Esercitazione n. 13 (svolgimento)

1) Per i sistemi dati, al variare di *k*, si ha:

a) Essendo il sistema $A\alpha = b$, si osserva che $\det(A') = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$ mentre il $\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - k$; quindi per $k \neq 8$ $Car(A) \neq Car(B)$, pertanto il sistema è incompatibile; mentre $k = 8$, $Car(A) = Car(B) = 2 = n$ il numero delle incognite, pertanto il sistema diventa di Cramer, compatibile ed ammette una sola soluzione ovvero $\begin{cases} 4x & -y = 0 \\ 0 & 2y = 1 \end{cases} = \begin{cases} x = \dfrac{1}{8} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

b) Essendo il sistema $A\alpha = b$, si osserva che $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & k \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + k + 6 = k$ mentre il $\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16$; quindi per $\forall k \in R - \{0\}$ $Car(A) = Car(B) = 3 = n$, pertanto il sistema è di Cramer compatibile; e risulta

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & k \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{k} = \frac{2\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{k} = \frac{16 - 2k}{k},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & k \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{k} = \frac{2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{k} = \frac{-16 - 5k}{k}$$ e

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&2&2\\-2&1&-1\\-1&0&2\end{vmatrix}}{k}=\frac{2\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&-1\\-1&2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&1\\-1&0\end{vmatrix}}{k}=\frac{16}{k}$$; mentre $k=0$, $Car(A)\neq Car(B)$, pertanto il sistema è incompatibile.

c) Essendo il sistema $A\alpha=b$, si osserva che il $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&3\\-2&2&k\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&k\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2&k\\-1&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2&2\\-1&1\end{vmatrix}=4-2k$ ed il $\det(B)=\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&2&k\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&2\\-1&1\end{vmatrix}-k\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=-2k$ quindi $\det(A)\neq 0$ e $\det(B)\neq 0$, $\forall k\in R-\{0,2\}$ e conseguentemente $Car(A)=Car(B)=3=n$, pertanto il sistema è di Cramer compatibile; e risulta $x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\k&2&k\\0&1&1\end{vmatrix}}{4-2k}=\frac{-\begin{vmatrix}1&3\\k&k\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\k&2\end{vmatrix}}{4-2k}=\frac{k+2}{4-2k}$,

$y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\-2&k&k\\-1&0&1\end{vmatrix}}{4-2k}=\frac{\begin{vmatrix}k&k\\0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2&k\\-1&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2&k\\-1&0\end{vmatrix}}{4-2k}=\frac{2+3k}{4-2k}$ e

$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&2&k\\-1&1&0\end{vmatrix}}{4-2k}=\frac{-\begin{vmatrix}1&1\\2&k\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\-2&k\end{vmatrix}}{4-2k}=\frac{-2k}{4-2k}$; mentre per $k=2$, la $Car(B)=3$ ed essendo il $\det(A')=\begin{vmatrix}1&1\\-2&2\end{vmatrix}=4$, la $Car(A)=2\neq Car(B)$; così come per $k=0$, la $Car(A)=3$ ed essendo il $\det(B')=\begin{vmatrix}1&1\\-2&2\end{vmatrix}=4$ la $Car(B)=2\neq Car(A)$; conseguentemente risulta in ambedue i casi che la $Car(A)\neq Car(B)$, pertanto il sistema è incompatibile.

d) Essendo il sistema $A\alpha=b$, si osserva che $\det(A)=\begin{vmatrix}k&1&0\\1&3&-2\\1&k&-2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}3&-2\\k&-2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&-2\\1&-2\end{vmatrix}=-6k+2k^2$ ed ovviamente anche il $\det(B)\neq 0$; quindi per $\forall k\in R-\{0,3\}$ $Car(A)=Car(B)=3=n$, pertanto il sistema è di Cramer compatibile;

e risulta $x=\dfrac{\begin{vmatrix}0&1&0\\1&3&-2\\2&k&-2\end{vmatrix}}{2k^2-6k}=\dfrac{-\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}}{2k^2-6k}=\dfrac{-2}{2k^2-6k}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix}k&0&0\\1&1&-2\\1&2&-2\end{vmatrix}}{2k^2-6k}=\dfrac{k\begin{vmatrix}1&-2\\2&-2\end{vmatrix}}{2k^2-6k}=\dfrac{2k}{2k^2-6k}$ e

