Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
07 febbraio 2024
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Riportare il *dominio* delle seguenti due funzioni: $f(x)=e^{\frac{x^2-1}{x}}$ e $g(x)=e^{\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}}$.

2. Dire se la seguente funzione $f(x)=x^3-1$ *è regolare* nel punto $x_0=0$, e, nel caso, *verificare* il suo risultato.

3. Dopo aver *tracciato il grafico* della funzione $f(x)=\begin{cases}\log(1-x) & \text{se } x<0\\ 1-x^2 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$, *riportare:* $f(X)$, $\inf f(x)$, $\sup f(x)$, $\min f(x)$ e $\max f(x)$.

4. Dato il seguente sistema $\begin{cases}x-2y+z=1\\ 2x-y-z=-1\end{cases}$ dire, *se ammette soluzioni* e nel caso, *calcolarle*.

5. Data la funzione $f(x)=\dfrac{x-1}{1+x^2}$, calcolare l*a sua primitiva F*, *passante* per il punto $(0,1)$.

6. Data la funzione $f(x)=\left|1+x^3\right|$, verificare la sua *derivabilità*.

7. Studiare gli *asintoti* della seguente funzione $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{1-x}$, e *riportare* le eventuali equazioni degli stessi.

8. Data la funzione $f(x)=\begin{cases}e^x+1 & \text{se } x\geq 0\\ \log(1-x) & \text{se } x<0\end{cases}$, dire se è *continua* e, nel caso non lo fosse *classificare la discontinuità*.

9. Date le matrici: $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, determinare $\left(A^T\cdot B^T\right)^{-1}$.

10. Data la funzione $f(x,y)=x\log x-2y^2$ *determinare il gradiente* e *classificare* eventuali punti *stazionari*.

Svolgimento traccia A

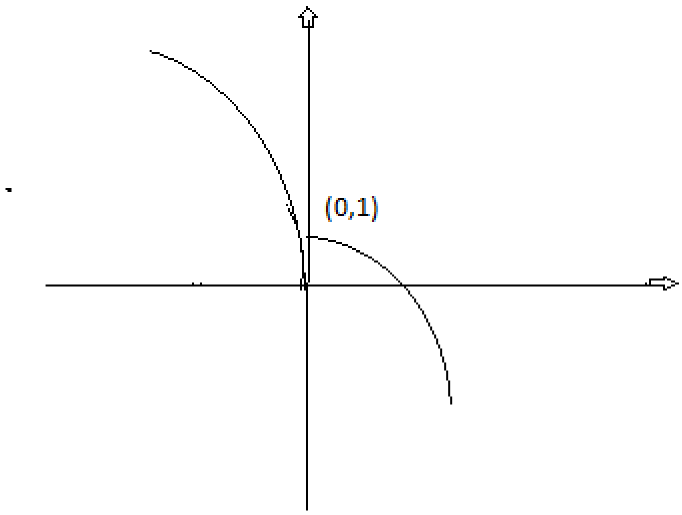
1. Data la funzione: $f(x)=e^{\frac{x^2-1}{x}}$, considerando che la funzione exp è definita in *R* e che la funzione razionale dell'esponente è definita in $R-\{0\}$ il dominio della funzione assegnata, risulta definita $\forall x \in \left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

   Data la funzione $g(x)=e^{\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}}$, considerando ancora che la funzione exp è definita in *R*, ci soffermiamo quindi sulla funzione razionale dell'esponente. Pertanto si osserva che al numeratore abbiamo una funzione radice, quindi $x-2\geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left[2,+\infty\right[$, ed al numeratore $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$. Pertanto la funzione assegnata risulta definita $\forall x \in \left[2,+\infty\right[$.

2. Data la funzione $f(x)=x^3-1$, si osserva che è definita in tutto *R*, pertanto la funzione *è regolare* in $x_0=0$ essendo un punto di accumulazione. Risulta quindi $\lim_{x\to 0} x^3-1=-1$. Per la verifica tenendo conto della definizione di limite si ha $\left|x^3-1-(-1)\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|x^3\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x^3<\varepsilon \Leftrightarrow -\sqrt[3]{\varepsilon}<x<\sqrt[3]{\varepsilon}$ pertanto posto $\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}$ si è determinato un intorno di $x_0=0$ e, conseguentemente il risultato è corretto

3. Data la funzione $f(x)=\begin{cases}\log(1-x) & \text{se } x<0\\ 1-x^2 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

   Il grafico della funzione risulta:



