Esercitazione n. 12 (svolgimento)

1) I seguenti integrali definiti, risultano:

a) Dato il seguente integrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x dx$, ed essendo una primitiva di $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} sen 2x + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} sen 2x + c \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\frac{1}{2} sen 2\pi + c \right) - \left(\frac{1}{2} sen 2 \frac{\pi}{2} + c \right) = 0$.

b) Dato il seguente integrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, ed essendo una primitiva di $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} arcsen 2x + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left[\frac{1}{2} arcsen 2x + c \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} arcsen(1) + c \right) - \left(\frac{1}{2} arcsen(-1) + c \right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

c) Dato il seguente integrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2}$, ed essendo una primitiva di $\int \frac{1}{1+3x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \sqrt{3} x + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \sqrt{3} x + c \right]_0^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \sqrt{3} + c \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} arctg 0 + c \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

d) Dato il seguente integrale $\int_1^2 \left(2^{\frac{2x-1}{3}} + 1 \right) dx$, ed essendo una primitiva di $\int 2^{\frac{2x-1}{3}} dx + \int dx = \frac{3}{\log 4} 2^{\frac{2x-1}{3}} + x + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_1^2 \left(2^{\frac{2x-1}{3}} + 1 \right) dx = \left[\frac{3}{\log 4} 2^{\frac{2x-1}{3}} + x + c \right]_1^2 = \frac{3}{\log 4} \left(2 - \sqrt[3]{2} \right) + 1$.

e) Dato il seguente integrale $\int_3^2 \frac{1}{\sqrt[4]{4x^2}} + 2x^3$, ed osservando che $2<3$, per la proprietà additiva, possiamo calcolare $-\int_2^3 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4x^2}} + 2x^3 \right) dx = \int_3^2 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4x^2}} + 2x^3 \right) dx$; ed essendo una primitiva di $\int \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4x^2}} + 2x^3 \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt[4]{4x^2}} dx + \int 2x^3 dx = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{4}} + \frac{x^4}{2} + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha:

$$-\int_2^3 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4x^2}} + 2x^3 \right) dx = -\left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{4}} + \frac{x^4}{2} + c \right]_2^3 = -\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{4}} + \frac{3^4}{2} + c \right) + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}} + \frac{2^4}{2} + c \right) = \frac{2\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{\sqrt[4]{4}} - \frac{3^4}{2} + 8$$

.

2) Il valor medio che le funzioni assegnate assumono nel loro insieme di definizione, risulta:

a) Data la funzione $f : \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \to f(x) = sen(x+\pi)$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, risulta $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$; per cui calcolando $\int sen(x+\pi)dx = -\cos(x+\pi) + c$, e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen(x+\pi)dx = \left[-\cos(x+\pi) + c \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(-\cos(\pi+\pi) + c \right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) + c \right) = -1$$; per cui il

valor medio della funzione risulta: $f(c) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen(x+\pi)}{\pi - \frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow f(c) = -\frac{2}{\pi}$

b) Data la funzione $f : \left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8} \right] \to f(x) = \frac{1}{\cos^2(2x+\pi)}$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$; per cui calcolando $\int \frac{1}{\cos^2(2x+\pi)} dx = \frac{1}{2} tg(2x+\pi) + c$, e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha:

$\int_{-\frac{3}{8}\pi}^{-\frac{5}{8}\pi} \frac{dx}{\cos^2(2x+\pi)} = \left[\frac{1}{2} tg(2x+\pi) + c\right]_{-\frac{3}{8}\pi}^{-\frac{5}{8}\pi} = \left(\frac{1}{2} tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) + c\right) - \left(\frac{1}{2} tg \frac{\pi}{4} + c\right) = -1$; per cui il valor medio della funzione risulta: $f(c) = \frac{\int_{-\frac{3}{8}\pi}^{-\frac{5}{8}\pi} \frac{dx}{\cos^2(2x+\pi)}}{-\frac{5}{8}\pi + \frac{3}{8}\pi} \Leftrightarrow f(c) = \frac{4}{\pi}$.

c) Data la funzione $f:[1,2] \to f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{3x - 1}$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$; per cui considerando la divisione tra i polinomi, si ha $\int \frac{2x^2 - x + 3}{3x-1} dx = \int \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{9} + \frac{\frac{26}{9}}{3x-1} \right) dx = \frac{2}{3} \int x dx - \frac{1}{9} \int dx + \frac{26}{27} \int \frac{3}{3x-1} dx$, ovvero $\int \frac{2x^2 - x + 3}{3x-1} dx = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{26}{27} \log|3x-1| + c$; e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_1^2 \frac{2x^2 - x + 3}{3x-1} dx = \left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{26}{27}\log|3x-1| + c\right]_1^2 = \frac{8}{9} + \frac{26}{27}\log\frac{5}{2}$; per cui il valor medio della funzione risulta: $f(c) = \int_1^2 \frac{2x^2 - x + 3}{3x-1} dx \Leftrightarrow f(c) = \frac{8}{9} + \frac{26}{27}\log\frac{5}{2}$.

d) Data la funzione $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to f(x) = \cos^2 x$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$; per cui si ha $\int \cos^2 x dx = \int (\cos x \cos x) dx$, ed è quindi possibile procedere per parti, quindi posto $f(x) = \cos x \to f'(x) = -senx$; e posto $g'(x) = \cos x \to g(x) = senx$; per cui $\int \cos^2 x dx = \cos x senx + \int sen^2 x dx$ e ricordando che $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$, si ha $\int \cos^2 x dx = \cos x senx + \int 1 - \cos^2 x dx = \cos x senx + x - \int \cos^2 x dx$ ovvero $2\int \cos^2 x dx = \cos x senx + x \Leftrightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{\cos x senx + x}{2} + c$; e per il teorema

Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \left[\frac{\cos x sen x + x}{2} + c\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

per cui il valor medio della funzione risulta: $f(c) = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx}{\pi} \Leftrightarrow f(c) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$.

e) Data la funzione $f : [-1,1] \to f(x) = \frac{1}{3x^2 + 2}$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$; per cui essendo $\int \frac{1}{3x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} arctg\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + c$; e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{3x^2+2} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{6}} arctg\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + c\right]_{-1}^{1}$

quindi $\int_{-1}^{1} \frac{1}{3x^2+2} dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(arctg\sqrt{\frac{3}{2}} - arctg\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$; per cui il valor medio della funzione risulta: $f(c) = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{3x^2+2} dx}{2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(arctg\sqrt{\frac{3}{2}} - arctg\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$.

3) Gli eventuali punti del dominio, nei quali le funzioni assumono valor medio, risultano:

a) Data la funzione $f : [-1,1] \to f(x) = \frac{1}{2x^2 + 2}$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$ e conseguentemente $c = f^{-1}(f(c))$; una primitiva risulta: $\int \frac{1}{2x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} arctg x + c$ e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha,

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x^2+2}dx = \left[\frac{1}{2}arctgx + c\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(arctg(1) - arctg(-1)) = arctg(1)$ in quanto la funzione arcotangente è dispari, conseguentemente $f(c) = \frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{2x^2+2}dx}{2} \Leftrightarrow f(c) = \frac{1}{2}arctg1 \Leftrightarrow f(c) = \frac{\pi}{8}$ e tenendo conto che $f(c) = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2c^2+2} = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{c^2+1} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{\pi} - 1 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$.

b) Data la funzione $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to f(x) = sen2x$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$ e conseguentemente $c = f^{-1}(f(c))$; pertanto considerata la funzione data una primitiva risulta $\int sen2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x$ e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sen2xdx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, conseguentemente $f(c) = \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sen2xdx}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow f(c) = \frac{2}{\pi}$; pertanto $f(c) = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow sen2c = \frac{2}{\pi} = senarcsen\frac{2}{\pi} \Leftrightarrow 2c = arcsen\frac{2}{\pi} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}arcsen\frac{2}{\pi}$.

c) Data la funzione $f : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \to f(x) = sen^2 2x$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$ e conseguentemente $c = f^{-1}(f(c))$; pertanto considerata la funzione data una primitiva risulta $\int sen^2 2xdx = \int sen2xsen2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2xsen2x + \int \cos^2 2xdx$, ovvero $\int sen^2 2xdx = \frac{-\frac{1}{2}\cos 2xsen2x + x}{2}$ e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sen^2 2x dx = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x sen 2x + \frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{1}{4}\cos\pi sen\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3} sen\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right),$$

quindi $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sen^2 2x dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi}{16} = \frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{48}$ conseguentemente

$$f(c) = \frac{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sen^2 2x dx}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow f(c) = \frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{16};$$ pertanto

$$f(c) = \frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{16} \Leftrightarrow sen^2 2c = \frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{16} \Leftrightarrow arcsen|sen 2c| = arcsen\frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 8\pi}}{4},$$ ovvero

$$f(c) = \frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{16} \Leftrightarrow sen^2 2c = \frac{3\sqrt{3} + 8\pi}{16} \Leftrightarrow c = \pm\frac{1}{2} arcsen\frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 8\pi}}{4}$$

d) Data la funzione $f:[0,1] \to f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2}}$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$ e conseguentemente $c = f^{-1}(f(c))$; pertanto considerata la funzione data una primitiva risulta $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2}} dx = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{2}}$, e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x^2}}\right) dx = \left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{2}}\right]_0^1 = \left(\frac{2\sqrt{1}}{\sqrt[4]{2}}\right) - \left(\frac{2\sqrt{0}}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$, conseguentemente

$$f(c) = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x^2}}\right) dx \Leftrightarrow f(c) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}};$$ pertanto

$$f(c) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{2c^2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{c^2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} = 2 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}.$$

e) Data la funzione $f:\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to f(x) = \frac{1}{2x^2 - 2}$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$ e conseguentemente $c = f^{-1}(f(c))$; osservando che, per quest'ultimo integrale, avendo il polinomio due soluzioni si ha $\frac{1}{2x^2-2}=\frac{A}{2(x-1)}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+2B(x-1)}{2x^2-2}$ e per l'identità dei polinomi, si ha $\begin{cases} A+2B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} = \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}$ per cui una primitiva risulta: $\int \frac{1}{2x^2-2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{4}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log|x+1|+c$ e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2x^2+2}dx=\left[\frac{1}{4}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log|x+1|+c\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log\frac{3}{2}+c\right)-\left(\frac{1}{4}\log\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}+c\right)$, ovvero $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2x^2+2}dx=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}$, conseguentemente $f(c)=\frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2x^2+2}dx}{1}\Leftrightarrow f(c)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}\Leftrightarrow f(c)=\log\frac{1}{\sqrt{3}}$ e tenendo conto che $f(c)=\log\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2c^2-2}=\log\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2\log\frac{1}{\sqrt{3}}}=c^2-1\Leftrightarrow c=\pm\sqrt{\frac{1}{2\log\frac{1}{\sqrt{3}}}+1}$.