$z=\dfrac{\begin{vmatrix}k&1&0\\1&3&1\\1&k&2\end{vmatrix}}{2k^2-6k}=\dfrac{k\begin{vmatrix}3&1\\k&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}}{2k^2-6k}=\dfrac{6k-k^2-1}{2k^2-6k}$; mentre per $k=0$, il $\det(B')=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-2&1\\0&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\-2&2\end{vmatrix}=-2$ e conseguentemente la $Car(A)\neq Car(B)$, pertanto il sistema è incompatibile; così come per $k=3$, il $\det(B')=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-2&1\\3&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\-2&2\end{vmatrix}=-2$ e conseguentemente la $Car(A)\neq Car(B)$, pertanto il sistema è incompatibile.

e) Essendo il sistema $A\alpha=b$, si osserva che $\det(A)=\begin{vmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\k&0&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=4-2k$ ed ovviamente anche mentre il $\det(B)\neq 0$; quindi per $\forall k\in R-\{2\}$ $Car(A)=Car(B)=n$, pertanto il sistema è di Cramer compatibile; e risulta $x=\dfrac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&2\end{vmatrix}}{4-2k}=\dfrac{\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}}{4-2k}=0$,

$y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&1&1\\0&0&1\\k&1&2\end{vmatrix}}{4-2k}=\dfrac{2\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}}{4-2k}=\dfrac{-2+k}{4-2k}$ e

$z=\dfrac{\begin{vmatrix}2&-1&1\\0&1&0\\k&0&1\end{vmatrix}}{4-2k}=\dfrac{2\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}}{4-2k}=\dfrac{2-k}{4-2k}=\dfrac{1}{2}$; mentre per $k=2$, anche il $\det(B')=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&2\end{vmatrix}=0$; e possiamo estrarre una matrice A' per cui il $\det(A')=\begin{vmatrix}2&-1\\0&1\end{vmatrix}=2$ e conseguentemente anche la matrice estratta da B' ha determinante diverso da zero pertanto la $Car(A')=Car(B'')=2<n$, quindi in tal caso il sistema è compatibile ed ammette infinite

soluzioni; ovvero poiché si è analizzata la matrice $A'=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ il sistema diventa $\begin{cases}2x-y=1-z\\ y=-z\end{cases}=\begin{cases}x=\dfrac{1-2z}{2}\\ y=-z\end{cases}$ pertanto la terna delle soluzioni è $\left(\dfrac{1-2z}{2},-z,z\right)$, $\forall z\in R$.

f) Essendo il sistema $A\alpha=b$, si osserva che essendo $A=\begin{pmatrix}k & 1\\ 2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\det(A')=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2$ mentre il $\det(B)=\begin{vmatrix}k & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-k+4$; quindi per $k\neq 4$ $Car(A)\neq Car(B)$, pertanto il sistema è incompatibile; mentre $k=4$, $Car(A)=Car(B)=2=n$ il numero delle incognite, pertanto il sistema diventa di Cramer, compatibile ed ammette una sola soluzione ovvero $\begin{cases}2x=1\\ 2x+y=-1\end{cases}=\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=-2\end{cases}$.

g) Essendo il sistema $A\alpha=b$, si osserva che $\det(A)=\begin{vmatrix}k & 1 & 0\\ 0 & 2 & k\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}2 & k\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & k\\ 3 & 2\end{vmatrix}=k7+k^2$ ed ovviamente anche mentre il $\det(B)\neq 0$; quindi per $\forall k\in R-\{0,-7\}$ $Car(A)=Car(B)=n$, pertanto il sistema è di Cramer compatibile; ed essendo omogeneo risulta $x=0$, $y=0$ e $z=0$; mentre per $k=0$, possiamo estrarre una matrice A' per cui il $\det(A')=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-6$ e conseguentemente anche la matrice estratta da B ha determinante diverso da zero pertanto la $Car(A')=Car(B')=2<n$, quindi in tal caso il sistema è compatibile ed ammette infinite soluzioni; ovvero poiché si è analizzata la matrice $A'=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ il sistema diventa $\begin{cases}2y=0\\ 3x-y=-2z\end{cases}=\begin{cases}y=0\\ x=-\dfrac{2}{3}z\end{cases}$ pertanto la terna delle soluzioni è $\left(-\dfrac{2}{3}z,0,z\right)$, $\forall z\in R$; mentre per $k=-7$, possiamo estrarre una matrice A' per cui il $\det(A')=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-6$ e conseguentemente anche la matrice estratta da B ha determinante diverso da zero pertanto la $Car(A')=Car(B')=2<n$, quindi in tal caso il sistema è compatibile ed ammette infinite

soluzioni; ovvero poiché si è analizzata la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ il sistema diventa $\begin{cases} 2y = 7z \\ 3x - y = -2z \end{cases} = \begin{cases} y = \frac{7}{2}z \\ x = \frac{1}{2}z \end{cases}$ pertanto la terna delle soluzioni è $\left(\frac{1}{2}z, \frac{7}{2}z, z\right)$, $\forall z \in R$.