Conseguentemente

$f(X)=R$

$\inf f(x)=-\infty$

$\sup f(x)=+\infty$

$\nexists \min f(x)$

$\nexists \max f(x)$

4. Dato il sistema $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-y-z=-1 \end{cases}$, si verifica se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Rouchè-Capelli, pertanto essendo la matrice incompleta risulta $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ per il calcolo del determinane si considera la sottomatrice $|A'|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3$ mentre il determinante della matrice completa essendo questa una matrice 2x4 si riduce ad una matrice 2x2 e quindi hanno stessa caratteristica pari a 2, quindi il sistema è indeterminato, ammette infinite soluzioni ovvero sono le soluzioni del seguente sistema $\begin{cases} x-2y=1-z \\ 2x-y=z-1 \end{cases}$ e conseguentemente $x=\begin{vmatrix} 1-z & -2 \\ z-1 & -1 \end{vmatrix}\cdot 3^{-1}$; $y=\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & z-1 \end{vmatrix}\cdot 3^{-1}$, Ovvero le infinite soluzioni, risultano: $x=z-1,\ y=z-1,\ \forall z\in R$.

5. Calcolare l*a primitiva* della funzione $f(x)=\dfrac{x-1}{1+x^2}$, *passante* per il punto $(0,1)$, si tratta di risolvere il seguente integrale $\int \dfrac{x-1}{1+x^2}dx$, per cui osservando che $\dfrac{x-1}{1+x^2}=\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}$, pertanto $\int \dfrac{x-1}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x}{1+x^2}dx-\int \dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}\log\left|1+x^2\right|-arctgx+c$, per cui $F(0)=1 \Leftrightarrow = \dfrac{1}{2}\log\left|1+0^2\right|-arctg0+c=1 \Leftrightarrow c=1$, quindi la primitiva cercata risulta $F(x)=\dfrac{1}{2}\log\left|1+x^2\right|-arctgx+1$.

6. Data la funzione $f(x)=\left|1+x^3\right|$ si osserva che il suo dominio è *R*, pertanto essendo la sua derivata prima $f'(x)=\dfrac{\left|1+x^3\right|}{1+x^3}3x^2$ il cui dominio risulta $R-\{1+x^3=0\} \Leftrightarrow R-\{-1\}$; quindi la funzione assegnata *non è derivabile*.

7. Si osserva che la funzione data $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{1-x}$, è definita in $R-\{1\}$. Pertanto verifichiamo se ci sono degli asintoti verticali: incominciamo con il vedere che il $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2x-1\right)\cdot \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x}=2(+\infty)=+\infty$, e che $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+2x-1\right)\cdot \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1-x}=2(-\infty)=-\infty$, pertanto la retta $x=1$ risulta *l'equazione dell'asintoto verticale* sia a sinistra che a destra.

Si procede ora nel verificare se ci sono asintoti orizzontali, pertanto si studia il $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ quindi, considerando che la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{1-x}=\dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}$, pertanto

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = -1 \lim_{x\to-\infty} x = +\infty$ e lo stesso dicasi per $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = -1 \lim_{x\to+\infty} x = -\infty$. Quindi non essendoci asintoti orizzontali, potrebbero esserci quelli obliqui, pertanto $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = -1$ e conseguentemente $\lim_{x\to-\infty} f(x)-ax = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{1-x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{1-x}\right) = -3$, pertanto la retta $y=-x-3$ risulta l'equazione dell'asintoto obliquo sia a sinistra che a destra.

8. Si osserva che la seguente funzione $f(x)=\begin{cases} e^x+1 & \text{se } x\geq 0 \\ \log(1-x) & \text{se } x<0 \end{cases}$, in merito alla continuità, il punto incriminato potrebbe essere il punto di raccordo, ed essendo $f(0)=2$ ed il $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(e^x+1)=2$ mentre il $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\log(1-x)=0$; la funzione *non è continua* ed il punto $x=0$ è un punto *di discontinuità di I specie*.

9. Date le matrici: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, per determinare $\left(A^T\cdot B^T\right)^{-1}$, si procede con il calcolare la trasposta della matrice A, che risulta $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e la trasposta della matrice B, che risulta $B^T=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ inoltre $A^T\cdot B^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}=C$ per cui $C^{-1}=\frac{agg(C)}{|C|}=\frac{\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}}{16}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{5}{16} \end{pmatrix}$.

10. Data la funzione $f(x,y)=x\log x-2y^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\left\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right\}$ risulta $\{\log(x)+1,-4y\}$, per cui gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} \log(x)+1=0 \\ -4y=0 \end{cases}$ pertanto il punto $\left(\frac{1}{e},0\right)$ risulta l'unico punto stazionario. Essendo il determinante Hessiano $H(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=-\frac{4}{x}$ lo stesso nel punto stazionario risulta $H\left(\frac{1}{e},0\right)=-4e$ quindi il punto stazionario trovato *è di sella*.