Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
10 gennaio 2024
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Riportare il *dominio* delle seguenti due funzioni: $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$ e $g(x)=\frac{\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log(x)-1}$.

2. *Riportare* l'equazione della *retta tangente* al grafico della funzione $f(x)=\frac{x}{1-x}$, nel punto di ascissa $x_0=0$.

3. *Tracciare il grafico* della funzione $f(x)=|\log(x)-1|$, *e riportare:* $f(X)$, $\inf f(x)$, $\sup f(x)$, $\min f(x)$ e $\max f(x)$.

4. Dato il seguente sistema $\begin{cases}-x-y+z=-1\\-2x+y+z=0\\x-2y-z=1\end{cases}$ dire, *se ammette soluzioni* e nel caso, *calcolarle*.

5. Data la funzione $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$, calcolare l*a sua primitiva F, passante* per il punto $(0,1)$.

6. Data la funzione $f(x)=kx^2-2x$, definita in $X=[1,2]$ *verificare* se soddisfa le *ipotesi* del Teorema di Rolle.

7. Studiare gli *asintoti* della seguente funzione $f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x^2-1}$, e *riportare* le eventuali equazioni degli stessi.

8. Data la funzione $f(x)=\begin{cases}senx & \text{se } x\geq 0\\ arctg\frac{1}{x} & \text{se } x<0\end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *non derivabilità* e *classificarli*.

9. Date le matrici: $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}$, determinare $\left(A^T\cdot B^{-1}\right)^T$.

10. Data la funzione $f(x,y)=-x^2-xy+2y+y^2-3x$ *determinare il gradiente* e *classificare* eventuali punti *stazionari*.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione: $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$, considerando che la funzione radice, con n dispari, è definita in R è necessario considerare il dominio della funzione $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$ e considerando che al denominatore la funzione $e^{\frac{1}{x}}$ è definita in $R-\{0\}$, si conviene che il dominio della funzione $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$, risulta $\forall x \in R-\{0\}$.

Data la funzione $g(x)=\frac{\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log(x)-1}$., si osserva che il numeratore è definito in R, mentre avendo al denominatore il *log* risulta definito $x>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]0,+\infty\right[$, ed inoltre deve essere $\log(x)-1\neq 0 \Leftrightarrow \log(x)\neq 1 \Leftrightarrow x\neq e$ pertanto il dominio della funzione $g(x)=\frac{\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log(x)-1}$, risulta $\forall x\in \left]0,e\right[\cup\left]e,+\infty\right[$.

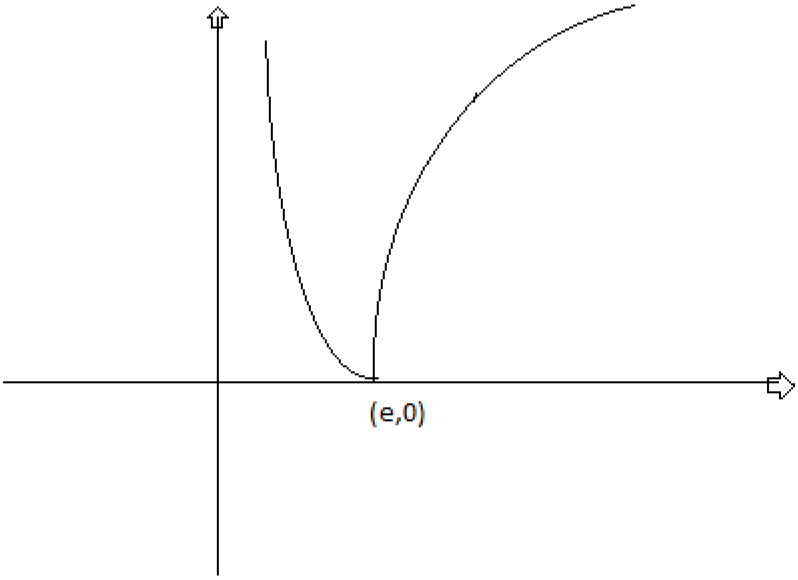
2. Ricordando che l'equazione della tangente al grafico della funzione in un punto x_0 risulta $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, pertanto data la funzione $f(x)=\frac{x}{1-x}$ ed essendo $f'(x)=\frac{1(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$; l'equazione della tangente al grafico della funzione assegnata nel punto di ascissa $x_0=0$ è $y=x$.