2) Le operazioni assegnate risultano:

a) Per poter calcolare $A^{-1}B$ è necessario prima conoscere $A^{-1} = \frac{Agg(A)}{\det(A)}$ pertanto essendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ iniziamo con il calcolare il $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$; inoltre essendo $Agg(A) = C^T$ per cui si ha $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e conseguentemente $C^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e così $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ per cui essendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ abbiamo infine $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

b) Per poter calcolare $(AB^T)^{-1}$ è necessario prima conoscere la trasposta di $B = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & k \end{pmatrix}$ ovvero $B^T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ conseguentemente essendo $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$ risulta $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 4k-1 \\ -1 & 2-k \end{pmatrix}$, inoltre $\det(AB^T) = \begin{vmatrix} 2 & 4k-1 \\ -1 & 2-k \end{vmatrix} = 2k+3$; per cui essendo $(AB^T)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4k-1 & 2-k \end{pmatrix}$, si che la matrice dei coefficienti algebrici, è $C = \begin{pmatrix} 2-k & 1-4k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ed infine si ha $(AB^T)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2-k & 1-4k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{2k+3} = \begin{pmatrix} \frac{2-k}{2k+3} & \frac{1-4k}{2k+3} \\ \frac{1}{2k+3} & \frac{2}{2k+3} \end{pmatrix}$.

c) Essendo $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & k \end{pmatrix}$ il suo determinante è $\det(A)=\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & k \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & k \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2k^2+8k+2$ ed ovviamente $\det(A)\neq 0$, per $2k^2+8k+2\neq 0$ quindi $Car(A)=3=n$ per $\forall k\in R-\{-2\pm\sqrt{3}\}$; mentre se $k=-2\pm\sqrt{3}$, allora possiamo estrarre una matrice A' per cui il $\det(A')=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2$ per cui la $Car(A')=2<n$. Ora sapendo che $A^{-1}=\frac{Agg(A)}{\det(A)}$ ed essendo $\det(A)=2k^2+8k+2$ iniziamo con il calcolare $Agg(A)=C^T$ per cui si ha $c_{1,1}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & k \end{vmatrix}=2k+8$, $c_{1,2}=-\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & k \end{vmatrix}=k$, $c_{1,3}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2$, $c_{2,1}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & k \end{vmatrix}=-2$, $c_{2,2}=\begin{vmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix}=k^2$, $c_{2,3}=-\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2k$, $c_{3,1}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-2$, $c_{3,2}=-\begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-4k-1$, e $c_{3,3}=\begin{vmatrix} k & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2k$ conseguentemente $C=\begin{pmatrix} 2k+8 & k & 2 \\ -2 & k^2 & 2k \\ -2 & -4k-1 & 2k \end{pmatrix}$ ed inoltre $Agg(A)=C^T=\begin{pmatrix} 2k+8 & -2 & -2 \\ k & k^2 & -4k-1 \\ 2 & 2k & 2k \end{pmatrix}$ ed infine

$$A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 2k+8 & -2 & -2 \\ k & k^2 & -4k-1 \\ 2 & 2k & 2k \end{pmatrix}}{2k^2+8k+2} \text{ ovvero } A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2k+8}{2k^2+8k+2} & \frac{-2}{2k^2+8k+2} & \frac{-2}{2k^2+8k+2} \\ \frac{k}{2k^2+8k+2} & \frac{k^2}{2k^2+8k+2} & \frac{-4k-1}{2k^2+8k+2} \\ \frac{2}{2k^2+8k+2} & \frac{2k}{2k^2+8k+2} & \frac{2k}{2k^2+8k+2} \end{pmatrix}.$$

3) Il gradiente e gli eventuali punti stazionari delle funzioni assegnate, risultano:

a) Data la $f(x,y)=\log(xy^2-x^2y)$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y),f'_y(x,y)\}$ per cui, essendo $f'_x(x,y)=\frac{1}{xy^2-x^2y}D_x(xy^2-x^2y)=\frac{y^2-2xy}{xy^2-x^2y}=\frac{y(y-2x)}{y(xy-x^2)}=\frac{y-2x}{xy-x^2}$ e $f'_y(x,y)=\frac{1}{xy^2-x^2y}D_y(xy^2-x^2y)=\frac{2yx-x^2}{xy^2-x^2y}==\frac{x(2y-x)}{x(y^2-xy)}=\frac{2y-x}{y^2-xy}$ per cui $\nabla f(x,y)=\left\{\frac{2x-y}{x^2-xy},\frac{2y-x}{y^2-xy}\right\}$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{x^2-xy}=0 \\ \dfrac{2y-x}{y^2-xy}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} = \begin{cases} 2x=y \\ 2y=x \end{cases}$ quindi l'unico punto che annulla quest'ultimo sistema è il punto $P_1(0,0)$, ma tale punto pone il sistema del gradiente sotto forma indeterminata, pertanto non è un punto stazionario.

