Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
08 gennaio 2020
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\in \leq 10^{-1}$, dell'equazione $\frac{1}{e^{arctg(2x-1)}} = 0$, nell'intervallo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x \to +\infty} arcsen\left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} arctg(2x) & \text{se } x \leq 0 \\ arc\cot g(3x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$, verificare la *derivabilità* nel suo dominio.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{1}{1+4x^2}$, calcolare la primitiva P_0, nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

6. Data la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ed il vettore $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, studiare il sistema $A\alpha = b$ nella variabile presente.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{e^{arctg(2x-1)}}$, pur continua nel suo insieme di definizione, ma trattandosi del rapporto con una funzione esponenziale al denominatore risulterà $f\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot f\left(\frac{5}{3}\right) > 0$, pertanto l'equazione $\frac{1}{e^{arctg(2x-1)}} = 0$ non ammette soluzioni nell'intervallo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right]$, in quanto non ricorrono tutte le ipotesi del Teorema degli Zeri, pertanto $\nexists x_0 \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right[\;/\; f(x_0) = 0$.

2. Essendo $\lim_{x \to +\infty} arcsen\left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcoseno è definita $\forall x \in [-1,1] \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right) \in [-1,1] \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} - 1 \leq 1 \\ 3^{\frac{1}{x}} - 1 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} \leq 2 \\ 3^{\frac{1}{x}} \geq 0 \end{cases}$, ovvero

$$\begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} \le 2 = 3^{\log_3 2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le \log_3 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 2} \le x \\ 3^{\frac{1}{x}} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in R - \{0\} \end{cases}$$, quindi il dominio risulta $\forall x \in \left[\frac{1}{\log_3 2}, +\infty \right[$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio non è limitato superiormente, e risulta che il $\lim_{x \to +\infty} arcsen\left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 0$, in quanto essendo appunto il limite di una funzione composta in cui il $\lim_{x \to +\infty}\left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 0$ e conseguentemente $\lim_{x \to 0} arcseny = 0$.

3. Data la funzione $x \to f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione esponenziale composta, è definita per $x \ne 0$,
pertanto $X = R - \{0\} = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$, ovvero

$$f : \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\to f(x) = e^{\frac{1}{x}} \in R$$

Segno della funzione:

Essendo appunto una funzione esponenziale
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

Conseguentemente $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo inferiore e superiore.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}}$ per cui essendo $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ si ha $\lim_{y \to 0} e^y = 1$ pertanto $\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

essendo $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ si ha $\lim_{y \to -\infty} e^y = 0$ pertanto $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

essendo $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ si ha $\lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$ pertanto $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

Pertanto la retta $x = 0$ è un asintoto verticale a destra, mentre le retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale a sinistra ed a destra.

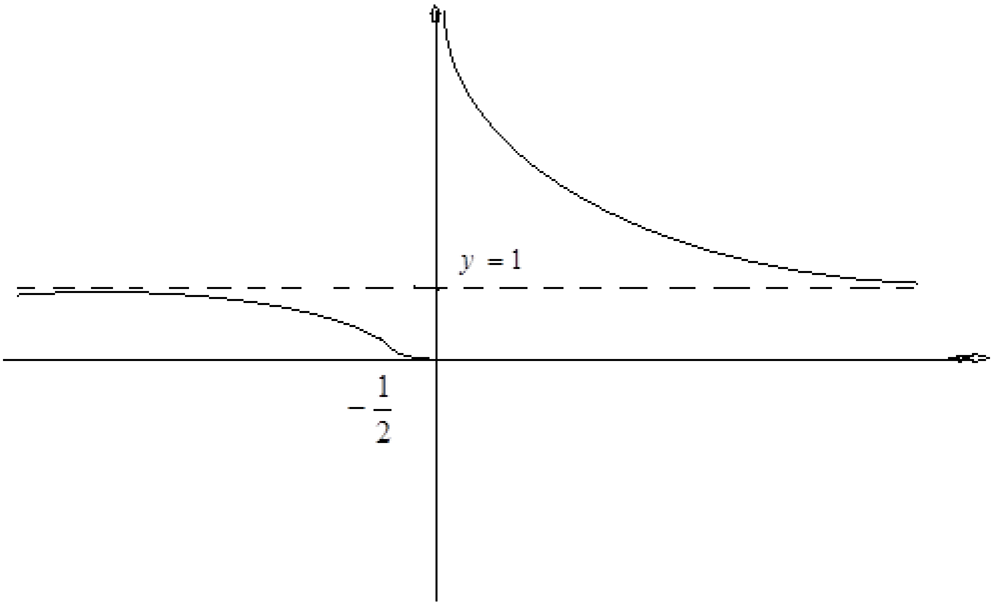
Derivata prima e monotonia:

$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$., quindi

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \emptyset$, conseguentemente la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x) = -\frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{-1}{x^2} - 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}$, pertanto essendo il denominatore e la funzione esponenziale sempre positivi, per studiare $f''(x) > 0$ è sufficiente studiare $1 + 2x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, quindi $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa in $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$ mentre è strettamente concava in $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ con punto di flesso proprio in $-\frac{1}{2}$.



e quindi dedurre che:
$f\left(\left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\right) = \left]0, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$, quindi è limitata inferiormente, ma non dotata di minimo, inoltre *f* è biunivoca su $\left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

4. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} arctg(2x) & \text{se } x \leq 0 \\ arc\cot g(3x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$, definita $\forall x \in R$, verifichiamo quindi la derivabilità della funzione nel punto di raccordo $x = 0$, per cui deve $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$, ed essendo $\lim_{x \to 0^-} \frac{arctg 2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{1 + 4x^2} = 2$ ed

$\lim_{x\to 0^+} \frac{arc\cot g 3x - \frac{\pi}{2}}{x-0} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{1+9x^2} = -3$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=0$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data.

5. Si tratta di risolvere il seguente integrale definito $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2} dx$, ed essendo una primitiva di $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} arctg 2x + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2} dx = \left[\frac{1}{2} arctg 2x + c\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = arctg 1 - arctg(-1) = \frac{\pi}{4}$ in quanto la funzione arcotangente è dispari ed $arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

6. Si tratta di trovare delle soluzioni al sistema $A\alpha = b$; per cui si osserva la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $3x2$ per cui che il suo determinante è $\det(A') = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$ mentre il determinante $\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2k$; quindi per $k \neq -1$ $Car(A) = 2 \neq Car(B) = 3$, pertanto il sistema è incompatibile; mentre $k = -1$, $Car(A) = Car(B) = 2 = n$ il numero delle incognite, pertanto il sistema diventa di Cramer, compatibile ed ammette una sola soluzione ovvero $\begin{cases} y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} = \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Traccia B

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\in \leq 9^{-1}$, dell'equazione $\frac{1}{e^{arc\cot g(3x+1)}} = 0$, nell'intervallo $\left[-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} arc\cot g(x) & \text{se } x \leq 0 \\ arctg(-x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$, verificare la *derivabilità* nel suo dominio.

5. Data la funzione $p(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-4x^2}}$, calcolare la primitiva P_0, nell'intervallo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

6. Data la matrice incompleta $A=\begin{pmatrix}-1 & k\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ed il vettore $b=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, studiare il sistema $A\alpha=b$ nella variabile presente.

Svolgimento traccia B

1. Data la funzione $f(x)=\frac{1}{e^{arc\cot g(3x+1)}}$, pur continua nel suo insieme di definizione, ma trattandosi del rapporto con una funzione esponenziale al denominatore risulterà $f\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot f\left(\frac{5}{3}\right)>0$, pertanto l'equazione $\frac{1}{e^{arc\cot g(3x+1)}}=0$ non ammette soluzioni nell'intervallo $\left[-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]$, in quanto non ricorrono tutte le ipotesi del Teorema degli Zeri, pertanto $\nexists x_0\in\left]-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right[\ /\ f(x_0)=0$.

2. Essendo $\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcoseno è definita $\forall x\in[-1,1]\Leftrightarrow\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\in[-1,1]\Leftrightarrow\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}-1\le 1\\ 2^{\frac{1}{x}}-1\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}\le 2\\ 2^{\frac{1}{x}}\ge 0\end{cases}$, ovvero $\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}\le 2\Leftrightarrow \frac{1}{x}\le 1\Leftrightarrow 1\le x\\ 2^{\frac{1}{x}}\ge 0\Leftrightarrow \forall x\in R-\{0\}\end{cases}$, quindi il dominio risulta $\forall x\in[1,+\infty[$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio non è limitato superiormente, e risulta che il $\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)=0$, in quanto essendo appunto il limite di una funzione composta in cui il $\lim_{x\to+\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)=0$ e conseguentemente $\lim_{x\to 0} arcseny=0$.