3. Data la funzione $f(x)=|\log(x)-1|$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione valore assoluto di una funzione log meno una costante, il dominio coincide con quello della funzione log, quindi : $X=\left]0,+\infty\right[$

Il cui grafico è



Conseguentemente

$f(X)=[0,+\infty[$

$\inf f(x)=0$

$\sup f(x)=+\infty$

$\min f(x)=0$

$\nexists \max f(x)$

4. Dato il sistema $\begin{cases} -x-y+z=-1 \\ -2x+y+z=0 \\ x-2y-z=1 \end{cases}$, la cui matrice incompleta $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante $|A|=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-(-1+2)+(2-1)+(4-1)=3$ pertanto il sistema è di Cramer, risolvibile con la regola di Cramer. Pertanto $x=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}\cdot 3^{-1}$; $y=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot 3^{-1}$ e $z=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\cdot 3^{-1}$. Ovvero, $x=-1$, $y=0$ e $z=-2$ l'unica terna, soluzione del sistema dato.

5. Calcolare l*a primitiva* della funzione $f(x)=\dfrac{1}{2+x^2}$, *passante* per il punto $(0,1)$, si tratta di risolvere il seguente integrale $\int \dfrac{1}{2+x^2}dx$, per cui osservando che può essere ricondotto alla forma $\dfrac{1}{1+x^2}$ la cui primitiva è la funzione $arctg(x)+c$, si ha $\dfrac{1}{2+x^2}=2\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$ che si presenta sotto la forma alla

forma $2\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$ per cui moltiplicando e dividendo per alla forma $f'(x)$ si ha

$2\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{2}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$ e quindi il nostro integrale risulta

$2\sqrt{2}\int\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx=2\sqrt{2}arctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$, e conseguentemente

$F(0)=1\Leftrightarrow 2\sqrt{2}arctg\left(\dfrac{0}{\sqrt{2}}\right)+c=1\Leftrightarrow c=1$, quindi la primitiva cercata risulta

$F(x)=2\sqrt{2}arctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+1$.

6. Si osserva che la funzione data $f(x)=kx^2-2x$, definita in $X=[1,2]$, affinché soddisfi le *ipotesi* del Teorema di Rolle, essendo continua in $[1,2]$ e derivabile in $]1,2[$ deve soddisfare anche l'ipotesi $f(1)=f(2)\Leftrightarrow k1^2-2\cdot 1=k2^2-2\cdot 2\Leftrightarrow k-2=k2^2-4\Leftrightarrow 3k-2=0\Leftrightarrow k=\dfrac{2}{3}$.

7. Si osserva che la funzione data $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-1}$, è definita in $R-\{1,-1\}$. Pertanto verifichiamo se ci sono degli asintoti verticali: incominciamo con il vedere che il $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x^2-x+1)\cdot\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=2(-\infty)=-\infty$, e che $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x^2-x+1)\cdot\lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=2(+\infty)=+\infty$, pertanto la retta $x=1$ risulta *l'equazione dell'asintoto verticale* sia a sinistra che a destra.

Lo stesso ragionamento vale $\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(2x^2-x+1)\cdot\lim_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=4(+\infty)=+\infty$, e che $\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}(2x^2-x+1)\cdot\lim_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=4(-\infty)=-\infty$, pertanto la retta $x=-1$ risulta *l'equazione dell'asintoto verticale* sia a sinistra che a destra. Si procede ora nel verificare se ci sono asintoti orizzontali, pertanto si studia il $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ quindi, considerando che la funzione $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-1}=\dfrac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$, pertanto $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=2$ e lo stesso dicasi per $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=2$. Quindi la retta $y=2$ è la retta, risulta l'equazione dell'asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.

8. Si osserva che la seguente funzione $f(x)=\begin{cases} senx & \text{se } x \geq 0 \\ arctg\dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$, essendo composta da due funzioni elementari è derivabile nelle rispettive parti del dominio, potrebbe avere un punto di non derivabilità nel punto di raccordo, pertanto si osserva che essendo $f'(x)=\begin{cases} \cos x & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{-1}{x^2+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e considerando la stessa nel punto $x=0$, si che $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$ mentre il $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-1$, pertanto il punto $x=0$ per la funzione data, è un punto *angoloso*.

9. Date le matrici: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, per determinare $\left(A^T \cdot B^{-1}\right)^T$, si procede con il calcolare la trasposta della matrice A, che risulta $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e ricordando che $B^{-1}=\dfrac{agg(B)}{|B|}=\dfrac{C^T}{|B|}$, per cui essendo che $|B|=4$, e che $Agg(B)=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, risulta $B^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ per cui $A^T \cdot B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ quindi $\left(A^T \cdot B^{-1}\right)^T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

10. Data la funzione $f(x,y)=-x^2-xy+2y+y^2-3x$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\left\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right\}$ risulta $\{-2x-y-3, 2y-x+2\}$, per cui gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ -x+2y=-2 \end{cases}$ di Cramer in quanto $|A|=5$, e pertanto $\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{7}{5}\right)$ risulta l'unico punto stazionario. Essendo quindi il determinante Hessiano $H(x,y)=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-5$ il punto stazionario trovato *è di sella*.