b) Data la $f(x,y)=\log(x^2y^2-x^2y)$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$, per cui, essendo $f'_x(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^2-x^2y}D_x(x^2y^2-x^2y)=\dfrac{2xy^2-2xy}{x^2y^2-x^2y}=\dfrac{yx(2y-2)}{yx(xy-x)}=\dfrac{2y-2}{xy-x}$ e $f'_y(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^2-x^2y}D_y(x^2y^2-x^2y)=\dfrac{2yx^2-x^2}{x^2y^2-x^2y}=\dfrac{x^2(2y-1)}{x^2(y^2-y)}=\dfrac{2y-1}{y^2-y}$ per cui $\nabla f(x,y)=\left\{\dfrac{2y-2}{xy-x},\dfrac{2y-1}{y^2-y}\right\}$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} \dfrac{2y-2}{xy-x}=0 \\ \dfrac{2y-1}{y^2-y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} = \begin{cases} y=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ quindi $\begin{cases} \dfrac{2-2}{x-x}=0 \\ \dfrac{2y-1}{y^2-y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} = \begin{cases} y=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

quindi i punti che annullano il sistema sono $P_1(0,1)$, e $P_1\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ ma tali punti pongono il sistema del gradiente sotto forma indeterminata, pertanto non sono punti stazionari.

c) Data la $f(x,y)=x^2y^2-x^2y$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$. per cui, essendo $f'_x(x,y)=2xy^2-2xy$ e $f'_y(x,y)=2yx^2-x^2$ per cui $\nabla f(x,y)=\{2xy^2-2xy, 2yx^2-x^2\}$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 2xy^2-2xy=0 \\ 2yx^2-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} = \begin{cases} y=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ pertanto i punti stazionari risultano: $P_1(0,1)$, e $P_1\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

d) Data la $f(x,y)=2x^2y-x^3 2y+xy$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$, per cui, essendo $f'_x(x,y)=4xy-6x^2y+y$ e $f'_y(x,y)=2x^2-2x^3+x$ per cui gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 4xy-6x^2y+y=0 \\ 2x^2-2x^3+x=0 \end{cases}$ $x=0$ e $y=0$, quindi il punto stazionario risulta: $P(0,0)$.

e) Data la $f(x,y)=2x^2y-2x^3y^2+2xy$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$, per cui, essendo $f'_x(x,y)=4xy-6x^2y^2+2y$ e $f'_y(x,y)=2x^2-4x^3y+2x$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}4xy-6x^2y^2+2y=0\\2x^2-4x^3y+2x=0\end{cases}=\begin{cases}2x-3x^2y+1=0\\x-2x^2y+1=0\end{cases}$

ovvero $\begin{cases}(2x-3x^2y+1)-(x-2x^2y+1)=0 \Leftrightarrow x-x^2y=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{y}\\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{y^2}y+1=0 \Leftrightarrow y=1\end{cases}$ quindi il punto stazionario risulta: $P_1(1,1)$.

4) La natura degli eventuali punti stazionari delle funzioni assegnate, risulta:

a) Data la $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$ il suo gradiente . $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}=\{6x^2-6y, 6y-6x\}$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}f'_x(x,y)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6y=0\\ f'_y(x,y)=0 \Leftrightarrow 6y-6x=0\end{cases}=\begin{cases}x^2-y=0\\y-x=0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x=0\\y=x\end{cases}=\begin{cases}x(x-1)=0\\y=x\end{cases}$ le cui soluzioni sono i due punti stazionari $A=(0,0)$ e $B=(1,1)$, quindi i due punti stazionari e per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f''_{xx}(x,y)=12x$, $f''_{yy}(x,y)=6$, $f''_{xy}(x,y)=-6$ ed $f_{yx}(x,y)=-6$, essendo $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-(f''_{xy}(x,y))^2=72-36=36>0$, ed essendo $f''_{xx}(1,1)=12>0$, $f''_{yy}(x,y)=6>0$, conseguentemente il punto stazionario trovato è di minimo ed il suo valore è $f(1,1)=2-6+3=-1$; mentre per il punto $A=(0,0)$ essendo $H|f(0,0)|=-36$, risulta questo un punto di sella.