3. Data la funzione $x\to f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

   Insieme di definizione:

   Essendo una funzione esponenziale composta, è definita per $x\neq 0$,
   pertanto $X=R-\{0\}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

   Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$, ovvero

$$f : \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[\to f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \in R$$

Segno della funzione:
Essendo appunto una funzione esponenziale
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[$

Conseguentemente $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo inferiore e superiore.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}}$ per cui essendo $-\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ si ha $\lim\limits_{y \to 0} e^y = 1$ pertanto $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

essendo $-\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty$ si ha $\lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty$ pertanto $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

essendo $-\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$ si ha $\lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$ pertanto $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0$

Pertanto la retta $x = 0$ è un asintoto verticale a sinistra, mentre le retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale a sinistra ed a destra.

Derivata prima e monotonia:

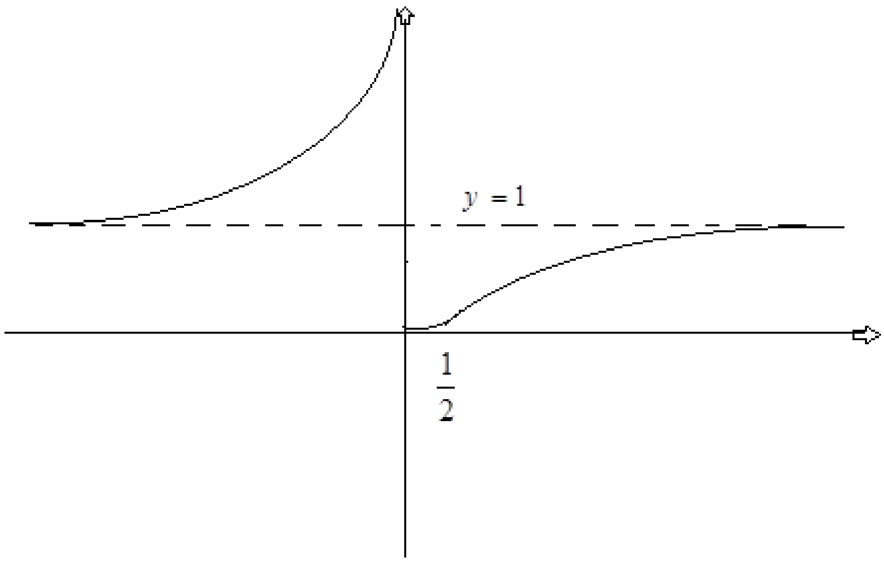
$f'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$., quindi

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[$, conseguentemente la funzione è strettamente crescente nel suo dominio.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x) = \dfrac{x^2 e^{-\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^2} - 2xe^{-\frac{1}{x}}}{x^4} = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$, pertanto essendo il denominatore e la funzione esponenziale sempre positivi, per studiare $f''(x) > 0$ è sufficiente studiare $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, quindi $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,\frac{1}{2}\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa in

$\forall x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[$ mentre è strettamente concava in $\forall x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ con punto di flesso proprio in $\frac{1}{2}$.



e quindi dedurre che:
$f\left(\left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[\right) = \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$, quindi è limitata inferiormente, ma non dotata di minimo, inoltre *f* è biunivoca su $\left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[$.

4. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} arc\cot g(x) & \text{se } x \le 0 \\ arctg(-x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$, definita $\forall x \in R$, verifichiamo quindi la derivabilità della funzione nel punto di raccordo $x = 0$, per cui deve $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$, ed essendo $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{arc\cot gx - \frac{\pi}{2}}{x - 0} = -\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + x^2} = -1$ ed $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{arctg(-x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{1 + x^2} = -1$, pertanto la funzione *è derivabile anche* in $x = 0$.

5. Si tratta di risolvere il seguente integrale definito $-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$, ed essendo una primitiva di $-\int \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx = \frac{1}{2} \arccos 2x + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx = \left[\frac{1}{2} \arccos 2x + c\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \arccos 1 - \frac{1}{2} \arccos 0 = -\frac{\pi}{4}$.

6. Si tratta di trovare delle soluzioni al sistema $A\alpha = b$; per cui si osserva la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $3x2$ per cui che il suo determinante è $\det(A') = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$ mentre il determinante

$$\det(B)=\begin{vmatrix}-1 & k & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}k & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1;$$ quindi per $\forall k \in R\ \ Car(A)=2 \neq Car(B)=3$,

pertanto il sistema è incompatibile.