1}\cdot B^T\right)$, si procede con il calcolare la trasposta della matrice *B*, quindi $B^T=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e ricordando che $A^{-1}=\frac{agg(A)}{|A|}=\frac{C^T}{|A|}$, per cui osservando che $|A|=-4$, e che $Agg(A)=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, risulta $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ per cui $\left(A^{-1}\cdot B^T\right)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

10. Data la funzione $f(x,y)=-2x^2-xy+2x+y^2+4y$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$ risulta $\{-4x-y+2, 2y-x+4\}$, per cui gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} -4x-y=-2 \\ -x+2y=-4 \end{cases}$ di Cramer in quanto

$|A| = -9$, e pertanto $\left(\frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right)$ risulta l'unico punto stazionario. Essendo quindi il determinante Hessiano $H(x, y) = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -9$ il punto stazionario trovato *è di sella*.