b) Data la $f(x,y)=x^3-x^2y^2+x^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}=\{3x^2-2xy^2+2x, -2x^2y\}$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\-2x^2y=0\end{cases}=\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\y=0\end{cases}$, e nella prima si ottiene $3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(3x+2)=0$ le cui soluzioni sono $x=0$ e $x=-\dfrac{2}{3}$, quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y)=6x-2y^2+2$, $f_{yy}(x,y)=-2x^2$, $f_{xy}(x,y)=-4xy$ e $f_{yx}(x,y)=-4xy$, per cui $H_{(0,0)}=0$, pertanto per tale punto non possiamo dire nulla, mentre, $H_{\left(-\frac{2}{3},0\right)} = \frac{16}{9}$ in quanto $f_{xx}\left(-\frac{2}{3},0\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = -2$, $f_{yy}\left(-\frac{2}{3},0\right) = -2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{8}{9}$ e $f_{xy}\left(-\frac{2}{3},0\right) = f_{yx}\left(-\frac{2}{3},0\right) = 0$, conseguentemente il punto stazionario $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ è di massimo ed il suo valore è $f\left(-\frac{2}{3},0\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

c) Data la $f(x,y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = \{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\} = \{-4x - 2y + 36, -2x - 4y + 42\}$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow -4x - 2y + 36 = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4y + 42 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x + 2y = 36 \\ 2x + 4y = 42 \end{cases} = \begin{cases} 2x + y = 18 \\ x + 2y = 21 \end{cases} = \begin{cases} 2(21 - 2y) + y = 18 \\ x = 21 - 2y \end{cases}$, pertanto la soluzione è $A = (5,8)$, e per poterla classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f''_{xx}(x,y) = -4 < 0$, $f''_{yy}(x,y) = -4 < 0$, $f''_{xy}(x,y) = -2$ ed $f_{yx}(x,y) = -2$, per cui $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 = 16 - 4 = 12 > 0$, pertanto Il punto stazionario trovato è un punto di massimo che ha valore $f(5,8) = 100$.

d) Data la $f(x,y) = x^3 - x^2 - y^2 + 8$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = \{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\} = \{3x^2 - 2x, -2y\}$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2y = 0 \end{cases} = \begin{cases} x(3x - 2) = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$ da cui osserviamo che le soluzioni sono, dalla prima $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$ e dalla seconda $y = 0$, pertanto $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3},0\right)$ sono gli unici due punti stazionari, per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f''_{xx}(x,y) = 6x - 2$, e $f''_{yy}(x,y) = -2$, e $f''_{xy}(x,y) = 0$, pertanto avendo nel punto stazionario $(0,0)$, $f''_{xx}(0,0) = -2 < 0$ ed essendo $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 = 4 > 0$, il punto stazionario trovato è di massimo locale stretto, che ha valore $f(0,0) = 8$; mentre nel punto stazionario $\left(\frac{2}{3},0\right)$, $f''_{xx}\left(\frac{2}{3},0\right) = 2 > 0$ ed essendo $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 = -4 < 0$, il punto stazionario trovato è di sella.

e) Data la $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = \{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\} = \{6x^2 - 3y, -3x + 4y\}$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 6x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases} = \begin{cases} 6x^2 - 3\dfrac{3x}{4} = 0 \\ y = \dfrac{3x}{4} \end{cases} = \begin{cases} x\left(6x - \dfrac{9}{4}\right) = 0 \\ y = \dfrac{3x}{4} \end{cases}$, e quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right)$;. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y) = 12x$, $f_{yy}(x,y) = 4$, $f_{xy}(x,y) = -3$ e $f_{yx}(x,y) = -3$, per cui $H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 48x - 9$, controlliamo quindi la natura del punto $(0,0)$, $H_f(0,0) = -9 < 0$ abbiamo un punto di sella, mentre per il punto $\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right)$, $H_f\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right) = 9 > 0$ ed $f_{xx}\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right) = \frac{9}{2} > 0$, per cui il punto stazionario $\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right)$ è un punto di minimo ed il suo valore è $f\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right) = -0.05273$.

5) Delle funzioni date, i punti stazionari, nel rispetto dei vincoli, hanno la seguente natura:

a) Data la $\pi(x,y) = -0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 + 11x + 7y - 500$ con vincolo massimo $x + y = 100$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $y = 100 - x \Leftrightarrow g(x) = 100 - x$, per cui la funzione diventa $\pi(x, g(x)) = -0.04x^2 - 0.01x(100 - x) - 0.01(100 - x)^2 + 11x + 7(100 - x) - 500$, funzione di una variabile $\hat{\pi}(x) = -0.04x^2 - x + 0.01x^2 - 100 + 2x - 0.01x^2 + 11x + 700 - 7x - 500$, ovvero $\hat{\pi}(x) = -0.04x^2 + 5x + 100$ la cui derivata prima risulta $\hat{\pi}'(x) = -0.08x + 5 \Leftrightarrow \hat{\pi}'(x) = 0 \Leftrightarrow -0.08x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{0.08} = 62.5$ e si annulla nel punto $x = 62.5$, per cui $y = 100 - 62.5 = 37.5$; ed osservando che $\hat{\pi}''(x) = -0.08 < 0$, il punto trovato è di massimo, e, se la funzione esprime il profitto, il suo massimo, nel rispetto del vincolo, risulta $\pi(62.5, 37.5) = -0.04(62.5)^2 - 0.01(62.5)(37.5) - 0.01(37.5)^2 + 11(62.5) + 7(37.5) - 500 = 256.25$.

b) Data la $f(x,y) = x^2 + y^2 + y - 1$ con vincolo $x^2 + y^2 = 1$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow g(y) = x^2 = 1 - y^2$, per cui la funzione diventa $h(y) = f(g(y), y) = 1 - y^2 + y^2 + y - 1 = y$, quindi per $y \in \{-1,1\}$, i valori che assume la funzione f sono dati dalla funzione h e sia nel punto $h(1) = 1$, conseguentemente

$x^2+1^2=1 \Leftrightarrow x=0$, così come $h(-1)=-1$ e conseguentemente $x^2+(-1)^2=1 \Leftrightarrow x=0$. Se consideriamo ora il gradiente della funzione $f(x,y)=x^2+y^2+y-1$ $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}=\{2x, 2y+1\}$, gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \\ f'_y(x,y)=0 \Leftrightarrow 2y+1=0 \end{cases} = \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ e quindi l'unico punto stazionario interno è $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$; quindi i tre punti candidati sono $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $(0,1)$e $(0,-1)$, che assumono valori: $f\left(0,-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, che risulta essere il minimo assoluto; $f(0,1)=1$ valore massimo assoluto, ed $f(0,-1)=-1$ punto intermedio.

c) Data la $C(x,y,z)=8+\frac{x^2}{4}+5+\frac{y^2}{2}+y+4+2z$ con vincolo massimo $x+y+z=80$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $x+y+z=80 \Leftrightarrow z=80-x-y$, per cui la funzione diventa $\hat{C}(x,y,g(x,y))=8+\frac{x^2}{4}+5+\frac{y^2}{2}+y+4+2(80-x-y)$, ovvero $C(x,y,g(x,y))=\hat{C}(x,y)=\frac{x^2}{4}-2x+\frac{y^2}{2}-y+177$ il cui gradiente è $\nabla\hat{C}(x,y)=\left(\hat{C}'_x=\frac{x}{2}-2, \hat{C}'_y=y-1\right)$, gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2=0 \\ y-1=0 \end{cases} = \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$, e quindi il punto stazionario è $(4,1)$ e se osserviamo l'Hessiano, per cui $\hat{C}''_{xx}=\frac{1}{2}$, $\hat{C}''_{yy}=1$, $\hat{C}''_{xy}=0$ e $\hat{C}''_{yx}=0$, per cui $H_{\hat{C}}(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$, quindi la natura del punto $(4,1)$ è di minimo, che nel vincolo forniscono $z=80-4-1=75$ e danno un costo complessivo $C(x,y,z)=8+\frac{4^2}{4}+5+\frac{1^2}{2}+1+4+2\cdot 75=172.5$.

d) Data la $g(x,y,z)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2z$ con vincolo massimo $x-y+z=100$, che possiamo esprime in funzione di due variabili, $x-y+z=100 \Leftrightarrow z=100-x+y$, per cui la funzione diventa $g(x,y,h(x,y))=\delta(x,y)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2(100-x+y)$, ovvero $\delta(x,y)=4x^2-2xy+2y^2+5x+5y-200$ il cui gradiente è $\nabla\delta(x,y)=\{\delta'_x=8x-2y+5, \delta'_y=4y-2x+5\}$, gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 8x-2y+5=0 \\ 4y-2x+5=0 \end{cases} = \begin{cases} y=4x+\frac{5}{2} \\ x=-\frac{15}{14} \end{cases} = \begin{cases} y=-\frac{25}{14} \\ x=-\frac{15}{14} \end{cases}$ e quindi il punto stazionario è $\left(-\frac{15}{14},-\frac{25}{14}\right)$ e se osserviamo l'Hessiano, per cui $\delta''_{xx}=8$, $\delta''_{yy}=4$, $\delta''_{xy}=-2$ e $\delta''_{yx}=-2$, per cui $H(x,y)=\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=32-4=28$, quindi la natura del punto $\left(-\frac{15}{14},-\frac{25}{14}\right)$ è di minimo, che nel vincolo forniscono $z=100+\frac{15}{14},-\frac{25}{14}=\frac{1390}{14}$, e quindi la terna soluzione del sistema risulta $\left(-\frac{15}{14},-\frac{25}{14},\frac{1390}{14}\right)$ che fornisce un costo complessivo pari a: $g(x,y,z)=4\left(-\frac{15}{14}\right)^2-2\frac{15}{14}\frac{25}{14}+2\left(-\frac{25}{14}\right)^2+3\left(-\frac{15}{14}\right)+7\left(-\frac{25}{14}\right)-2\frac{1390}{14}$, ovvero

$$g(x,y,z)=4\left(-\frac{15}{14}\right)^2-2\frac{15}{14}\frac{25}{14}+2\left(-\frac{25}{14}\right)^2+3\left(-\frac{15}{14}\right)+7\left(-\frac{25}{14}\right)-2\frac{1390}{14}=-207{,}14.$$

e) Data la $\pi(x,y)=-0.2x^2+0.02xy-0.01y^2+10x+5y-50$ con vincolo massimo $x-y=20$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $x-y=20 \Leftrightarrow x=20+y$, per cui la funzione diventa $\pi(h(y),y)=\gamma(y)=-0.19y^2+7.4y+70$, la cui derivata prima risulta $\gamma'(y)=-0.38y+7.4$ e conseguentemente $\gamma'(y)=0 \Leftrightarrow -0.38y+7.4=0 \Leftrightarrow y=\frac{7.4}{0.38}$, quindi si annulla nel punto $y=\frac{7.4}{0.38}$, per cui $x-y=20 \Leftrightarrow x-\frac{7.4}{0.38}=20 \Leftrightarrow x=20+\frac{7.4}{0.38}=\frac{15}{0.38}$; ed osservando che $\gamma''(y)=-0.38<0$, il punto trovato è di massimo, e, se la funzione esprime il profitto, il suo massimo, nel rispetto del vincolo, risulta $\pi\left(\frac{15}{0.38},\frac{7.4}{0.38}\right)=-0.2\left(\frac{15}{0.38}\right)^2+0.02\left(\frac{15}{0.38}\right)\left(\frac{7.4}{0.38}\right)-0.01\left(\frac{7.4}{0.38}\right)^2+10\left(\frac{15}{0.38}\right)+5\left(\frac{7.4}{0.38}\right)-50$. ovvero $\pi\left(\frac{15}{0.38},\frac{7.4}{0.38}\right)=\frac{20.5124}{0.1444}=142.05$.

6) Per le funzioni date, servendosi della funzione lagrangiana, i punti stazionari, nel rispetto dei vincoli, risultano:

a) Data la funzione $\pi(x,y)=-0.04x^2-0.01xy-0.01y^2+11x+7y-500$ con vincolo $g(x,y)=x+y=100$, si osservi che $\nabla g(x,y)=(1,1)\neq(0,0)$; pertanto la funzione

Lagrangiana è $L(x,y,\lambda)=-0.04x^2-0.01xy-0.01y^2+11x+7y-500-\lambda(x+y-100)$, ed il suo gradiente posto uguale a zero risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow -0.08x-0.01y+11-\lambda=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow -0.01x-0.02y+7-\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow x+y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.08x+0.01y+\lambda=11 \\ 0.01x+0.02y+\lambda=7 \\ x+y=100 \end{cases}$$

Siamo di fronte ad un sistema di Cramer in quanto il determinante della matrice incompleta risulta -0.08 e quindi le due incognite, per la regola di Cramer, sono $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 11 & 0.01 & 1 \\ 7 & 0.02 & 1 \\ 100 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-0.08}$ ed

$y=\dfrac{\begin{vmatrix} 0.08 & 11 & 1 \\ 0.01 & 7 & 1 \\ 1 & 100 & 0 \end{vmatrix}}{-0.08}$; ovvero $x=\dfrac{100\begin{vmatrix} 0.01 & 1 \\ 0.02 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{-0.08} \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{0.08}$ ed

$y=\dfrac{\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}-100\begin{vmatrix} 0.08 & 1 \\ 0.01 & 1 \end{vmatrix}}{-0.08} \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{0.08}$.

b) Data la funzione $f(x,y)=x^2+y^2+y-1$ con vincolo $g(x,y)=x^2+y^2=1$, si osservi che $\nabla g(x,y)=(2x,2y)\neq(0,0)$; pertanto la funzione Lagrangiana è $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+y-1-\lambda(x^2+y^2-1)$, ed il suo gradiente posto uguale a zero risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow 2x-2x\lambda=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow 2y+1-2y\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2x\lambda=0 \\ 2y+1-2y\lambda=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda)=0 \\ 2y(1-\lambda)=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y(1-\lambda)=-1 \\ y^2=1 \end{cases}$$

Siamo ancora di fronte ad un sistema di Cramer, ma come si nota, facilmente risolvibile e le due soluzioni sono $(0,1)$ e $(0,-1)$.

c) Data la funzione $C(x,y,z)=8+\dfrac{x^2}{4}+5+\dfrac{y^2}{2}+y+4+2z$ con vincolo $g(x,y,z)=x+y+z=80$, si osservi che $\nabla g(x,y,z)=(1,1,1)\neq(0,0,0)$; pertanto la funzione Lagrangiana è $L(x,y,z,\lambda)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+y+17+2z-\lambda(x+y+z-80)$, ed il suo gradiente posto uguale a zero risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z\lambda)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}-\lambda=0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda)=0 \Leftrightarrow y+1-\lambda=0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda)=0 \Leftrightarrow 2-\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda)=0 \Leftrightarrow x+y+z=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda-1 \\ \lambda=2 \\ x+y+z=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ \lambda=2 \\ z=75 \end{cases}$$

Siamo ancora di fronte ad un sistema di Cramer, ma come si nota, facilmente risolvibile e l'unica soluzione è la terna $(4,1,75)$.

d) Data la funzione $g(x,y,z)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2z$ con vincolo $h(x,y,z)=x-y+z=100$, si osservi che $\nabla h(x,y,z)=(1,-1,1)\neq(0,0,0)$; pertanto la funzione Lagrangiana è $L(x,y,z,\lambda)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2z-\lambda(x-y+z-100)$, ed il suo gradiente posto uguale a zero risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z\lambda)=0 \Leftrightarrow 8x-2y+3-\lambda=0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda)=0 \Leftrightarrow -2x+4y+7+\lambda=0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda)=0 \Leftrightarrow -2-\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda)=0 \Leftrightarrow x-y+z=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{2}+4x \\ x=-\frac{15}{14} \\ \lambda=-2 \\ x-y+z=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{2}-\frac{30}{7}=-\frac{25}{14} \\ x=-\frac{15}{14} \\ \lambda=-2 \\ -\frac{15}{14}+\frac{25}{14}+z=100 \end{cases}$$

Siamo ancora di fronte ad un sistema di Cramer, ma come si nota, facilmente risolvibile e l'unica soluzione è la terna $\left(-\frac{15}{14},-\frac{25}{14},\frac{1390}{14}\right)$.

e) Data la funzione $\pi(x,y)=-0.2x^2+0.02xy-0.01y^2+10x+5y-50$ con vincolo $g(x,y)=x-y=20$, si osservi che $\nabla g(x,y)=(1,-1)\neq(0,0)$; pertanto la funzione Lagrangiana è $L(x,y,\lambda)=-0.2x^2+0.02xy-0.01y^2+10x+5y-50-\lambda(x-y-20)$, ed il suo gradiente posto uguale a zero risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow -0.4x+0.02y+10-\lambda=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow 0.02x-0.02y+5+\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow x-y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.4x+0.02y+10-\lambda=0 \\ 0.02x-0.02y+5+\lambda=0 \\ x-y=20 \end{cases}$$

Siamo di fronte ad un sistema di Cramer in quanto il determinante della matrice incompleta risulta -0.38 e quindi le incognite, per la regola di Cramer, sono $x=\frac{\begin{vmatrix}-10 & 0.02 & -1 \\ -5 & -0.02 & 1 \\ 20 & -1 & 0\end{vmatrix}}{-0.38}$ ed $y=\frac{\begin{vmatrix}-0.4 & -10 & -1 \\ 0.02 & -5 & 1 \\ 1 & 20 & 0\end{vmatrix}}{-0.38}$; ovvero $x=\frac{20\begin{vmatrix}0.02 & -1 \\ -0.02 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-10 & -1 \\ -5 & 1\end{vmatrix}}{-0.38} \Leftrightarrow x=\frac{15}{0.38}$ ed $y=\frac{\begin{vmatrix}-10 & -1 \\ -5 & 1\end{vmatrix}-20\begin{vmatrix}-0.4 & -1 \\ 0.02 & 1\end{vmatrix}}{-0.38} \Leftrightarrow y=\frac{7.4}{0.38}$.